

УДК 620.17

Д. А. ЧЕРНОУС

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

УТОЧНЕНИЕ РАСЧЕТНОЙ ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ

Предложен метод вычисления составляющей коэффициента трения качения, обусловленной гистерезисными потерями в вязкоупругом материале катящегося тела. В отличие от ранее используемых, данная методика подразумевает непосредственное интегрирование контактного давления по площадке контакта и позволяет учесть зависимость размеров этой площадки от скорости движения центра масс катящегося тела. Приведены примеры использования методики при анализе качения вязкоупругого шара и цилиндра по недеформируемой поверхности.

Ключевые слова: контактная задача, вязкоупругое деформирование, ядро релаксации, момент сопротивления качению, коэффициент трения качения.

Введение. Одной из классических задач механики контактного взаимодействия является определение сил и моментов, действующих со стороны опорной поверхности на катящееся по ней тело. Результаты решения данной задачи широко используются, в частности, при тяговых расчетах автомобильного и железнодорожного транспорта [1, 2]. К таким результатам, в частности, относится получение расчетной оценки момента сопротивления качению [3–5]. Среди многочисленных факторов, определяющих данный момент, в качестве наиболее значимых можно отметить:

1 наличие плоской контактной площадки и связанная с ней необходимость «перекатывания» катящегося тела [5];

2 гистерезисные потери в материалах контактирующих тел при циклическом нагружении в процессе качения [4].

Данные энергетические потери определяются, главным образом, внутренним трением в материале. Если рассматривается диапазон упругих деформаций, то внутреннее трение можно описывать в рамках моделей линейной вязкоупругости [6]. Для количественной оценки влияния вязкоупругих характеристик материала на момент сопротивления качению вводится коэффициент гистерезисных потерь. В первом приближении данный коэффициент рассматривается как характеристика материала и определяется экспериментально [3]. При более детальном описании качения вязкоупругих тел коэффициент гистерезисных потерь выражается через мнимую компоненту комплексного динамического модуля упругости, являющегося функцией частоты деформирования. В качестве аргумента этой функции принимается «характерная» для рассматриваемого режима нагружения частота [4]. Однако контактное взаимодействие в процессе качения не является аналогом гармонического деформирования материала. Поэтому введение характерной

частоты не обеспечивает достаточно полного и подробного учета влияния параметров контакта на энергетические потери [7]. Более достоверные оценки момента сопротивления качению могут быть получены непосредственным интегрированием давления по площади контактной поверхности.

Целью настоящего исследования является совершенствование расчетных методик определения динамических параметров процесса качения для повышения точности прогноза компоненты момента сопротивления качению, обусловленной гистерезисными потерями при циклическом деформировании вязкоупругого материала катящегося тела.

Качение шара. Рассмотрим качение шара с радиусом R , образованного линейно вязкоупругим материалом, по условно недеформируемой плоской поверхности. На шар действует постоянная вертикальная сила F , прижимающая его к поверхности. В соответствии с классической теорией Герца [3] для описанной задачи контактная площадка имеет форму круга радиуса a , а распределение контактного давления описывается функцией

$$p = \frac{p_0}{a} \sqrt{a^2 - \rho^2}. \quad (1)$$

Здесь p_0 – максимальное контактное давление; ρ – расстояние от центра контактной площадки до произвольной ее точки.

Для величин p_0 и a выполняется соотношение

$$\frac{p_0}{a} = \frac{2E}{\pi R(1-\nu^2)}. \quad (2)$$

Здесь E , ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала шара. Следовательно

$$p = \frac{2E}{\pi R(1-\nu^2)} \sqrt{a^2 - \rho^2} = \frac{2E}{\pi R(1-\nu^2)} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}. \quad (3)$$

Здесь x , y – декартовы координаты точки поверхности. Начало декартовой системы совпадает с центром контактной площадки.

При описании вязкоупругих характеристик материала катящегося тела будем использовать гипотезу о неизменности коэффициента Пуассона в процессах релаксации и ползучести [8]. Связь осевого напряжения с продольной деформацией при одноосном напряженном состоянии рассматриваемого материала будем описывать физическим уравнением вида [6]

$$\sigma(t) = \hat{E}(\varepsilon) = E_0 \left(\varepsilon(t) - \int_0^t R_E(t-\zeta) \varepsilon(\zeta) d\zeta \right). \quad (4)$$

Здесь $\hat{E}(\varepsilon)$ – интегральный оператор вязкоупругости, соответствующий модулю Юнга; E_0 – мгновенное значение модуля Юнга; $R_E(t)$ – ядро релаксации для одноосного напряженного состояния; t – время; ζ – переменная интегрирования.

Используя упруго-вязкоупругую аналогию [6], в выражении (3) заменим модуль Юнга соответствующим интегральным оператором

$$p = \frac{2E_0}{\pi R(1-\nu^2)} \left(\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} - \int_0^t R_E(t-\zeta) \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} d\zeta \right). \quad (5)$$

В процессе деформирования шара под действием вертикальной силы радиус a будет зависеть от времени. Установившееся после завершения ползучести при постоянной силе F значение радиуса контактной площадки a_0 определяется из условия

$$F = \iint_S p dS = 2\pi \int_0^{a_0} \frac{2E_\infty}{\pi R(1-\nu^2)} \sqrt{a_0^2 - \rho^2} \rho d\rho = \frac{4E_\infty a_0^3}{3R(1-\nu^2)}.$$

Здесь $E_\infty = E_0 \left(1 - \int_0^\infty R(\zeta) d\zeta \right)$ – длительный модуль Юнга.

Следовательно

$$a_0 = \left(\frac{3FR(1-\nu^2)}{4E_\infty} \right)^{1/3}. \quad (6)$$

После завершения ползучести приложим к шару пару сил с моментом M_c так, чтобы центр шара двигался параллельно оси x с постоянной скоростью v . В рамках настоящего исследования не рассматривается проскальзывание точек шара относительно опорной поверхности. То есть, принимается, что по всей контактной поверхности выполняется условие сцепления контактирующих поверхностей. При этом момент M_c будет совпадать с искомой составляющей общего момента сопротивления качению, обусловленной гистерезисными потерями в вязкоупругом материале катящегося тела.

При заданном режиме качения координата x точки поверхности в подвижной системе, начало которой жестко связано с центром контактной площадки, будет зависеть от времени

$$x = x_0 - vt. \quad (7)$$

Здесь x_0 – координата той же точки в неподвижной системе координат.

С другой стороны, при $t = 0$ выполняется $x = x_0$. Следовательно, x_0 можно рассматривать как начальное для заданного режима нагружения значение координаты x . Нагружение шара в некоторой точке поверхности начинается с момента «входа» данной точки в контактную площадку. При этом координата x принимает значение

$$x_0 = \sqrt{a_v^2 - y^2}. \quad (8)$$

Здесь a_v – радиус контактной площадки, который при постоянной скорости v не изменяется со временем, но зависит от значения v .

Соотношения (7) и (8) позволяют в выражении (5) для контактного давления выполнить замену переменной интегрирования $\zeta = \frac{x_0 - \xi}{v}$. После выполнения ряда математических преобразований соотношение (5) приводится к виду

$$p_v(x, y) = \frac{2E_0}{\pi R(1 - v^2)} \left(u_v(x, y) - \int_x^{\sqrt{a_v^2 - y^2}} R_E \left(\frac{\xi - x}{v} \right) u_v \left(\xi, y \right) \frac{1}{v} d\xi \right). \quad (9)$$

Здесь для краткости записи введена функция $u_v = \sqrt{a_v^2 - x^2 - y^2}$.

Условие равновесия шара в проекциях на вертикальную ось имеет вид

$$F = \iint_S p dS = \int_{-a_v}^{a_v} \int_{-\sqrt{a_v^2 - y^2}}^{\sqrt{a_v^2 - y^2}} p_v(x, y) dx dy. \quad (10)$$

Подставив в последнее равенство соотношение (9) для контактного давления, получим нелинейное уравнение для определения радиуса a_v контактной площадки. Зная его, из условия равенства нулю суммы моментов сил относительно оси y найдем момент M_c

$$M_c = \int_{-a_v}^{a_v} \int_{-\sqrt{a_v^2 - y^2}}^{\sqrt{a_v^2 - y^2}} p_v(x, y) x dx dy. \quad (11)$$

В качестве характеристики рассматриваемого процесса качения введем коэффициент трения качения

$$f_k = \frac{M_c}{FR}. \quad (12)$$

В монографии [4] изложен альтернативный метод расчета данного коэффициента, основанный на понятии о «характерной» частоте нагружения. В соответствии с данным методом первоначально определяется средняя за период потеря мощности в единице объема при гармоническом сдвиговом деформировании вязкоупругого материала

$$\bar{P} = \frac{1}{2} k_v \omega \epsilon_0^2 G''(\omega). \quad (13)$$

Здесь ω , ϵ_0 – частота и амплитуда деформирования соответственно; $G''(\omega)$ – мнимая компонента комплексного динамического модуля сдвига материала;

$k_v = \frac{1}{2(1 - v)}$ – поправочный коэффициент, позволяющий использовать методику работы [4] для сжимаемых материалов ($v \neq 0,5$).

При использовании гипотезы о неизменности коэффициента Пуассона для функции $G''(\omega)$ можно записать

$$G''(\omega) = \frac{E''(\omega)}{2(1+\nu)} = \frac{E}{2(1+\nu)} \int_0^{\infty} R_E(\xi) \sin(\omega\xi) d\xi. \quad (14)$$

Затем в равенстве (12) частота деформирования заменяется отношением скорости движения центра катящегося тела v к радиусу контактной площадки a_0 , а амплитуда деформирования – отношением максимального вертикального смещения точек шара u_{\max} (осадка) к радиусу a_0

$$\omega = \frac{v}{a_0}, \quad \varepsilon_0 = \frac{u_{\max}}{a_0} = \frac{a_0}{R}.$$

Здесь учтено, что согласно [3] для рассматриваемой контактной задачи $a_0 = \sqrt{R u_{\max}}$. Следует отметить, что при введении «характерной» частоты не учитывается зависимость радиуса контактной площадки от скорости.

Весь деформируемый объем принимается равным объему куба со сторонами $2a_0$. Умножив удельную потерю мощности (12) на деформируемый объем и разделив на скорость движения центра катящегося тела, получим силу сопротивления качению. Отношение данной силы к F совпадает с коэффициентом трения качения. Таким образом, согласно методике работы [4] для величины f_k получим

$$f_k = \frac{a_0^4}{R^2 F (1-\nu^2)} E'' \left(\frac{v}{a_0} \right). \quad (15)$$

Таким образом, при использовании разработанной методики коэффициент трения качения вычисляется по формулам (9)–(12), а в рамках методики работы [4] – по формуле (15) с учетом (6).

Качение цилиндра. Рассмотрим качение по условно недеформируемой горизонтальной поверхности цилиндра радиуса $R_{\text{ц}}$ с длиной образующей $L_{\text{ц}}$. Цилиндр образован тем же материалом, что и ранее рассмотренный шар. На цилиндр действует постоянная вертикальная сила F . Площадка контакта в данном случае будет иметь форму полосы длиной $L_{\text{ц}}$ и шириной $2b$. Распределение контактного давления задается функцией

$$p = \frac{p_0}{b} \sqrt{b^2 - x^2}.$$

Ось x направлена перпендикулярно оси цилиндра. Начало координат связано с центром контактной площадки. Значения p_0 и b связаны соотношением [3]

$$\frac{p_0}{b} = \frac{E}{2R_{\text{ц}}(1-\nu^2)}.$$

Полуширина b_0 контактной площадки после завершения ползучести при отсутствии качения определяется по формуле

$$b_0 = 2 \sqrt{\frac{FR_{\text{ц}}(1-\nu^2)}{\pi E_{\infty} L_{\text{ц}}}}. \quad (16)$$

Используя ту же методику, что и для шара, определим распределение контактного давления при качении цилиндра

$$p_v(x) = \frac{E_0}{2R_{\text{ц}}(1-\nu^2)} \left(\sqrt{b_v^2 - x^2} - \int_x^{b_v} R_E \left(\frac{\xi - x}{v} \right) \sqrt{a_v^2 - \xi^2} \frac{1}{v} d\xi \right). \quad (17)$$

Полуширина b_v контактной площадки при движении центра цилиндра со скоростью v определяется в результате решения нелинейного уравнения

$$F = L_{\text{ц}} \int_{-b_v}^{b_v} p_v(x) dx. \quad (18)$$

При известном b_v момент сопротивления качению вычисляется по формуле

$$M_c = L_{\text{ц}} \int_{-b_v}^{b_v} p_v(x) x dx. \quad (19)$$

Коэффициент трения качения, как и ранее, определяется соотношением

$$f_k = \frac{M_c}{FR_{\text{ц}}}. \quad (20)$$

При использовании для вычисления данного коэффициента методики, основанной на понятии «характерной» частоты деформирования, общий вид соотношения (12) для удельной потери мощности останется неизменным. В остальных соотношениях радиус a_0 следует заменить полушириной b_0 , а деформируемый объем вычислять по формуле $V = 4b_0^2 L_{\text{ц}}$. Окончательно для коэффициента трения качения получим

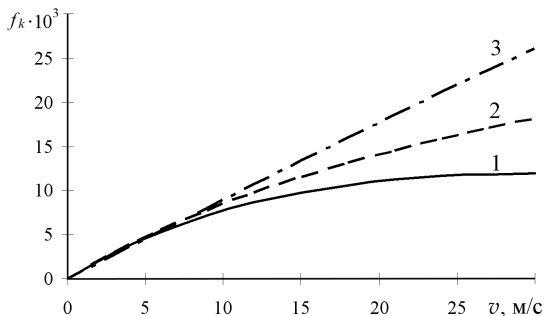
$$f_k = \frac{b_0^3 L_{\text{ц}}}{R_{\text{ц}}^2 F (1-\nu^2)} E^n \left(\frac{v}{b_0} \right). \quad (21)$$

Пример использования методики. В качестве расчетного примера рассмотрим качение шара радиуса $R = 0,3$ м и цилиндра того же радиуса с образующей длиной $L_{\text{ц}} = 0,1$ м. Материал катящихся тел – резиновая смесь, используемая в протекторе шин большегрузных грузовых автомобилей [9]. В диапазоне малых деформаций мгновенный модуль Юнга данного материала составляет $E_0 = 136$ МПа, коэффициент Пуассона принимается равным $\nu = 0,49$. Для описания реономных свойств материала используется ядро релаксации в виде экспоненциальной функции

$$R_E(t) = \frac{\delta}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (22)$$

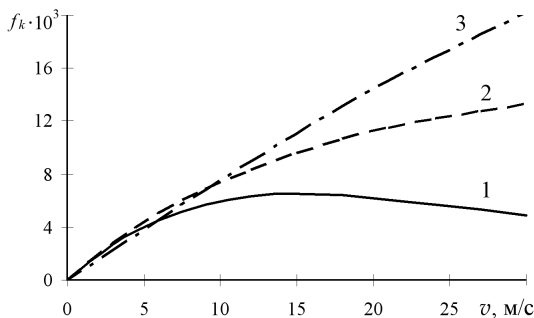
Здесь $\tau = 0,09$ мс – время релаксации; $\delta = 0,82$ – безразмерный параметр ядра релаксации. Вертикальная сила, действующая на катящееся тело, составляет $F = 500$ Н.

На рисунке 1 представлены зависимости коэффициента трения качения от скорости. Можно отметить, что пренебрежение изменением радиуса контактной площадки с изменением скорости движения катящегося тела приводит к завышенным расчетным оценкам коэффициента f_k . Результаты использования подхода, изложенного в работе [4], оказываются выше соответствующих значений, полученных на основе разработанной расчетной методики (9)–(12) (или (17)–(20)) при допущении $a_v = a_0$ ($b_v = b_0$) (рисунок 2). Отмеченные погрешности альтернативных методов вычисления коэффициента f_k проявляются при $v > 7$ м/с и возрастают с увеличением скорости v .



Кривая 1 – использование соотношений (9)–(12); кривая 2 – использование (9) и (11)–(12) при допущении $a_v = a_0$; кривая 3 – соотношение (13)

Рисунок 1 – Зависимость коэффициента трения качения от скорости движения центра катящегося шара



Кривая 1 – использование соотношений (17)–(20); кривая 2 – использование (17) и (19)–(20) при допущении $b_v = b_0$; кривая 3 – соотношение (21)

Рисунок 2 – Зависимость коэффициента трения качения от скорости движения центра катящегося цилиндра

Кроме того, следует указать, что пропорциональность исследуемой компоненты коэффициента трения качения скорости движения центра катящегося тела, установленная в работах [4, 10], выполняется только в области малых скоростей $v < 5$ м/с.

Заключение. Установлено, что ранее используемый подход к расчету коэффициента трения качения, основанный на введении «характерной» частоты деформирования, в диапазоне больших скоростей (более 7 м/с в рассматриваемом примере) приводит к завышенным расчетным оценкам исследуемой величины по сравнению с более достоверной методикой, подразумевающей непосредственное интегрирование контактного давления. Также показано, что пренебрежение зависимостью радиуса контактной площадки от скорости движения центра катящегося тела не позволяет обеспечить приемлемую точность прогноза момента сопротивления качению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Гребенюк, П. Т.** Тяговые расчеты. Справочник / П. Т. Гребенюк. – М. : Транспорт, 1987. – 256 с.

2 **Блинов, Е. И.** Основы динамической теории движения колесных машин / Е. И. Блинов. – М. : Машиностроение-1, 2006. – 149 с.

3 **Джонсон, К.** Механика контактного взаимодействия / Л. Джонсон. – М. : Мир, 1989. – 510 с.

4 **Попов, В. Л.** Механика контактного взаимодействия и физика трения / В. Л. Попов. – М. : Физматлит, 2012. – 348 с.

5 **Черепанов, Г. П.** Трение качения: решение проблемы Кулона / Г. П. Черепанов // Прикладная механика и техническая физика. – 2015. – Т. 55. – № 1. – С. 218–226.

6 **Кристенсен, Р.** Введение в теорию вязкоупругости: учеб. пособие / Р. Кристенсен. – М. : Мир, 1974. – 340 с.

7 **Carbone, G.** A novel methodology to predict sliding and rolling friction of viscoelastic materials: theory and experiments / G. Carbone, C. Putignano // J. Mech. Phys. Sol. – 2013. – Vol. 61. – № 8. – P. 1822–1834.

8 **Ferry, J. D.** Viscoelastic properties of polymers / J. D. Ferry. – New York-London, 1961. – 530 p.

9 Методика определения вязкоупругих характеристик резиновых смесей динамическим индентированием / Д. А. Черноус [и др.] // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2009. – Т. 75. – № 12. – С. 50–53.

10 **Бульгин, В. С.** Трения качения как вязкоупругий диссипативный процесс / В. С. Бульгин // Прикладная механика и техническая физика. – 2001. – Т. 42. – № 3. – С. 197–202.

D. A. CHERNOUS

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

REFINING THE CALCULATED EVALUATION OF THE ROLLING FRICTION COEFFICIENT

A method for calculating the component of the rolling friction coefficient due to hysteresis losses in the rolling body viscoelastic material is proposed. Unlike the previously used ones, this technique involves the direct integration of the contact pressure over the contact area and allows to take into account the dependence of the area size on the velocity of the rolling body mass center. There are presented the examples of the technique use in the analysis of the viscoelastic ball and cylinder rolling over the undeformable surface.

Получено 01.09.2019