УДК 532.543

Д. Б. КЕЛЕХСАЕВ, М. Ю. КОСИЧЕНКО[1], *А. И. КОНДРАТЕНКО*[2]
[1]*Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) им. М. И. Платова, Новочеркасск, Россия*
[2]*Российский государственный аграрный университет – Московская сельскохозяйственная академия, Москва, Россия*

ОБЗОР УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДВУХМЕРНОГО В ПЛАНЕ ОТКРЫТОГО ВОДНОГО ПОТОКА

Приведены уравнения движения двухмерного в плане открытого водного потока, как в физической плоскости течения потока, так и в плоскости годографа скорости. При этом существенно нелинейная система дифференциальных уравнений в частных производных движения водного потока в плоскости годографа скорости трансформируется в систему линейных дифференциальных уравнений, которые имеют спектр решений, позволяющий решать граничные задачи о течении потенциальных потоков аналитическими методами. Изложены основные допущения и исходные физические предпосылки для модели двухмерных в плане водных потоков.

Ключевые слова: двумерный водный поток, уравнения Эйлера, плоскость годографа скорости.

Введение. Целью работы является обзор различного вида уравнений движения двухмерного в плане открытого водного потока для решения практических задач.

Основные допущения для модели двухмерных в плане водных потоков следующие [1, 2]:

а) вертикальные (или нормальные к выбранной координатной плоскости) составляющие местных осреднённых скоростей и ускорений малы;

б) векторы скоростей жидких частиц, расположенных на одной вертикали, лежат в одной плоскости;

в) распределение скоростей на любой вертикали практически равномерное.

Можно выделить достаточно широкий класс потоков, параметры которых отвечают этим допущениям. Такие потоки называют двухмерными в плане, отражая то, что для их описания достаточно двух геометрических координат x, y.

Основоположники теории двухмерных в плане водных потоков исходили из динамических уравнений движения идеального двухмерного открытого водного потока в форме Л. Эйлера (уравнений движения идеальной жидкости), дополненных слагаемыми, учитывающими силы сопротивления жидкости [1, 2]:

$$\begin{cases} X - \dfrac{1}{\rho} \cdot \dfrac{\partial p}{\partial x} - T_x = \dfrac{du_x}{dt}; \\ Y - \dfrac{1}{\rho} \cdot \dfrac{\partial p}{\partial y} - T_y = \dfrac{du_y}{dt}; \\ Z - \dfrac{1}{\rho} \cdot \dfrac{\partial p}{\partial z} - T_z = \dfrac{du_z}{dt}, \end{cases} \tag{1}$$

где X, Y, Z – компоненты объёмных сил; T_x, T_y, T_z – компоненты сил сопротивления, отнесённых к единице массы жидкости; ρ – плотность жидкости; p – местное давление; u_x, u_y, u_z – компоненты вектора местной скорости.

Для установившегося потока при вертикальном направлении оси z и действии в жидкости единственной объёмной силы (силы тяжести) система (1) приобретает вид:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\rho} \cdot \dfrac{\partial p}{\partial x} - T_x = u_x \dfrac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \dfrac{\partial u_x}{\partial z}; \\ -\dfrac{1}{\rho} \cdot \dfrac{\partial p}{\partial y} - T_y = u_x \dfrac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \dfrac{\partial u_y}{\partial z}; \\ -g - \dfrac{1}{\rho} \cdot \dfrac{\partial p}{\partial z} - T_z = u_x \dfrac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \dfrac{\partial u_z}{\partial z}. \end{cases} \tag{2}$$

В силу посылки о малости вертикальных составляющих скоростей и ускорений все инерционные составляющие, содержащие u_z и её производные, могут быть отброшены. Тогда третье уравнение системы (2) примет вид

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho\,, \tag{3}$$

где g – ускорение силы тяжести; γ – удельный вес жидкости.

Интегрируя уравнение (3), получим

$$p = -\gamma z + f(x, y), \tag{4}$$

где $f(x, y)$ – произвольная функция.

С учётом того, что на свободной поверхности $z = z_n$ и $p = p_n = \text{const}$, приходим к гидростатическому закону распределения давлений на вертикали:

$$p - p_n = \gamma(z_n - z)\,. \tag{5}$$

Обозначив через z_0 координату дна водотока, получим

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \gamma \frac{\partial}{\partial x}(z_0 + h); \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \gamma \frac{\partial}{\partial y}(z_0 + h)\,. \tag{6}$$

Тогда систему динамических уравнений движения потока можно записать в виде

$$
\begin{cases}
u_x \dfrac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_x}{\partial y} = -g \dfrac{\partial}{\partial x}(z_0 + h) - T_x; \\
u_x \dfrac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_y}{\partial y} = -g \dfrac{\partial}{\partial y}(z_0 + h) - T_y.
\end{cases} \tag{7}
$$

Дополнив эту систему уравнений уравнением неразрывности потока

$$
\frac{\partial}{\partial x}(hu_x) + \frac{\partial}{\partial y}(hu_y) = 0, \tag{8}
$$

получим следующую систему течения потока в виде

$$
\begin{cases}
u_x \dfrac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_x}{\partial y} = -g \dfrac{\partial}{\partial x}(z_0 + h) - T_x; \\
u_x \dfrac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_y}{\partial y} = -g \dfrac{\partial}{\partial y}(z_0 + h) - T_y; \\
\dfrac{\partial}{\partial x}(hu_x) + \dfrac{\partial}{\partial y}(hu_y) = 0.
\end{cases} \tag{9}
$$

В частном случае, когда дно водовода горизонтальное, система (9) приобретает вид

$$
\begin{cases}
u_x \dfrac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_x}{\partial y} + g \dfrac{\partial h}{\partial x} = -T_x; \\
u_x \dfrac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_y}{\partial y} + g \dfrac{\partial h}{\partial y} = -T_y; \\
\dfrac{\partial}{\partial x}(hu_x) + \dfrac{\partial}{\partial y}(hu_y) = 0.
\end{cases} \tag{10}
$$

В ряде потоков, встречающихся в практике (выход потока из отверстия в расширение, вход потока в сужение, течение на виражах, на коротких участках) силами сопротивления потоку можно пренебречь, особенно в бурных высокоскоростных потоках, для которых силы инерции значительно превосходят силы тяжести, и система уравнений (10) приобретает вид

$$
\begin{cases}
u_x \dfrac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_x}{\partial y} + g \dfrac{\partial h}{\partial x} = 0; \\
u_x \dfrac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_y}{\partial y} + g \dfrac{\partial h}{\partial y} = 0; \\
\dfrac{\partial}{\partial x}(hu_x) + \dfrac{\partial}{\partial y}(hu_y) = 0.
\end{cases} \tag{11}
$$

Система дифференциальных уравнений в частных производных (11) описывает течение двухмерных в плане открытых стационарных потоков в горизонтальном водоводе без учёта сил сопротивления потоку. Эта система является системой существенно нелинейных уравнений, замкнутой относительно неизвестных функций

$$u_x = u_x(x, y)\ ;\ \ u_y = u_y(x, y)\ ;\ \ h = h(x, y).$$

С использованием системы (11) решаются различные задачи по течению двухмерных в плане водных потоков. Вводя дополнительное условие потенциальности потока [3, 4],

$$\Omega = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0\ , \tag{12}$$

где Ω – вихрь для двухмерного потока, приходим к существованию потенциальной функции $\varphi = \varphi(x, y)$ такая, что $u_x = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$; $u_y = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$.

Система уравнений (11) в этом случае сводится к виду

$$\begin{cases} \dfrac{u_x^2 + u_y^2}{2g} + h = H_0 \quad \text{или} \quad \dfrac{V^2}{2g} + h = H_0; \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(h u_x) + \dfrac{\partial}{\partial y}(h u_y) = 0; \\ u_x = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad u_y = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}, \end{cases} \tag{13}$$

где H_0 – постоянная для всего потока, определяемая по параметрам потока V_0, h_0 в некоторой характерной точке потока.

Первое конечное уравнение в системе (13) имеет название интеграла Д. Бернулли для двухмерных в плане водных потоков. Система уравнений (13) сводится к одному уравнению второго порядка в частных производных относительно потенциальной функции $\varphi = \varphi(x, y)$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\left[C^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2\right] - 2\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\left[C^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right] = 0\ , \tag{14}$$

где $C = \sqrt{gh}$; $h = H_0 - \dfrac{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}{2g}$.

Это уравнение по внешнему виду совпадает с уравнением для потенциала скорости плоского безвихревого газа, причём скорости звука соответствует волновая скорость C.

Из уравнения неразрывности потока (8) следует существование функции тока, удовлетворяющей условиям

$$h u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}\ ;\ \ h u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}\ . \tag{15}$$

Поэтому систему (11) можно свести также к одному дифференциальному уравнению второго порядка в частных производных относительно функции тока $\psi = \psi(x, y)$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\left[1-\frac{1}{C^2h^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\left[1-\frac{1}{C^2h^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right]+\frac{2}{C^2h^2}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}=0. \quad (16)$$

Уравнения (14), (16) служат исходными для разработки методов расчёта двухмерных в плане бурных потоков [1, 2]. Для бурных потоков эти уравнения относятся к гиперболическому типу и для их исследования может быть использован метод характеристик.

Метод расчёта потоков с использованием характеристик является численно-графо-аналитическим и даёт недостаточную точность для практического пользования результатами модели. Гораздо более точные результаты дают аналитические модели, изложенные в монографиях [3–5]. Следует заметить, что модель двухмерного в плане потенциального бурного потока, несмотря на значительную степень идеализации, имеет важное теоретическое и практическое значение. Теоретическое значение заключается в том, что, исследуя простую модель, можно выявить характерные свойства потока и использовать их в более сложных моделях.

Практическое использование результатов модели потенциального течения в горизонтальном русле возможно в случаях, когда роль сил сопротивления относительно невелика (местные сужения, расширения или изгибы русла). В таких потоках основное формирующее влияние на параметры потока оказывает его инерционность и, если протяжённость потока незначительна, влиянием сил сопротивления можно пренебречь.

Аналитические методы решения различных задач по течению двухмерных в плане потенциальных потоков применяются:

а) в случае упрощений для потенциальной модели:

– уравнения движения простой центрированной волны;

– радиальный поток (безнапорный потенциальный источник) [1, 2];

б) при использовании вспомогательной плоскости годографа скорости [3–5].

Согласно уравнениям (13), (15) систему движений двухмерных в плане потенциальных водных потоков можно записать в виде

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad u_y = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}; \\ \dfrac{h}{h_0}u_x = \dfrac{\partial\psi}{\partial y}; \quad \dfrac{h}{h_0}u_y = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x}; \\ \dfrac{V^2}{2g}+h=H_0; \quad V^2=u_x^2+u_y^2. \end{cases} \quad (17)$$

Переходом в плоскость годографа скорости $\Gamma(\tau, \theta)$, в которой независимыми координатами являются $\tau = \dfrac{V^2}{2gH_0}$ (квадрат скоростного коэффициента) и угол θ, характеризующий направление вектора скорости, уравнения (17) трансформируются к виду [3–5]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial\tau} = \dfrac{h_0}{2H_0} \cdot \dfrac{3\tau - 1}{\tau(1-\tau)^2} \cdot \dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}; \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 2\dfrac{h_0}{H_0} \cdot \dfrac{\tau}{1-\tau} \cdot \dfrac{\partial\psi}{\partial\tau}. \end{cases} \tag{18}$$

Формулы для определения глубин и скоростей при заданном параметре τ имеют вид:

$$h = H_0(1-\tau); \quad V = \tau^{1/2}\sqrt{2gH_0}\,. \tag{19}$$

Зависимыми параметрами, неизвестными функциями в системе (18) являются $\varphi = \varphi(\tau, \theta)$ – потенциальная функция; $\psi = \psi(\tau, \theta)$ – функция тока, при этом для бурных потоков

$$\frac{1}{3} < \tau \le 1\,. \tag{20}$$

Система уравнений (18) является уже линейной системой дифференциальных уравнений в частных производных в отличие от системы (11). Эта система сводится к решению следующего уравнения математической физики

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{2\tau}{1-\tau} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right) + \frac{1-3\tau}{2\tau(1-\tau)^2} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = 0\,. \tag{21}$$

Это уравнение рядом замен приводится к гипергеометрическому уравнению с действительными коэффициентами, решения которого известны. Авторы работы на базе аналитических решений системы (18) развили метод, который может использоваться при решении различных задач по течению потенциальных двухмерных в плане открытых стационарных водных потоков [3–5].

Сначала решается граничная задача в плоскости годографа скорости. Далее осуществляется переход в физическую плоскость течения потока с использованием дифференциальной связью между планом течения потока и плоскостью годографа скорости:

$$d(x+iy) = \left[d\varphi + i\frac{h_0}{H_0(1-\tau)}d\psi\right]\frac{e^{i\theta}}{\tau^{1/2}\sqrt{2gH_0}}\,, \tag{22}$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица; x, y – координаты жидкой частицы потока в плане его течения; τ, θ – независимые координаты в плоскости годографа скорости.

В работах [3–5] авторы разработали детальную технологию решения задач по течению двухмерных в плане потенциальных потоков.

Заключение. В работе приведены различные формы уравнений движения двухмерных в плане открытых водных потоков. Особенно удобен современный метод расчёта потенциальных потоков с использованием плоскости годографа скорости, позволяющий получить аналитическое решение некоторых важных практических задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Емцев, Б. Т.** Двухмерные бурные потоки / Б. Т. Емцев. – М. : Энергия, 1967. – 212 с.

2 **Высоцкий, Л. И.** Управление бурными потоками на водосбросах / Л. И. Высоцкий. – М. : Энергия, 1990. – 280 с.

3 Моделирование одномерных и двухмерных открытых водных потоков / В. Н. Коханенко [и др.]. – Ростов н/Д : Изд-во ЮФУ, 2007. – 168 с.

4 Моделирование бурных двухмерных в плане водных потоков / В. Н. Коханенко [и др.]. – Ростов н/Д : Изд-во ЮФУ, 2013. – 179 с.

5 **Ширяев, В. В.** Развитие теории двухмерных открытых водных потоков / В. В. Ширяев, М. Ф. Мицик, Е. В. Дуванская. – Шахты : Изд-во ЮРГУЭС, 2007. – 132 с.

D. B. KELEKHSAEV[1], *M. Yu. KOSICHENKO*[1], *A. I. KONDRATENKO*[2]

[1]*Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI), Novocherkassk, Russia*
[2]*Russian State Agrarian University – Moscow Timiryazev Agricultural Academy, Moscow, Russia*

REVIEW OF THE MOVEMENT EQUATIONS OF OPEN WATER FLOW TWO-DIMENSIONAL IN PLAN

The movement equations of open water flow two-dimensional are presented in the paper both in the physical flow plane and in the velocity hodograph plane. In this case, an essentially nonlinear system of partial differential equations of the water flow motion in the plane of the velocity hodograph is transformed into a system of linear differential equations that have a solution spectrum allowing to solve boundary problems along the flow of potential streams by analytical methods. The main assumptions and the initial physical premises for a modeling of the water flows two-dimensional in plan are outlined.

Получено 27.05.2018