

УДК 534.121.1

*Ю. В. ГРОМЫКО**Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь***КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ  
С ОТВЕРСТИЕМ ПРИ РЕЗОНАНСЕ**

Рассмотрены осесимметричные колебания упругой трехслойной круговой пластины с отверстием при резонансных нагрузках. При описании деформирования несимметричной по толщине трехслойной пластины приняты гипотезы ломаной линии: для тонких несущих слоев справедливы гипотезы Кирхгофа; в несжимаемом по толщине легком наполнителе выполняется гипотеза Тимошенко. Аналитическое решение задачи получено в виде разложения в ряд по собственным функциям. Проведен численный анализ влияния частоты вынуждающих сил на амплитуды колебаний.

**Ключевые слова:** трехслойная кольцевая пластина, упругость, собственные функции, резонанс.

**Введение.** Деформированию и колебаниям слоистых элементов конструкций посвящены многочисленные исследования. В монографиях [1, 2] рассмотрены постановки и методы решения различных динамических начально-краевых задач. Свободные и вынужденные колебания трехслойных стержней и сплошных пластин исследовались в работах [3–9], где построены системы собственных фундаментальных функций, исследован спектр собственных частот, получены решения задач для нагрузок различного вида. Деформирование слоистых упругопластических систем при циклических квазистатических нагрузках рассмотрено в статьях [10–15]. Особенности, связанные с резонансами, возникающими при колебаниях сплошных трехслойных пластин, изучались в [16–18]. Некоторые задачи о колебаниях кольцевой трехслойной пластины рассмотрены в работах [19, 20].

При расчете элементов конструкций, находящихся под действием периодических внешних нагрузок, часто важнейшей из задач является отстройка от резонанса. Это достигается обеспечением достаточного различия между частотой возмущающей силы  $\varphi$  и частотой основного тона собственных колебаний  $\omega_0$ . Однако при  $\omega > \omega_0$  возможно совпадение частоты нагрузки с одной из более высоких частот собственных колебаний  $\omega = \omega_k$ . Подобный случай может представлять угрозу для прочности конструкции. Цель представленной работы – анализ поперечных колебаний упругой кольцевой трехслойной металлополимерной пластины под действием гармонических резонансных нагрузок, то есть нагрузок, частота которых совпадает с одной из собственных частот колебаний системы  $\omega_n$ .

**Постановка задачи.** Рассматриваются осесимметричные вынужденные колебания несимметричной по толщине упругой трехслойной пластины кру-

говой формы с центральным отверстием (рисунок 1). Постановка задачи и ее решение проводится в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ . Срединная плоскость заполнителя принимается за координатную. Для внешних несущих слоев ( $h_1 \neq h_2$ ) принимаются гипотезы Кирхгофа, для легкого заполнителя ( $h_3 = 2c$ ) – гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. Тангенциальные напряжения в заполнителе не учитываются.

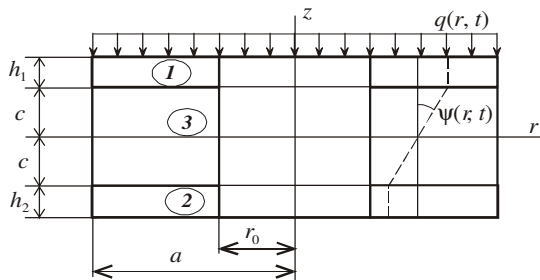


Рисунок 1 – Расчетная схема трехслойной кольцевой пластины

Внешняя вертикальная нагрузка не зависит от окружной координаты  $\varphi$ :  $q = q(r, t)$ . На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. В силу симметрии задачи тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют  $u_\varphi^k = 0$ , а прогиб пластины  $w$ , относительный сдвиг в заполнителе  $\psi$  и радиальное перемещение координатной поверхности  $u$  не зависят от координаты  $\varphi$  ( $k$  – номер слоя). В дальнейшем эти функции считаем искомыми. Все перемещения и линейные размеры пластинки отнесены к ее радиусу  $a$ .

Радиальные перемещения в слоях связаны с тремя искомыми функциями  $w(r, t)$ ,  $u(r, t)$ ,  $\psi(r, t)$  следующими соотношениями:

– для несущих слоев 1, 2

$$u_r^{(1)} = u + c\psi - zw_{,r}, \quad (c \leq z \leq c + h);$$

$$u_r^{(2)} = u - c\psi - zw_{,r}, \quad (-c - h \leq z \leq -c);$$

– для заполнителя 3

$$u_r^{(3)} = u + z\psi - zw_{,r}, \quad (-c \leq z \leq c), \quad (1)$$

где  $h_k$  – толщина  $k$ -го слоя; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

В работах [19, 20] для подобной пластины вариационными методами получена система дифференциальных уравнений в частных производных, которая будет справедлива и в рассматриваемом случае

$$L_2(a_1u + a_2\psi - a_3w_{,r}) = 0,$$

$$L_2(a_2u + a_4\psi - a_5w_{,r}) = 0,$$

$$L_3(a_3u + a_5\psi - a_6w_{,r}) - M_0\dot{w} = -q, \quad (2)$$

где  $M_0 = \pi(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3)(a^2 - r_0^2)$ ,  $\rho_k$  – плотность материала  $k$ -го слоя;  $a$ ,  $r_0$  – внешний и внутренний радиусы пластины; коэффициенты  $a_i$  и дифференциальные операторы  $L_2$  (оператор Бесселя),  $L_3$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), \\ a_3 &= h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ - h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^+, \quad a_4 = c^2 (h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+, \\ a_5 &= c \left[ h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ + h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right], \\ a_6 &= h_1 \left( c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_1^+ + h_2 \left( c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+, \\ K_k^+ &= K_k + \frac{4}{3} G_k, \quad L_2(g) = \frac{1}{r} ((rg)_{,r})_{,r}, \quad L_3(g) = \frac{1}{r} (r L_2(g))_{,r}. \end{aligned}$$

Задача определения функций  $u(r, t)$ ,  $\psi(r, t)$ ,  $w(r, t)$  замыкается присоединением к (2) граничных и начальных условий

$$w(r, 0) \equiv f(r), \quad \dot{w}(r, 0) \equiv g(r). \quad (3)$$

**Решение начально-краевой задачи.** Искомый прогиб принимается в виде

$$w(r, t) = v(r)(A \cos \omega t + B \sin \omega t), \quad (4)$$

где  $v(r)$  – неизвестная функция координаты  $r$ ;  $\omega$  – частота собственных колебаний рассматриваемой кольцевой пластины;  $A, B$  – константы интегрирования, определяемые из начальных условий (3).

Подставив выражение (4) в последнее из уравнений системы (2), после некоторых преобразований получим уравнение для определения функции  $v(r)$

$$v_{,rrrr} + \frac{2}{r} v_{,rrr} - \frac{1}{r^2} v_{,rr} + \frac{1}{r^3} v_{,r} - \beta^4 v = 0, \quad \beta^4 = M_0^4 \omega^2. \quad (5)$$

Решение уравнения (5) можно представить в виде [20]

$$v(r) = C_1 J_0(\beta r) + C_2 I_0(\beta r) + C_3 Y_0(\beta r) + C_4 K_0(\beta r),$$

где  $J_0, Y_0$  – функции Бесселя нулевого порядка первого и второго рода, соответственно;  $I_0, K_0$  – модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда нулевых порядков;  $C_1, \dots, C_4$  – константы интегрирования, определяемые из граничных условий на внешнем и внутреннем контурах.

В общем случае для описания прогиба при вынужденных колебаниях кольцевой трехслойной пластины, заземленной на обоих контурах, вводится система собственных ортонормированных функций  $v_n \equiv v(\beta_n, r)$ :

$$v_n \equiv \frac{1}{d_n} [J_0(\beta_n r) + k_{1n} I_0(\beta_n r) + k_{2n} Y_0(\beta_n r) + k_{3n} K_0(\beta_n r)] , \quad (6)$$

где

$$k_{1n} = \frac{1}{D} [J_0(\beta_n r_0) [Y_0(\beta_n) K_1(\beta_n) - K_0(\beta_n) Y_1(\beta_n)] + K_0(\beta_n r_0) [J_0(\beta_n) Y_1(\beta_n) - Y_0(\beta_n) J_1(\beta_n)] + Y_0(\beta_n r_0) [K_0(\beta_n) J_1(\beta_n) - J_0(\beta_n) K_1(\beta_n)]] ;$$

$$k_{2n} = \frac{1}{D} [I_0(\beta_n r_0) [J_0(\beta_n) K_1(\beta_n) - K_0(\beta_n) J_1(\beta_n)] + K_0(\beta_n r_0) [J_0(\beta_n) I_1(\beta_n) + I_0(\beta_n) J_1(\beta_n)] - J_0(\beta_n r_0) [I_0(\beta_n) K_1(\beta_n) + K_0(\beta_n) I_1(\beta_n)]] ;$$

$$k_{3n} = \frac{1}{D} [I_0(\beta_n r_0) [Y_0(\beta_n) J_1(\beta_n) - J_0(\beta_n) Y_1(\beta_n)] - Y_0(\beta_n r_0) [J_0(\beta_n) I_1(\beta_n) + I_0(\beta_n) J_1(\beta_n)] + J_0(\beta_n r_0) [Y_0(\beta_n) I_1(\beta_n) + I_0(\beta_n) Y_1(\beta_n)]] ;$$

$$D = I_0(\beta_n r_0) [K_0(\beta_n) Y_1(\beta_n) - Y_0(\beta_n) K_1(\beta_n)] + Y_0(\beta_n r_0) [I_0(\beta_n) K_1(\beta_n) + K_0(\beta_n) I_1(\beta_n)] - K_0(\beta_n r_0) [Y_0(\beta_n) I_1(\beta_n) + I_0(\beta_n) Y_1(\beta_n)] ,$$

а константы  $d_n$  определяются из требования нормировки:

$$d_n^2 = \int_{r_0}^1 [J_0(\beta_n r) + k_1 I_0(\beta_n r) + k_2 Y_0(\beta_n r) + k_3 K_0(\beta_n r)]^2 r dr .$$

Искомое решение  $u(r, t)$ ,  $\psi(r, t)$  и  $w(r, t)$  и внешняя нагрузка  $q(r, t)$  представляются в виде разложений в ряд по системам (6) фундаментальных собственных ортонормированных функций  $v_n \equiv v(\beta_n, r)$ :

$$u(r, t) = b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n T_n(t) ; \quad \psi(r, t) = b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n T_n(t) ; \quad w(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t) ;$$

$$q(r, t) = M_0 \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t) ; \quad q_n(t) = \frac{1}{M_0} \int_{r_0}^1 q(r, t) v_n r dr . \quad (7)$$

Уравнение для определения неизвестной функции  $T_n(t)$  будет

$$\ddot{T}_n + \omega_n^2 T_n = q_n . \quad (8)$$

Таким образом, радиальное перемещение, относительный сдвиг и прогибы в упругой кольцевой трехслойной пластине определяются формулами (7), где координатные функции  $v_n$  и  $\phi_n$  следуют из граничных условий, а функция времени  $T_n(t)$  из (8).

Рассмотрим действие на пластину гармонических резонансных нагрузок

$$q(r, t) = q_0 (D \cos(\omega_k t) + E \sin(\omega_k t)) , \quad (9)$$

где частота  $\omega_k$  совпадает с одной из собственных частот  $\omega_n$  колебаний трехслойной кольцевой пластины;  $t$  – время;  $q_0, D, E, k$  – const.

Коэффициенты разложения нагрузки (9) в ряд по собственным функциям  $v_n$

$$q_n(t) = \frac{1}{M_0} \int_{r_0}^1 q(r, t) v_n(\beta_n, r) r dr = D_n \cos(\omega_n t) + E_n \sin(\omega_n t); \quad (10)$$

$$D_n = \frac{Dq_0}{M_0} \int_{r_0}^1 v_n(\beta_n, r) r dr; \quad E_n = \frac{Eq_0}{M_0} \int_{r_0}^1 v_n(\beta_n, r) r dr.$$

Дифференциальное уравнение (8) для нахождения неизвестной функции времени  $T_n(t)$  с учетом (10) в рассматриваемом случае принимает вид

$$\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = D_n \cos(\omega_k t) + E_n \sin(\omega_k t). \quad (11)$$

Его решение будет

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) + y_n(t), \quad (12)$$

где частное решение уравнения (11)

$$y_n(t) = \begin{cases} \frac{D_n}{\omega_n^2 - \omega_k^2} \cos(\omega_k t) + \frac{E_n}{\omega_n^2 - \omega_k^2} \sin(\omega_k t), & n \neq k \\ -\frac{E_k}{2\omega_k} t \cos(\omega_k t) + \frac{D_k}{2\omega_k} t \sin(\omega_k t), & n = k \end{cases}.$$

Подставив в начальные условия (3) выражение для прогиба (7) с учетом (12) и ортонормированности системы  $v_n$ , получим

$$A_n = \int_{r_0}^1 f(r) v_n r dr - \begin{cases} \frac{D_n}{\omega_n^2 - \omega_k^2}, & n \neq k \\ 0, & n = k \end{cases}; \quad B_n = \frac{1}{\omega_n} \left[ \int_{r_0}^1 g(r) v_n r dr - \begin{cases} \frac{\omega_k E_n}{\omega_n^2 - \omega_k^2}, & n \neq k \\ -\frac{E_k}{2\omega_k}, & n = k \end{cases} \right] \quad (13)$$

Таким образом, вынужденные колебания кольцевой трехслойной пластины под действием резонансной нагрузки (8) описываются перемещениями (7), в которых функция времени и константы интегрирования определяются выражениями (12), (13). В дальнейшем начальные условия движения (3) предполагались нулевыми, что, в соответствии с (13), позволит упростить константы интегрирования  $A_n, B_n$ .

Численный счет проводился для пластины единичного радиуса, слои которой набраны из материалов Д16Т – фторопласт – Д16Т. Рассматривался случай, когда внешний и внутренний контуры жестко заделаны. Соотношение толщин слоев в пакете:  $h_3 = 20h_1 = 20h_2 = 0,1$  м. Амплитуда интенсивности поверхностной нагрузки  $q_0 = 50$  Па.

На рисунке 2 показано нарастание максимального прогиба во времени при резонансе по частотам:  $\omega_k = \omega_0$  (линия 1)  $\omega_k = \omega_2$  (линия 2). Расчеты показали, что при  $\omega_k = \omega_0$  сохраняется периодичность колебаний с частотой, близкой к  $\omega_0$ . Однако при совпадении частоты возмущающей силы с более высокими частотами периодичность отчетливо проявляется не всегда, хотя амплитуда колебаний продолжает нарастать. Причем чем с более высокой

собственной частотой совпадает частота возмущающей силы, тем меньше скорость нарастания амплитуды.

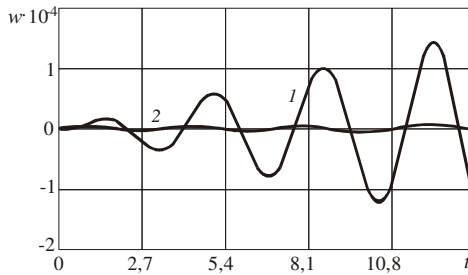


Рисунок 2 – Зависимости прогиба от времени при резонансе

На рисунке 3 показано изменение прогиба вдоль радиуса пластины при различных частотах резонансной нагрузки. Кривые на графиках соответствуют различным моментам времени:  $1 - t_0 = 2\pi + \pi / (4\omega_k)$ ;  $2 - t_1 = 4\pi + \pi / (4\omega_k)$ ;  $3 - t_2 = 6\pi + \pi / (4\omega_k)$ ;  $4 - t_3 = 8\pi + \pi / (4\omega_k)$ . При резонансе по частоте  $\omega_1$  (рисунок 3, б) меняется форма колебаний и появляется узловая окружность посередине кольца. Если резонанс имеет место по частоте  $\omega_2$ , то образуется две узловых окружности (рисунок 3, в). В случае резонанса по частоте  $\omega_3$  узловых окружностей будет три (рисунок 3, г).

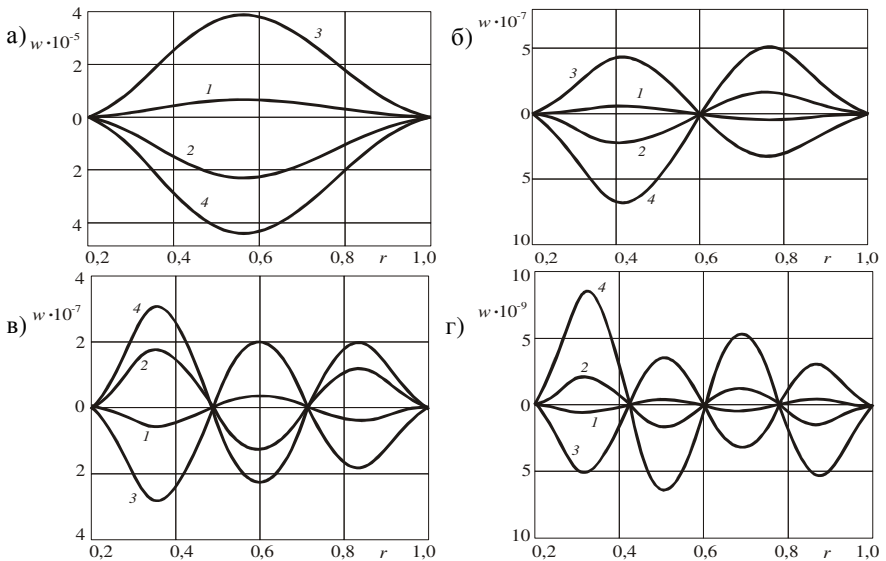


Рисунок 3 – Образование узловых окружностей при различных частотах резонансной нагрузки: (а) –  $\omega_k = \omega_0$ ; (б) –  $\omega_k = \omega_1$ ; (в) –  $\omega_k = \omega_2$ ; (г) –  $\omega_k = \omega_3$

Следует отметить, что резонансное поведение рассматриваемых кольцевых пластин хорошо соотносится с известными аналогичными результатами для сплошных круговых трехслойных пластин [1]. Однако нарастание амплитуды колебаний здесь происходит медленнее, особенно при резонансах по более высоким частотам.

**Заключение.** Результаты выполненных расчетов являются основой для практических инженерных рекомендаций при проектировании слоистых элементов конструкций, представляющих трехслойные кольцевые пластины, которые могут находиться под действием резонансных нагрузок.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Плескачевский, Ю. М.** Динамика металлополимерных систем / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – Минск : Бел. наука, 2004. – 386 с.

2 **Андреев, А. Н.** Многослойные анизотропные оболочки и пластины: изгиб, устойчивость, колебания / А. Н. Андреев, Ю. В. Немировский. – Новосибирск : Наука, 2001. – 288 с.

3 **Starovoitov, E. I.** Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // *Strength of Materials*. – 2003. – Vol. 35, No. 4. – P. 346–352.

4 **Starovoitov, É. I.** Vibrations of a sandwich rod under local and impulsive forces / É. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // *International Applied Mechanics*. – 2005. – Vol. 41, No. 7. – P. 809–816.

5 Natural vibrations of a sandwich beam on an elastic foundation / V. D. Kubenko [et al.] // *International Applied Mechanics*. – 2006. – Vol. 42, No. 5. – P. 541–547.

6 **Starovoitov, É. I.** Impact of thermal and ionizing radiation on a circular sandwich plate on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // *International Applied Mechanics*. – 2011. – Vol. 47, No. 5. – С. 580–589.

7 **Starovoitov, É. I.** Vibrations of circular sandwich plates connected with an elastic foundation / E. I. Starovoitov, V. D. Kubenko, D. V. Tarlakovskii // *Russian aeronautics*. – 2009. – Vol. 52, No. 2. – P. 151–157.

8 **Старовойтов, Э. И.** Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2015. – Т. 21, № 2. – С. 162–169.

9 **Starovoitov, É. I.** Dynamics of circular three-layer plates with elastic base under axisymmetric loading / É. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // *Strength of Materials*. – 2010. – Vol. 42, No. 3. – P. 322–330.

10 **Старовойтов, Э. И.** О переменном нагружении вязкопластических трехслойных пологих оболочек / Э. И. Старовойтов // *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*. – 1980. – № 2. – С. 92–96.

11 **Москвитин, В. В.** Деформация и переменные нагружения двухслойных металлополимерных пластин / В. В. Москвитин, Э. И. Старовойтов // *Механика композитных материалов*. – 1985. – № 3. – С. 409–416.

12 **Москвитин, В. В.** К исследованию напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагружениях / В. В. Москвитин, Э. И. Старовойтов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – № 1. – С. 116–121.

13 **Gorshkov, A. G.** Cyclic loading of elastic-plastic bodies in neutron flux / A. G. Gorshkov, E. I. Starovoitov, A. V. Yarovaya // Mechanics of Solids. – 2001. – Vol. 36, No 1. – P. 64–70.

14 **Старовойтов, Э. И.** Циклическое нагружение трехслойных стержней в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. М. Савицкий // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. – Серия физ.-мат. науки. – 2013. – № 2 (31). – С. 147–155.

15 **Старовойтов, Э. И.** Переменный изгиб трехслойного стержня со сжимаемым наполнителем в нейтронном потоке / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Изв. Саратов. ун-та. – Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2017. – Т. 17, Вып. 2. – С. 196–208.

16 **Starovoitov, É. I.** Vibration of circular sandwich plates under resonance loads / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. – Vol. 39, No. 12. – P. 1458–1463.

17 **Starovoitov, E. I.** Resonant effects of local loads on circular sandwich plates on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2010. – Vol. 46, No. 1. – P. 86–93.

18 **Starovoitov, E. I.** Resonance vibrations of circular composite plates on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, D. V. Tarlakovsky // Mechanics of Composite Materials. – 2015. – Vol. 51, No. 5. – P. 561–570.

19 **Громыко, Ю. В.** Тепловой удар по трехслойной кольцевой пластине / Ю. В. Громыко // Материалы, технологии, инструменты. – 2002. – Т. 7, № 2. – С. 19–24.

20 **Громыко, Ю. В.** О собственных частотах колебаний кольцевой трехслойной пластины / Ю. В. Громыко // Известия НАН Беларуси. – Сер. физ.-техн. наук. – 2007. – № 2. – С. 59–63.

*Yu. V. GROMYKO*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## **RESONANCE OSCILLATIONS OF RING THREE-LAYERED PLATE WITH A HOLE**

Axisymmetric oscillations of an elastic three-layer circular plate with a hole under resonant loads are considered. To describe the asymmetric in thickness three-layer plate deformation the hypotheses of the polyline are accepted: the Kirchhoff's hypotheses are right for the thin bearing layers, the Tymoshenko hypothesis is performed for the lightweight filler incompressible along its thickness. The analytical solution of the problem is obtained in the form of a series expansion by eigenfunctions. The numerical analysis of the influence of the driving forces frequency on the oscillations amplitude is carried out.

Получено 29.10.2018