УДК 532.543

Д. Б. КЕЛЕХСАЕВ[1], А. И. КОНДРАТЕНКО[2], Н. В. КОСИЧЕНКО[1]
[1]Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М. И. Платова, Новочеркасск, Россия
[2]Российский государственный аграрный университет – Московская сельскохозяйственная академия, Москва, Россия

МЕТОД ПОИСКА АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХМЕРНЫХ В ПЛАНЕ БУРНЫХ ПОТОКОВ В ПЛОСКОСТИ ГОДОГРАФА СКОРОСТИ

Рассмотрен метод поиска аналитических решений системы двухмерных в плане потенциальных водных потоков разделением переменных. Подробно исследованы случаи, при которых параметр ω, введенный в процессе решения, лежит в диапазоне от нуля до единицы, что позволяет расширить спектр рассматриваемых явлений и увеличить возможности решения различных прикладных задач о течении двухмерных в плане открытых потенциальных потоков.

Ключевые слова: двухмерный в плане потенциальный поток, дифференциальное уравнение, годограф скорости, аналитическое решение.

Несмотря на значительную степень идеализации, модель потенциального двухмерного в плане потока имеет важное принципиальное и определённое практическое значение [1, 2]. Её принципиальная значимость определяется тем, что, исследуя особенности движения в этом наиболее простом случае, удаётся выявить основные динамические свойства потенциального течения, которые характерны также для реального потока и должны быть учитываемы в практических задачах.

Аналитические зависимости для бурного потенциального потока получаются наиболее простыми и удобными для использования проектировщиками гидротехнических сооружений, в которых протекают указанные выше потоки. Методы расчёта потенциальных двухмерных в плане водных потоков соответственно являются более простыми, нежели с учётом сил сопротивления потоку. Хотя последующий учёт сил сопротивления и сил тяжести приводит к усложнениям, многие основные идеи методов, разработанных для потенциального потока, могут использоваться и в общем случае.

Практическое значение случая потенциального течения в горизонтальном русле также существенно, потому что в ряде случаев роль сил сопротивления относительно невелика. К примеру, при протекании бурного потока через местные сужения, расширения или изгибы русла. В этих случаях основное формирующее влияние на поток оказывает инерционность его частиц и влиянием сопротивления на коротких участках потока можно пренебречь. Это и потоки на виражах и рассеивающих трамплинах быстротоков. Во многих практических задачах не требуется высокой точности результатов, а вполне достаточно получить точность, не превышающую 10–20 %.

Целью работы является нахождение аналитических решений уравнений движения бурного потока методом разделения переменных [2].

Система уравнений, описывающих движение потока, согласно литературе [3–5] имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial\tau} = \dfrac{h_0}{2H_0}\cdot\dfrac{3\tau-1}{\tau(1-\tau)^2}\cdot\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}; \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 2\dfrac{h_0}{H_0}\cdot\dfrac{\tau}{1-\tau}\cdot\dfrac{\partial\psi}{\partial\tau}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\varphi = \varphi(\tau, \theta)$ – потенциальная функция; $\tau = \dfrac{V^2}{2gH_0}$, θ – угол, характеризующий направление местной скорости частиц, расположенных на вертикали к плану течения потока; H_0, h_0 – постоянные для всего потока; V – модуль скорости; g – ускорение силы тяжести; $\psi = \psi(\tau, \theta)$ – функция тока.

Решение системы (1) сводится к решению дифференциального уравнения в частных производных второго порядка для функции тока [6]

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{2\tau}{1-\tau}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right)+\frac{1-3\tau}{2\tau(1-\tau)^2}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=0. \tag{2}$$

При этом для бурных потоков $\dfrac{1}{3} < \tau \le 1$.

Рассмотрим аналитическое решение уравнения (2) методом разделения переменных. Сведем данное уравнение к обыкновенному дифференциальному, а именно к гипергеометрическому, уравнению, известному в математической справочной литературе [7]. Для этого в уравнении (2) полагаем

$$\psi(\tau, \theta) = \psi_1(\tau)\cdot\psi_2(\theta). \tag{3}$$

Непосредственным дифференцированием равенства (3) определяются частные производные

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial\tau} = \dfrac{d\psi_1(\tau)}{d\tau}\cdot\psi_2(\theta); \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial\theta} = \psi_1(\tau)\cdot\dfrac{d\psi_2(\theta)}{d\theta}; \\ \dfrac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = \psi_1(\tau)\cdot\dfrac{d^2\psi_2(\theta)}{d\theta^2}. \end{cases} \tag{4}$$

С учётом равенств (4) уравнение (2) преобразуется к виду

$$\psi_2(\theta)\cdot\frac{d}{d\tau}\left(\frac{2\tau}{1-\tau}\cdot\frac{d\psi_1}{d\tau}\right)+\frac{1}{2}\psi_1(\tau)\cdot\frac{1-3\tau}{\tau(1-\tau)^2}\cdot\frac{d^2\psi_2(\theta)}{d\theta^2}=0. \tag{5}$$

Уравнение (5) можно переписать в форме

$$\frac{\dfrac{d}{d\tau}\left(\dfrac{\tau}{1-\tau}\cdot\dfrac{d\psi_1(\tau)}{d\tau}\right)}{\dfrac{1-3\tau}{4\tau(1-\tau)^2}\cdot\psi_1(\tau)}=-\frac{\dfrac{d^2\psi_2(\theta)}{d\theta^2}}{\psi_2(\theta)}=\omega. \tag{6}$$

Здесь учтено, что левая часть уравнения (6) зависит только от τ, правая от θ, и их можно положить постоянными, равными ω. Следовательно, для функции $\psi_2(\theta)$ справедливо следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\psi_2(\theta)}{d\theta^2}+\omega\psi_2(\theta)=0\ . \tag{7}$$

При $\omega>0$ уравнение (7) имеет решение

$$\psi_2(\theta)=A\sin\left(\sqrt{\omega}\cdot\theta+\lambda\right), \tag{8}$$

где A, λ – постоянные.

Из (6) следует

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\tau}{1-\tau}\cdot\frac{d\psi_1(\tau)}{d\tau}\right)+\omega\frac{3\tau-1}{4\tau(1-\tau)^2}\psi_1(\tau)=0\ . \tag{9}$$

Полагаем

$$\psi_1=\tau^{\gamma}\cdot Y(\tau)\,. \tag{10}$$

Из (10) следует:

$$\frac{d\psi_1}{d\tau}=\gamma\tau^{\gamma-1}\cdot Y+\tau^{\gamma}\cdot Y'\ . \tag{11}$$

Тогда

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\tau}{1-\tau}\cdot\frac{d\psi_1}{d\tau}\right)=\left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)'\cdot\left(\gamma\tau^{\gamma-1}Y+\tau^{\gamma}Y'\right)+$$

$$+\frac{\tau}{1-\tau}\left[\gamma(\gamma-1)\tau^{\gamma-2}Y+\gamma\tau^{\gamma-1}Y'+\tau^{\gamma}Y''\right]=\frac{1}{(1-\tau)^2}\cdot\left(\gamma\tau^{\gamma-1}Y+\tau^{\gamma}Y'\right)+ \tag{12}$$

$$+\frac{\tau}{1-\tau}\left[\gamma(\gamma-1)\tau^{\gamma-2}Y+2\gamma\tau^{\gamma-1}Y'+\tau^{\gamma}Y''\right].$$

Подставив правые части формул (10)–(12) в выражение (11), получим

$$\frac{1}{(1-\tau)^2}\left(\gamma\tau^{\gamma-1}Y+\tau^{\gamma}Y'\right)+\frac{\tau}{1-\tau}\left[\gamma(\gamma-1)\tau^{\gamma-2}Y+2\gamma\tau^{\gamma-1}Y'+\tau^{\gamma}Y''\right]+$$

$$+\frac{\omega(3\tau-1)}{4\tau(1-\tau)^2}\tau^{\gamma}Y=0. \tag{13}$$

Упростив (13), получим следующее уравнение:

$$Y''\tau^2(1-\tau)+Y'[\tau+2\gamma\tau(1-\tau)]+Y\cdot\left[\frac{\omega(3\tau-1)}{4}+\gamma+\gamma(\gamma-1)(1-\tau)\right]=0. \quad (14)$$

Преобразуем уравнение (14) к виду

$$Y''\tau^2(1-\tau)+Y'\tau[1+2\gamma(1-\tau)]+Y\tau\left[\frac{3\omega}{4}-\gamma(\gamma-1)\right]+Y\left(\gamma^2-\frac{\omega}{4}\right)=0. \quad (15)$$

Согласно [7] гипергеометрическое уравнение имеет общий вид

$$z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2}+[c-(a+b+1)z]\cdot\frac{dw}{dz}-abw=0. \quad (16)$$

Следовательно, уравнение (15) будет гипергеометрическим, если

$$\gamma^2-\frac{\omega}{4}=0. \quad (17)$$

Само уравнение (14) при условии (17) примет вид

$$Y''\tau(1-\tau)+Y'[1+2\gamma(1-\tau)]+Y\left[\frac{3\omega}{4}-\gamma(\gamma-1)\right]=0. \quad (18)$$

Это гипергеометрическое уравнение для бурных потоков, т. е. при $\frac{1}{3}<\tau\le 1$, имеет особую точку $\tau = 1$ и не имеет других особых точек [7]. Решения уравнения (18) записываются в виде гипергеометрического ряда

$$Y^{(1)}=F(a,b,c,\tau)=1+\frac{ab}{c}\tau+\frac{(a+1)b(b+1)}{2!\cdot c(c+1)}\tau^2+\dots . \quad (19)$$

Из сравнения уравнений (16) и (18) видно, что

$$ab=\gamma(\gamma-1)-\frac{3}{4}\omega;\ c=1+2\gamma;\ \ a+b+1=2\gamma. \quad (20)$$

При этом c в общем случае не должно равняться нулю или целому отрицательному числу. Ряд (19) сходится абсолютно и равномерно при $\tau < 1$. Сходимость распространяется и на единичную окружность при условии

$$\mathrm{Re}(a+b-c)<0. \quad (21)$$

Из равенств (20) следует, что $a+b-c=-2<0$, следовательно, условие (21) выполняется и ряд (19) сходится в окрестности особой точки $\tau = 1$.

Из системы алгебраических уравнений (20) определяются параметры a, b, c:

$$a=\frac{2\gamma-1}{2}\pm\sqrt{\frac{(2\gamma-1)^2}{4}+\frac{3}{4}\omega-\gamma(\gamma-1)};\ b=2\gamma-1-a;\ c=1+2\gamma. \quad (22)$$

Отметим, что в частном случае при $\omega = 1$, $\gamma = 1/2$ коэффициенты a, b, c имеют следующие значения: $a = 1$, $b = -1$, $c = 2$.

Тогда $Y^{(1)} = 1 - \frac{\tau}{2}$ – первое из двух решений гипергеометрического уравнения. Решение уравнения (5) записывается в виде

$$\psi(\tau, \theta) = A \sin\theta \cdot \tau^{1/2} \cdot \left(1 - \frac{\tau}{2}\right),$$

которое совпадает с решением, ранее найденным в работе [3]. Здесь A – постоянная, которая находится из решения конкретной граничной задачи.

Однако решения, полученные для определения вида функции $\psi(\tau, \theta)$, были получены в частном случае, как бы перебором возможных вариантов, а условие (17) и формулы (22) позволяют рассмотреть более общий случай. Особую практическую важность представляет диапазон $0 < \omega < 1$, который в работах [3, 4] ранее не был проанализирован с общих позиций.

Второе линейно независимое решение уравнения (18) определяется по методам, изложенным в литературе [7] и в монографиях [3, 4].

Дополнительно приведём одно из двух решений уравнения (5) при $\omega = 1/4$. В этом случае согласно условию (17)

$$\gamma = \pm\frac{1}{4}. \tag{23}$$

Полагая $\gamma = -1/4$, получим из (22) значения коэффициентов a, b, c

$$a = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}; \quad b = -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}; \quad c = \frac{1}{2}. \tag{24}$$

Тогда решение уравнения (5) записывается в виде

$$\psi(\tau, \theta) = A \sin\left(\frac{\theta}{2} + \lambda\right) \frac{1 - \frac{1}{4}\tau}{\tau^{1/4}}. \tag{25}$$

В решении опущены слагаемые порядка τ^2 и более высоких порядков, что определяет максимальную погрешность, не превосходящую 3 % при $\tau = 1$. Значения постоянных A и λ определяются конкретными граничными условиями.

Заметим, что при $\lambda = 0$ функция $\sin\frac{\theta}{2}$ монотонно возрастающая, а при $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, если $\frac{1}{3} < \tau_0 \le \tau \le 1$, функция $\left(1 - \frac{1}{4}\tau\right) \Big/ \tau^{1/4}$ монотонно убывающая. Функция (25) может быть использована при решении граничной задачи свободного растекания бурного двухмерного в плане потенциального открытого водного потока, так как $\psi(\tau,\theta)$ может быть постоянной вдоль линии тока.

Заключение. В настоящей работе было найдено аналитическое условие сведения уравнения, описывающего процесс течения потенциального двухмерного в плане водного потока в плоскости годографа скорости к гипергеометрическому уравнению с действительными коэффициентами. Это позволяет расширить спектр возможных частных решений отмеченного уравнения и развить далее в целом теорию аналитического решения различных граничных задач по течению двухмерных в плане потенциальных водных потоков.

Результаты, полученные в работе, позволят исследователям в области двухмерных потенциальных потоков пользоваться общими обобщёнными методами поиска аналитических решений системы уравнений движения потенциального потока в плоскости годографа скорости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Емцев, Б. Т.** Двухмерные бурные потоки / Б. Т. Емцев. – М. : Энергия, 1967. – 212 с.

2 **Высоцкий, Л. И.** Управление бурными потоками на водосбросах / Л. И. Высоцкий. – М. : Энергия, 1990. – 280 с.

3 Моделирование одномерных и двухмерных открытых водных потоков / В. Н. Коханенко [и др.]. – Ростов н/Д : Изд-во ЮФУ, 2007. – 168 с.

4 Моделирование бурных двухмерных в плане водных потоков / В. Н. Коханенко [и др.]. – Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2013. – 179 с.

5 **Ширяев, В. В.** Развитие теории двухмерных открытых водных потоков / В. В. Ширяев, М. Ф. Мицик, Е. В. Дуванская. – Шахты : Изд-во ЮРГУЭС, 2007. – 132 с.

6 Решение задачи свободного растекания потока за безнапорными водопропускными отверстиями / В. Н. Коханенко [и др.] // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естественные науки. – 2017. – № 2. – С. 15–25.

7 **Корн, Г.** Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1970. – 720 с.

D. B. KELEKHSAEV[1], A. I. KONDRATENKO[2], N. V. KOSICHENKO[1]
[1]Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI), Novocherkassk, Russia
[2]Russian State Agrarian University – Moscow Timiryazev Agricultural Academy, Moscow, Russia

METHOD OF ANALYTICAL SOLUTIONS SEARCHING FOR MOVEMENT EQUATIONS FOR A TWO-DIMENSIONAL IN PLAN ROUGH WATER FLOW SYSTEM IN THE SPEED HYDOGRAPH PLANE

There is considered a method of analytical solutions searching for a system of potential water flows two-dimensional in plan by separation of variables. There were investigated in details cases when the parameter ω considered during the solution process lies in the range from zero to one; this allows to expand the spectrum of the phenomena under consideration and to increase the possibilities of solving various applied problems on the flow of potential flows two-dimensional in plan.

Получено 27.05.2018