

УДК 539.3

А. С. ЗЕЛЕНАЯ

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь***ТЕРМОУПРУГИЙ ИЗГИБ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СЖИМАЕМОМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ**

Исследован изгиб несимметричных по толщине упругих трехслойных пластин со сжимаемым наполнителем при воздействии температуры. Кинематические гипотезы основаны на гипотезе ломаной линии: для внешних слоев принимаются гипотезы Кирхгофа, в жестком сжимаемом наполнителе деформированная нормаль остается прямолинейной. Получена система уравнений равновесия и ее аналитическое решение в перемещениях. Проведена численная реализация решения для трехслойной металлополимерной пластины.

Ключевые слова: термоупругий изгиб, трехслойная пластина, сжимаемый наполнитель.

Введение. На сегодняшний день в строительстве и промышленности особое внимание уделяется многослойным конструкциям, частным случаем которых являются трехслойные элементы конструкций. Трехслойные элементы обладают повышенной жесткостью при изгибе, обладая минимальными весовыми показателями. Однако современные изделия помимо силовых воздействий подвергаются и действию температуры. Практика эксплуатации трехслойных пакетов показала высокую эффективность таких конструкций, а в связи с этим возрастает необходимость разработки новых методов их расчета.

В монографии [1] исследовано деформирование трехслойных стержней в терморadiационных полях. Статьи [2–4] посвящены исследованию пластин и стержней при воздействии температуры. Колебания трехслойных стержней и пластин под действием нагрузок рассмотрены в статьях [5–7]. Изгиб трехслойного стержня на упругом основании рассмотрен в работе [8]. Данная работа посвящена постановке и решению задачи об изгибе термоупругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем.

Постановка задачи. Рассматривается несимметричная по толщине упругая трехслойная прямоугольная пластина, состоящая из двух несущих слоев и сжимаемого наполнителя. Для изотропных несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа. В жестком наполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты z . На границах контакта перемещения непрерывны. Материалы несущих слоев несжимаемы в поперечном и продольном направлении, в наполнителе учитывается обжатие. Деформации малые. Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью наполнителя (рису-

нок 1). Предположим, что в начальный момент времени на трехслойную пластину со сжимаемым наполнителем, находящуюся в естественном состоянии, начинают действовать внешняя распределенная нагрузка q , проекции которой на координатные оси: $q(x, y)$, $p_x(x, y)$, $p_y(x, y)$, и тепловой поток интенсивностью q_t , направленный перпендикулярно первому несущему слою.

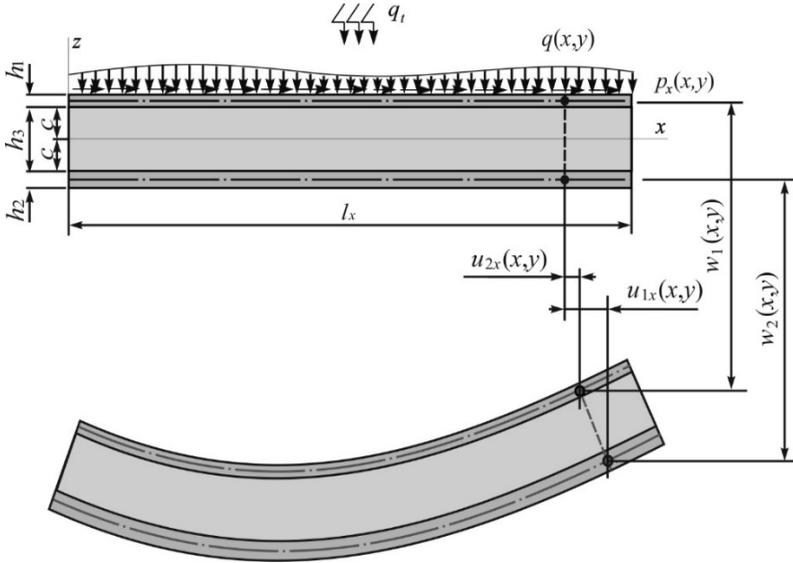


Рисунок 1 – Расчетная схема пластины

За искомые функции принимаем продольные перемещения $u_{kx}(x, y)$, $u_{ky}(x, y)$ и прогибы $w_k(x, y)$ срединных поверхностей несущих слоев ($k = 1, 2$).

Продольные перемещения $u^{(k)}(x, y, z)$ и прогибы $w^{(k)}(x, y, z)$ в слоях представим через искомые функции $w_1(x, y)$, $w_2(x, y)$, $u_{1x}(x, y)$, $u_{1y}(x, y)$, $u_{2x}(x, y)$, $u_{2y}(x, y)$ следующими соотношениями ($k = 1, 2, 3$):

– первый несущий слой ($c \leq z \leq c + h_1$)

$$u_x^{(1)} = u_{1x} - \left(z - c - \frac{h_1}{2} \right) w_{1,x}, \quad w^{(1)} = w_1, \quad u_y^{(1)} = u_{1y} - \left(z - c - \frac{h_1}{2} \right) w_{1,y};$$

– второй несущий слой ($-c - h_2 \leq z \leq -c$)

$$u_x^{(2)} = u_{2x} - \left(z + c + \frac{h_2}{2} \right) w_{2,x}, \quad w^{(2)} = w_2, \quad u_y^{(2)} = u_{2y} - \left(z + c + \frac{h_2}{2} \right) w_{2,y};$$

– наполнитель ($-c \leq z \leq c$)

$$\begin{aligned}
u_x^{(3)} &= \left(1 + \frac{z}{c}\right) \left(\frac{1}{2}u_{1x} + \frac{h_1}{4}w_{1,x}\right) + \left(1 - \frac{z}{c}\right) \left(\frac{1}{2}u_{2x} - \frac{h_2}{4}w_{2,x}\right), \\
u_y^{(3)} &= \left(1 + \frac{z}{c}\right) \left(\frac{1}{2}u_{1y} + \frac{h_1}{4}w_{1,y}\right) + \left(1 - \frac{z}{c}\right) \left(\frac{1}{2}u_{2y} - \frac{h_2}{4}w_{2,y}\right), \\
w^{(3)} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{c}\right) w_1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{c}\right) w_2,
\end{aligned} \tag{1}$$

где z – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной линии заполнителя.

Уравнения равновесия рассматриваемой трехслойной пластины получим, используя вариационный принцип Лагранжа

$$\delta A = \delta W, \tag{2}$$

где δA , δW – вариации работы внешней и внутренней сил.

Вариация работы внешней поверхностной нагрузки

$$\delta A = \iint_S (p_x (\delta u_{1x} - \frac{h_1}{2} \delta w_{1,x}) + p_y (\delta u_{1y} - \frac{h_1}{2} \delta w_{1,y}) + q \delta w_1) dx dy. \tag{3}$$

Вариация работы внутренних сил упругости

$$\begin{aligned}
\delta W &= \iint_S \left\{ \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (\sigma_{xx}^{(k)} \delta \epsilon_{xx}^{(k)} + \sigma_{yy}^{(k)} \delta \epsilon_{yy}^{(k)} + 2\sigma_{xy}^{(k)} \delta \epsilon_{xy}^{(k)}) dz + \right. \\
&\quad \left. + 2 \int_{h_3} (\sigma_{xz}^{(3)} \delta \epsilon_{xz}^{(3)} + \sigma_{yz}^{(3)} \delta \epsilon_{yz}^{(3)} + \sigma_{zz}^{(3)} \delta \epsilon_{zz}^{(3)}) dz \right\} dx dy.
\end{aligned} \tag{4}$$

Для термоупругой пластины используем соотношения закона Гука в девиаторно-сферовой форме, которые при учете температурного поля принимают вид

$$s_{ij}^{(k)} = 2G_k(T_k) \vartheta_{ij}^{(k)}, \tag{5}$$

$$\sigma^{(k)} = 3K_k(T_k) (\epsilon^{(k)} - \alpha_{0k} \Delta T_k) \quad (i, j = x, y, z, k = 1, 2, 3),$$

где $G_k(T_k)$, $K_k(T_k)$ – температурно-зависимые модули упругости материала k -го слоя; α_{0k} – коэффициент линейного температурного удлинения; ΔT_k – приращение температуры, отсчитываемое от некоторого начального значения T_0 .

Компоненты тензора напряжений с учетом (5) ($i, j = x, y, z$):

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{(k)} &= \sigma_{ij}^{(k)0} - \sigma_{ij}^{(k)T}, \quad \sigma_{ij}^{(k)0} = 2G_k(T_k) \vartheta_{ij}^{(k)} + 3K_k(T_k) \epsilon^{(k)} \delta_{ij}, \\
\sigma_{ij}^{(k)T} &= 3K_k(T_k) \alpha_{0k} \Delta T_k.
\end{aligned} \tag{6}$$

Входящие в (6) линейные (с индексом «0») и температурные (с индексом «t») составляющие внутренних усилий вычисляются через напряжения и деформации.

Выразим искомые функции u_{1x} , u_{1y} , u_{2x} , u_{2y} , w_1 , w_2 с помощью (5), (6) и подставим в (2) с учетом (3), (4). Учитываем, что температура изменяется только по толщине пластины $T_z = T_z(z)$ и поле стационарно. После необходимых преобразований получим систему нелинейных дифференциальных уравнений в перемещениях:

$$\begin{aligned}
 & a_1 u_{1x} - a_1 u_{2x} - a_4 u_{1x,xx} - a_5 u_{2x,xx} - a_{19} u_{1x,yy} - a_{18} u_{2x,yy} - a_{21} u_{1y,xy} - a_{23} u_{2y,xy} + a_2 w_{1,x} + \\
 & + a_3 w_{2,x} - 2a_{24} w_{1,xyy} + a_{25} w_{2,xyy} - 2a_{29} w_{1,xxx} + a_7 w_{2,xxx} = p_x, \\
 & -a_1 u_{1x} + a_1 u_{2x} - a_5 u_{1x,xx} - a_9 u_{2x,xx} - a_{18} u_{1x,yy} - a_{20} u_{2x,yy} - a_{23} u_{1y,xy} - a_{22} u_{2y,xy} - a_{10} w_{1,x} - \\
 & - a_{17} w_{2,x} - a_{24} w_{1,xyy} + 2a_{25} w_{2,xyy} - a_6 w_{1,xxx} + 2a_{30} w_{2,xxx} = 0, \\
 & a_1 u_{1y} - a_1 u_{2y} - a_4 u_{1y,yy} - a_5 u_{2y,yy} - a_{19} u_{1y,xx} - a_{18} u_{2y,xx} - a_{21} u_{1x,xy} - a_{23} u_{2x,xy} + a_2 w_{1,y} + \\
 & + a_3 w_{2,y} - 2a_{24} w_{1,xyy} + a_{25} w_{2,xyy} - 2a_{29} w_{1,yyy} + a_7 w_{2,yyy} = p_y, \\
 & -a_1 u_{1y} + a_1 u_{2y} - a_5 u_{1y,yy} - a_9 u_{2y,yy} - a_{18} u_{1y,xx} - a_{20} u_{2y,xx} - a_{23} u_{1x,xy} - a_{22} u_{2x,xy} - a_{10} w_{1,y} - \\
 & - a_{17} w_{2,y} - a_{24} w_{1,xyy} + 2a_{25} w_{2,xyy} - a_6 w_{1,yyy} + 2a_{30} w_{2,yyy} = 0, \\
 & -a_2 u_{1x,x} - a_2 u_{1y,y} + a_{10} u_{2x,x} + a_{10} u_{2y,y} + 2a_{29} u_{1x,xxx} + a_6 u_{2x,xxx} + 2a_{29} u_{1y,yyy} + a_6 u_{2y,yyy} + \\
 & + 2a_{24} u_{1x,xyy} + a_{24} u_{2x,xyy} + 2a_{24} u_{1y,xyy} + a_{24} u_{2y,xyy} + a_{11} w_{1,xxx} + a_{11} w_{1,yyy} - a_{12} w_{2,xxx} - \\
 & - a_{12} w_{2,yyy} + a_{15} w_{1,xxxx} + a_{15} w_{1,yyyy} - a_{16} w_{2,xxx} - a_{16} w_{2,yyy} + a_{26} w_{1,xyy} - a_{28} w_{2,xyy} + \\
 & + a_8 w_1 - a_8 w_2 = q + 0,5(p_{x,x} h_1) + 0,5(p_{y,y} h_1) + q_t, \\
 & -a_3 u_{1y,y} - a_3 u_{1x,x} + a_{17} u_{2y,y} + a_{17} u_{2x,x} - a_7 u_{1y,yyy} - a_7 u_{1x,xxx} - 2a_{30} u_{2y,yyy} - 2a_{30} u_{2x,xxx} - \\
 & - 2a_{25} u_{2y,xyy} - a_{25} u_{1y,xyy} - 2a_{25} u_{2x,xyy} - a_{25} u_{1x,xyy} - a_{12} w_{1,xx} - a_{12} w_{1,yy} + a_{14} w_{2,xx} + a_{14} w_{2,yy} + \\
 & - a_{16} w_{1,xxxx} - a_{16} w_{1,yyyy} + a_{13} w_{2,xxxx} + a_{13} w_{2,yyyy} - a_{28} w_{1,xyy} + a_{27} w_{2,xyy} - \\
 & - a_8 w_1 + a_8 w_2 = g_t,
 \end{aligned} \tag{7}$$

где $q_t = H_2^t$, $g_t = -H_2^t$ – температурные составляющие, представленные в виде дополнительных «внешних» нагрузок, $H_2^t = N_{zz}^{(3)t} / 2c$ – температурные составляющие обобщенных усилий; a_1, \dots, a_{30} – коэффициенты, учитывающие температурное изменение параметров упругости материалов по толщине пластины.

Краевая задача (7) замыкается добавлением граничных условий. Примем кинематические условия свободного опирания рассматриваемой пластины по торцам на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Получим граничные условия в перемещениях ($k = 1, 2$):

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0, l_x \quad u_{kx, x} = u_{ky} = w_k = w_{k, xz} = 0; \\ \text{при } y = 0, l_y \quad u_{ky, y} = u_{kx} = w_k = w_{k, yz} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Решение системы дифференциальных уравнений (7) будем искать методом Бубнова – Галеркина в виде разложения в тригонометрические ряды, которые автоматически удовлетворяют граничным условиям опирания на жесткие опоры (8):

$$\begin{aligned} u_{1x} &= \sum_{p,m=0}^{\infty} U_{1xpm} \cos \frac{\pi px}{l_x} \sin \frac{\pi my}{l_y}, \quad u_{2x} = \sum_{p,m=0}^{\infty} U_{2xpm} \cos \frac{\pi px}{l_x} \sin \frac{\pi my}{l_y}, \\ u_{1y} &= \sum_{p,m=0}^{\infty} U_{1ypm} \sin \frac{\pi px}{l_x} \cos \frac{\pi my}{l_y}, \quad u_{2y} = \sum_{p,m=0}^{\infty} U_{2ypm} \sin \frac{\pi px}{l_x} \cos \frac{\pi my}{l_y}, \\ w_1 &= \sum_{p,m=0}^{\infty} W_{1pm} \sin \frac{\pi px}{l_x} \sin \frac{\pi my}{l_y}, \quad w_2 = \sum_{p,m=0}^{\infty} W_{2pm} \sin \frac{\pi px}{l_x} \sin \frac{\pi my}{l_y}, \end{aligned} \quad (9)$$

где U_{1xpm} , U_{2xpm} , U_{1ypm} , U_{2ypm} , W_{1pm} , W_{2pm} – искомые амплитуды перемещений прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем.

Поперечную нагрузку и температурные составляющие в слоях пластины представим в виде разложения в следующие тригонометрические ряды:

$$\begin{aligned} q &= \sum_{p,m=0}^{\infty} q_{pm} \sin \frac{\pi px}{l_x} \sin \frac{\pi my}{l_y}, \quad q_{pm} = \frac{4}{l_x l_y} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} q(x, y) \sin \frac{\pi px}{l_x} \sin \frac{\pi my}{l_y} dx dy, \\ q_t &= \sum_{p,m=0}^{\infty} q_{tpm} \sin \frac{\pi px}{l_x} \sin \frac{\pi my}{l_y}, \quad q_{tpm} = \frac{4}{l_x l_y} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} q_t(x, y) \sin \frac{\pi px}{l_x} \sin \frac{\pi my}{l_y} dx dy, \\ g_t &= \sum_{p,m=0}^{\infty} g_{tpm} \sin \frac{\pi px}{l_x} \sin \frac{\pi my}{l_y}, \quad g_{tpm} = \frac{4}{l_x l_y} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} g_t(x, y) \sin \frac{\pi px}{l_x} \sin \frac{\pi my}{l_y} dx dy. \end{aligned} \quad (10)$$

После подстановки перемещений (9), нагрузок и дополнительных температурных составляющих (10) в систему уравнений равновесия (7) получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для нахождения искомых амплитуд перемещений U_{1xpm} , U_{2xpm} , U_{1ypm} , U_{2ypm} , W_{1pm} , W_{2pm} :

$$\begin{aligned} b_1 U_{1xpm} + b_2 U_{2xpm} + b_{11} U_{1ypm} + b_{12} U_{2ypm} + b_3 W_{1pm} + b_4 W_{2pm} &= 0, \\ b_2 U_{1xpm} + b_3 U_{2xpm} + b_{12} U_{1ypm} + b_{13} U_{2ypm} + b_6 W_{1pm} + b_7 W_{2pm} &= 0, \\ b_{11} U_{1xpm} + b_{12} U_{2xpm} + b_{14} U_{1ypm} + b_{15} U_{2ypm} + b_{16} W_{1pm} + b_{17} W_{2pm} &= 0, \\ b_{12} U_{1xpm} + b_{13} U_{2xpm} + b_{15} U_{1ypm} + b_{18} U_{2ypm} + b_{19} W_{1pm} + b_{20} W_{2pm} &= 0, \\ b_3 U_{1xpm} + b_6 U_{2xpm} + b_{16} U_{1ypm} + b_{19} U_{2ypm} + b_8 W_{1pm} + b_9 W_{2pm} &= q_{pm} + q_t, \\ b_4 U_{1xpm} + b_7 U_{2xpm} + b_{17} U_{1ypm} + b_{20} U_{2ypm} + b_9 W_{1pm} + b_{10} W_{2pm} &= g_t, \end{aligned} \quad (11)$$

где коэффициенты b_i введены в [7].

Численный параметрический анализ. Численные расчеты проводились для трехслойной пластины, пакет которой составлен из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т, толщины слоев $h_1 = 0,04$ м, $h_2 = 0,02$ м, $h_3 = 0,2$ м. Нагрузка интенсивностью $q = -2$ МПа равномерно распределена по всей поверхности пластины, размеры пластины $l_x = 1$ м, $l_y = 1$ м. При определении влияния температуры на упругие характеристики материала несущих слоев принималась формула Белла. Для рассматриваемой пластины теплотой, ушедшей на нагревание внешнего металлического слоя, пренебрегаем, так как слой достаточно тонкий и обладает малой теплоемкостью. Температура этого слоя принимается равной температуре заполнителя в месте склейки, т. е. $T_1 = T_3(c, t)$. Вся теплота, воспринимаемая пластиной за время t , идет на нагревание заполнителя. Температура второго несущего слоя также не изменяется по толщине и принимается равной температуре заполнителя в месте их склейки $T_2 = T_3(-c, t)$.

На рисунке 2 показано расчетное изменение температуры по толщине заполнителя и первого слоя при интенсивности теплового потока $q_t = 5000$ Дж/(м²·с). Номера кривых соответствуют различным моментам времени t_n действия теплового потока. Межвременной интервал составляет 10 минут, $t_7 = 0$. В момент времени $t_1 = 60$ мин, $T_1 = 597$ К, что соответствует достаточному разогреву первого слоя, но меньше температуры плавления фторопласта, которая составляет 600 К.

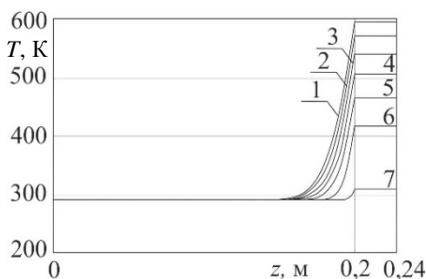


Рисунок 2 – Изменение температуры по толщине заполнителя и первого несущего слоя

Далее рассмотрим влияние температуры на прогибы и продольные перемещения в несущих слоях, которые представлены на рисунке 3 а, б. Здесь 1, 2 – упругие перемещения первого и второго несущих слоев вдоль пластины соответственно, 3, 4 – соответствующие термоупругие перемещения в несущих слоях.

Очевидно, что температурное воздействие на пластину приводит к увеличению максимальных прогибов обоих несущих слоев: на 6 % – первого несущего слоя, на 6,5 % – второго несущего слоя. Продольные перемещения

в первом несущем слое увеличиваются подобным образом, а во втором несущем слое они практически не изменяются, так как температура этого слоя остается постоянной.

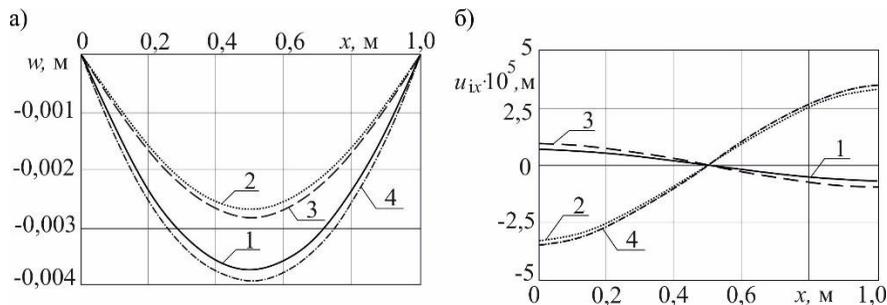


Рисунок 3 – Перемещения в несущих слоях термоупругой пластины

На рисунке 4 представлено изменение поперечной деформации ϵ_{zz} в заполнителе вдоль пластины. Из полученных графиков видно, что воздействие температуры приводит к увеличению деформации обжатия в заполнителе пластины.

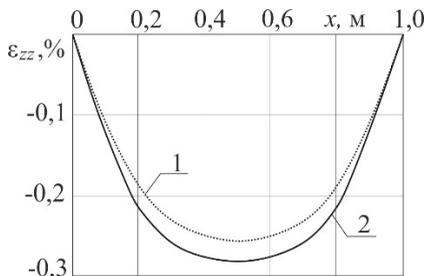


Рисунок 4 – Относительная деформация термоупругой пластины:
1 – упругая пластина; 2 – термоупругая пластина

Заключение. Полученное в работе решение можно использовать для исследования изгиба термоупругой трёхслойной прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем при действии температурных и силовых нагрузок.

Работа выполнена в рамках ГПНИ «Механика, металлургия, диагностика в машиностроении» (задание № 1.40).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Старовойтов, Э. И. Трёхслойные стержни в терморadiационных полях / Э. И. Старовойтов, М. А. Журавков, Д. В. Леоненко. – Минск : Беларуская навука, 2017. – 275 с.

2 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // *Механика машин, механизмов и материалов*. – 2013. – № 1 (22). – С. 31–35.

3 **Старовойтов, Э. И.** Цилиндрический изгиб прямоугольной трехслойной пластины в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // *Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки: междунар. сб. науч. тр.* – Гомель : БелГУТ, 2014. – Вып. 8. – С. 179–185.

4 **Starovoitov, E. I.** Impact of thermal and ionizing radiation on a circular sandwich plate on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // *International Applied Mechanics*. – 2011. – Vol. 47, № 5. – P. 580–589.

5 **Леоненко, Д. В.** Колебания трехслойного стержня под действием импульсных нагрузок различных форм / Д. В. Леоненко // *Материалы, технологии, инструменты*. – 2004. – Т. 9, № 2. – С. 23–27.

6 **Леоненко, Д. В.** Вынужденные колебания трехслойного стержня на упругом безынерционном основании / Д. В. Леоненко // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. – 2007. – № 3. – С. 70–74.

7 **Starovoitov, É. I.** Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads / É. I. Starovoitov, A. V. Yarovaya, D. V. Leonenko // *Strength of materials*. – 2003. – Vol. 35, № 4. – P. 346–352.

8 **Starovoitov, É. I.** Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation / É. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // *International Applied Mechanics*. – 2007. – Vol. 43, № 4. – P. 451–459.

9 **Зеленая, А. С.** Напряженно-деформированное состояние упругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем / А. С. Зеленая // *Механика. Исследования и инновации : междунар. сб. науч. тр.* – Гомель : БелГУТ, 2017. – Вып. 10. – С. 67–74.

A. S. ZELENAYA

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

THERMAL-ELASTIC BENDING OF A THREE-LAYER RECTANGULAR PLATE WITH A COMPRESSIBLE FILLER

There was investigated the bending of elastic asymmetrical in thickness three-layer plates with compressible filler under the effect of temperature. Kinematic hypotheses are based on the broken line hypothesis: Kirchhoff's hypotheses are accepted for the outer layers, and the deformed normal remains rectilinear in a rigid compressible filler. The equilibrium equations system and its analytical solution in displacements are obtained. A numerical implementation of the solution for a three-layer metal-polymer plate was performed.

Получено 14.05.2018