

УДК 624.073.2

О. В. КОЗУНОВА, Д. М. ГУРСКИЙ

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КРУГЛОЙ ПЛИТЫ НА НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИЛ

Данная работа является продолжением исследования осесимметричной контактной задачи «круглая плита – нелинейно-упругое основание» вариационно-разностным методом. В ней реализованы постановка задачи, алгоритм нелинейного расчета и получены численные результаты, соответствующие действию на плиту системы сосредоточенных сил. Решение сформулированной задачи выполнено с использованием итерационного алгоритма А. А. Ильюшина малых упруго-пластических деформаций в форме переменных параметров упругости. Модуль упругости основания принимается переменным (секущим), коэффициент Пуассона – постоянным, в силу малости своего изменения. Показано, что при моделировании взаимодействия плит средней жесткости и однородных оснований физическую нелинейность можно не учитывать.

Ключевые слова: осесимметричная контактная задача, круглая плита, нелинейно-упругое основание, вариационно-разностный метод, итерационный алгоритм.

Введение. Одним из приближенных способов расчета строительных конструкций является вариационно-разностный метод (ВРМ). Сущность ВРМ, реализующего вариационный принцип Лагранжа с помощью метода конечных разностей, заключается в сведении задачи минимизации функционала полной потенциальной энергии, являющейся квадратичной функцией относительно деформаций и перемещений, к задаче минимизации функции многих переменных, отнесенных к узлам конечно-разностной сетки [1].

В работе решается осесимметричная задача теории упругости о взаимодействии линейно-упругой фундаментной круглой плиты с нелинейно-упругим однородным основанием. В нелинейных расчетах рассматриваются реальные грунты, которые моделируются обобщенными начальными упругими параметрами.

Теория и результаты решения аналогичных нелинейных задач, но для балочных плит (плоская деформация) приведены в работах [2–4] для двухслойных оснований без ослаблений и с ними, и внедрены в инженерную практику нормативным документом [5].

Для решения контактной задачи «круглая плита – упругое основание» в нелинейной постановке предлагается использовать подход, алгоритм которого предложен ранее [6]. Он позволяет полностью описать напряженно-деформированное состояние (НДС) упругого основания под фундаментной плитой, исследовать контактную зону, вычислить внутренние силовые фак-

торы в исследуемой плите и осадки основания под ней. Численная реализация ВРМ в нелинейной постановке осуществляется методом конечных разностей (МКР) с использованием итерационного алгоритма А. А. Ильющина [7].

Постановка задачи. Фундаментная круглая плита на нелинейно-упругом однородном основании находится под действием вертикальной внешней нагрузки P (рисунок 1), в дальнейшем будем называть ее равнодействующей силой. Параметры плиты: диаметр $2b$, цилиндрическая жесткость D .

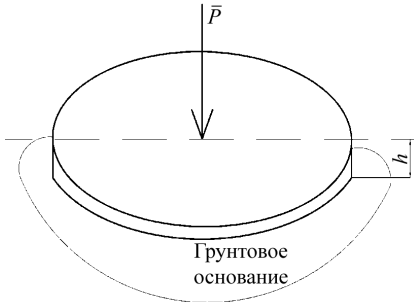


Рисунок 1 – Круглая плита под действием осесимметричной нагрузки

Нелинейно-упругое однородное основание моделируется как для упругого слоя с конечной толщиной H и переменным модулем упругости (деформации) этого слоя E_0 . Коэффициент Пуассона упругого слоя ν_0 в силу малости изменения своего значения принимается постоянным, что исследовалось ранее одним из авторов в работе [8].

Поперечник основания аппроксимируется разбивочной сеткой с постоянным шагом по осям вглубь основания вдоль оси Z и в ширину расчетной области вдоль оси R (рисунок 2). В результате получено N ячеек по направлению оси R и K ячеек вдоль оси Z , соответствующих осесимметричной постановке рассматриваемой задачи.

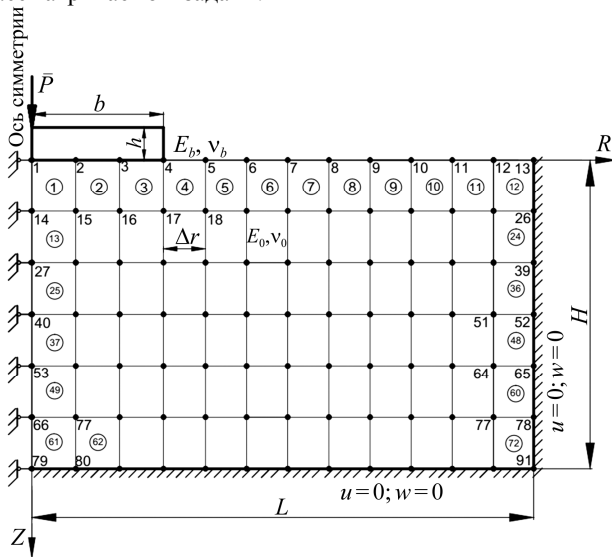


Рисунок 2 – Разбивочная сетка расчетной области

В качестве неизвестных принимаем $u_i(r, z)$ и $w_i(r, z)$ – компоненты вектора перемещения i -й узловой точки основания в полярной системе координат; $p_i(r)$ – давления в контактной зоне по поперечнику расчетной области.

Кинематические граничные условия [9] вводят на границе принятой расчетной области и в контактной зоне (см. рисунок 2):

- на контакте плиты с упругим основанием возникают только нормальные давления, силами трения пренебрегаем;
- в контактной зоне справедливо равенство осадок основания w_i прогибам плиты в k -м сечении z_k ;
- для плиты справедливы гипотезы теории изгиба;
- на границах принятой расчётной области перемещения принимаются равными нулю $u = 0, w = 0$.

Постановка, алгоритм и результаты расчета аналогичной расчетной модели от равнодействующей силы P , но для другой разбивочной сетки, выполнена в работе авторов [10]. На рисунке 3 показана схема осесимметричного нагружения круглой плиты системой сосредоточенных сил

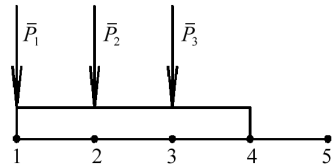


Рисунок 3 – Схема осесимметричного нагружения круглой плиты системой сосредоточенных сил

$$P_1 = 1/4q\pi\Delta r^2; P_2 = 2\pi q\Delta rR_2; P_3 = 2\pi q\Delta rR_3,$$

где $q = P/(6,25\pi\Delta r^2)$; $R_2 = \Delta r$, $R_3 = 2\Delta r$.

Силовые граничные условия [7] вводятся для радиальных поперечной силы и изгибающего момента в крайних точках осесимметрично нагруженной круглой плиты:

$$Q_r \Big|_{r=b} = 0; \quad M_r \Big|_{r=b} = 0. \quad (1)$$

Алгоритм расчета вариационным методом. Для решения осесимметричной задачи теории упругости используются слагаемые функционала полной энергии в виде трех составляющих энергий:

1) функционала энергии деформаций упругого основания [11]

$$U_f = \frac{2\pi G_k}{(1-2\nu_k)} \iint_S \left[\nu_k \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + (1-2\nu_k) \left(\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{u}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{1-2\nu_k}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 r dr dz \right], \quad (2)$$

где $G_k = \frac{E_k}{2(1+\nu_k)}$ – константа, отражающая связь между упругими постоянными однородного основания в точке k , известная из теории упругости [7];

2) функционала энергии изгиба круглой плиты

$$\Omega_b = \pi \int_0^b D \left[\left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)^2 - 2(1-\nu_b) \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \frac{d^2 w}{dr^2} \right] r dr, \quad (3)$$

где D – цилиндрическая жесткость круглой плиты, которая определяется из соотношения

$$D = \frac{E_b h^3}{12(1-\nu_b^2)}, \quad (4)$$

E_b, ν_b – модуль Юнга и коэффициент Пуассона железобетонной плиты, h – ее толщина;

3) потенциала внешней нагрузки

$$\Pi = - \iint_S q(r) w(r) r dr. \quad (5)$$

Таким образом, величина функционала полной энергии расчетной модели «круглая плита – нелинейно-упругое основание»

$$\mathcal{E} = U_f + \Omega_b + \Pi, \quad (6)$$

где каждое из слагаемых определяется соотношениями (2), (3), (5).

В отличие от функционала полной энергии деформируемой системы от внешней нагрузки, применяемого в монографиях С. В. Босакова [12, 13], здесь предлагается новая форма функционала полной потенциальной энергии с учетом энергии деформации нелинейно-упругого основания, структура которой аналогична рассмотренной ранее в работах [2–6], и была представлена в работе авторов [10].

В монографии [12] отмечается, что полная потенциальная энергия конструкции определяется в результате рассмотрения перевода ее из деформированного состояния в недеформированное (начальное). При этом внешние силы считаются постоянными.

Так как в состоянии статического равновесия функционал полной энергии \mathcal{E} должен иметь минимум, то неизвестные перемещения $u_i(r, z)$ и $w_i(r, z)$ найдем из условия обращения в нуль производных от полной энергии по каждому из перемещений, то есть

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u_i} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial w_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (7)$$

где N – число узловых точек основания. В результате дифференцирования получается система дифференциальных уравнений, порядок которой равен $2N$, то есть числу неизвестных перемещений.

Алгоритм расчета с применением МКР. Решение краевой задачи строится в перемещениях и реализуется методом конечных разностей (МКР), то есть за-

меной дифференциальных уравнений конечно-разностными соотношениями. При решении поставленной задачи энергия деформации подсчитывается для каждой ячейки МКР, а затем суммируется по объему упругого основания. Однако запись функционала полной энергии (6) отличается от традиционной, подобна принятой в [2–6]. При этом функционал энергии деформации упругого основания (2) получен через известные зависимости осесимметричной задачи теории упругости: соотношения Коши и обобщенный закон Гука.

Энергия деформаций прямоугольной ячейки размерами $\Delta r \times \Delta z$ с центром в точке k , согласно формуле (2) и с учетом соотношений Коши, усредненно представлена в работе [10] в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 U^{(k)} = & \frac{\pi E_k}{(1 + \nu_k)(1 - 2\nu_k)} \left\{ \nu_k \left[\frac{(u_b + u_d + u_a + u_c)}{4r} + \frac{u_b + u_d - u_a - u_c}{2\Delta r} + \right. \right. \\
 & + \left. \frac{w_c + w_d - w_a - w_b}{2\Delta z} \right]^2 + (1 - 2\nu_k) \left[\left(\frac{u_b + u_d - u_a - u_c}{2\Delta r} \right)^2 + \left(\frac{u_b + u_d + u_a + u_c}{4r} \right)^2 + \right. \\
 & + \left. \left(\frac{w_c + w_d - w_a - w_b}{2\Delta z} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} (1 - 2\nu_k) \left[\frac{u_c - u_d + u_a - u_b}{2\Delta z} + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{-w_b + w_d + w_a - w_c}{2\Delta r} \right]^2 \right\} r \Delta r \Delta z, \quad (8)
 \end{aligned}$$

где E_k, ν_k – упругие постоянные в центре ячейки основания; индексы a, b, c, d соответствуют значениям функций u и w в узловых точках [10].

Энергия деформации упругого основания принятой расчетной области получается суммированием по объему основания энергий деформаций колец основания, определяемых по формуле (8), и с учетом соотношений Коши выражается в конечно-разностной форме. Энергия изгиба круглой плиты в контактной зоне с основанием (3) и потенциал внешней нагрузки (5) также записывается в конечно-разностном виде, а затем производится суммирование конечно-разностных аппроксимаций выражений (2), (3), (5). В результате получаем полную энергию \mathcal{E} принятой расчетной модели «круглая плита – упругое основание» с действующими на плиту нагрузками.

В силу минимума функционала полной энергии в состоянии статического равновесия согласно (7) получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), решение которой позволяет найти неизвестные компоненты вектора перемещений $u_i(r, z)$ и $w_i(r, z)$.

Зная перемещения и используя введенные ранее гипотезы, можно определить прогибы плиты, соответствующие осадкам упругого основания под плитой, а также вертикальные напряжения упругого основания и давления в контактной зоне «круглая плита – упругое основание». По прогибам плиты определяются внутренние силовые факторы в ее сечениях.

Реализация алгоритма в нелинейной постановке. В нелинейной постановке предусматривается организация итерационного алгоритма, где *линейный расчет становится нулевой итерацией*.

1-я итерация. Находим интенсивность деформации для центра j -й ячейки

$$\varepsilon_j^{(0)} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_r^{(0)} - \varepsilon_z^{(0)})^2 + (\varepsilon_r^{(0)} - \varepsilon_\phi^{(0)})^2 + (\varepsilon_z^{(0)} - \varepsilon_\phi^{(0)})^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{rz}^{(0)})^2}; \quad \varepsilon_\phi^{(0)} = \frac{u^{(0)}}{r}. \quad (9)$$

Определяем переменный (секущий) модуль для ячейки с номером « j »

$$E_j^{(m)} = \frac{\sigma_u \operatorname{th} \left(\frac{E_0}{\sigma_u} \varepsilon_j^{(m-1)} \right)}{\varepsilon_j^{(m-1)}}, \quad (10)$$

где σ_u – предел прочности упругого основания.

Находим выражение для полной энергии системы при переменном (секущем) модуле $E_j^{(1)}$ в каждой ячейке. Дифференцируем его и из системы линейных алгебраических уравнений определяем перемещения первой итерации нелинейного расчета в i -м узле расчетной области $u_i^{(1)}$ и $w_i^{(1)}$.

2-я итерация. Последовательность действий аналогична первой итерации. Находим интенсивность деформации для центра каждой j -й ячейки по формуле (9) и секущий модуль деформации по формуле (10), в которые подставляем относительные деформации, полученные через соотношения Коши, но для первой итерации.

Находим выражение для полной энергии системы при секущем модуле $E_j^{(2)}$ в каждой ячейке. Дифференцируем и определяем узловые перемещения $u_i^{(2)}$ и $w_i^{(2)}$.

Итерация с номером m . Выполняется аналогично предыдущим. В общем виде выражение интенсивности деформаций для этой итерации

$$\varepsilon_j^{(m-1)} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_r^{(m-1)} - \varepsilon_z^{(m-1)})^2 + (\varepsilon_r^{(m-1)} - \varepsilon_\phi^{(m-1)})^2 + (\varepsilon_z^{(m-1)} - \varepsilon_\phi^{(m-1)})^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{rz}^{(m-1)})^2}. \quad (11)$$

Погрешность приближенного решения нелинейной задачи с использованием итерационного алгоритма оценивается инженерным или практическим критерием сходимости δ_f , а именно

$$\delta_f = \frac{f_{\max}^{(n)} - f_{\max}^{(n-1)}}{f_{\max}^{(n)}} \cdot 100 \% \leq \xi, \quad (12)$$

где $f_{\max}^{(n)}$, $f_{\max}^{(n-1)}$ – максимальные значения исследуемой функции для последующей и предыдущей итераций; n – номер итерации.

Результаты нелинейного расчета. Для реализации указанного подхода составлена программа на языке Mathematica 10.0 и проведена ее числовая апробация для осесимметрично-нагруженной круглой плиты, контактирующей с однородным нелинейно-упругим основанием.

При численном счете использовались следующие исходные данные: *упругое основание* (песок средней плотности) – $\sigma_u = 0,2$ МПа; $\nu_1 = 0,3$; $E_0 = 15$ МПа; *железобетонная плита* (бетон марки С20/25) – $E_b = 3,06 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu_b = 0,17$, $P = 5000$ кН; $b = 3$ м; $h = 0,8$ м; *расчетная область* – $H = 6$ м; $L = 12$ м.

На рисунке 4 приведены результаты нелинейного расчета осадок упругого основания и соответствующие им прогибы плит в контактной зоне для нескольких итераций. На рисунке 5 представлена эпюра радиальных моментов (нулевая итерация – упругое решение) в железобетонной плите, характер которой полностью соответствует гипотезам и допущениям строительной механики и теории упругости.

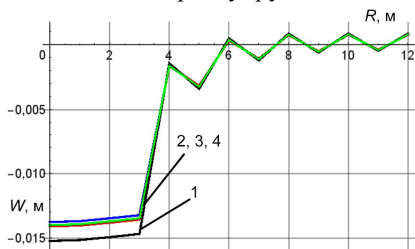


Рисунок 4 – Осадки основания на глубине $h = 0$ (контактная зона):

1 – линейный расчет; 2, 3, 4 – итерации

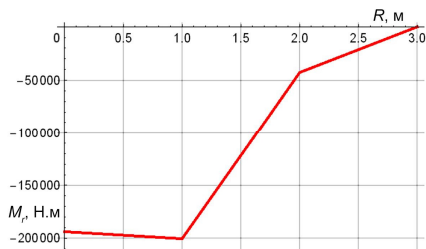


Рисунок 5 – Эпюра радиальных моментов в сечениях плиты

Заключение. В работе использован вариационно-разностный метод для расчета круглых фундаментных плит на физически нелинейном грунтовом основании от системы сосредоточенных сил. ВРМ универсален и позволяет полностью описать напряженно-деформированное состояние основания под круглой плитой и за ее пределами, исследовать контактную зону, определить осадки упругого основания и прогибы плиты, и по ее прогибам вычислить внутренние усилия в плите. Итерационный алгоритм сходится уже на второй итерации, следовательно, для плит средней жесткости и однородных оснований для упрощения математических расчетов при моделировании допускается не учитывать физическую нелинейность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Барашков, В. Н. Алгоритм реализации задач теории упругости и пластичности вариационно-разностным методом. Ч. 1 / В. Н. Барашков // Известия Томского политехнического университета. – 2003. – Т. 306, № 3. – С. 23–28.

2 Босаков, С. В. Вариационно-разностный подход в решении контактной задачи для нелинейно упругого неоднородного основания. Плоская деформация. Теория расчета. Ч. 1 / С. В. Босаков, О. В. Козунова // Вестник БНТУ. – 2009. – № 1. – С. 5–13.

3 Босаков, С. В. Вариационно-разностный подход в решении контактной задачи для нелинейно упругого неоднородного основания. Плоская деформация. Результаты расчета. Ч. 2 / С. В. Босаков, О. В. Козунова // Вестник БНТУ. – 2009. – № 2. – С. 15–19.

4 Козунова, О. В. Нелинейный расчет балочных плит на слоистых основаниях с биогенными включениями / О. В. Козунова // Геотехника Беларуси: наука и практи-

ка : сб. статей Междунар. науч.-техн. конф., Минск, 20–22 октября 2008 г. – Минск : БНТУ, 2008. – С. 27–63.

5 **Козунова, О. В.** Особенности проектирования плитных фундаментов на многослойных основаниях со слабыми слоями грунтов / О. В. Козунова // Рекомендации по проектированию и устройству рациональных фундаментов на основаниях, сложенных озерно-ледниковыми и лессовидными грунтами : Р 5.01.056.09 : введ. 01.10.09. – Минск : Стройтехнорм, 2009. – Гл. 8. – С. 39–47.

6 **Козунова, О. В.** Нелинейный расчет фундаментных плит на слоистых основаниях с использованием секущего модуля деформации / О. В. Козунова // Вестник Брестского государственного технического университета. Строительство и архитектура. – 2009. – № 1 (55). – С. 32–39.

7 **Александров, А. В.** Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – М. : Высш. шк., 1990. – 398 с.

8 **Козунова, О. В.** Учет переменного коэффициента Пуассона в нелинейном расчете балочной плиты, контактирующей с неоднородным основанием / О. В. Козунова // Инженерно-геотехнические изыскания, проектирование и строительство оснований, фундаментов и подземных сооружений : сб. тр. Всероссийской науч.-техн. конф. – СПб. : СПбГАСУ, 2017. – С. 119–124.

9 **Козунова, О. В.** Статический анализ системы «балочная плита – нелинейно-упругое неоднородное основание» вариационно-разностным методом : дис. ... канд. техн. наук : 05.23.17 / О. В. Козунова. – Минск, 2017. – 168 с.

10 **Козунова, О. В.** Осесимметричная задача для вертикально нагруженного фундамента с подошвой круглой формы на нелинейно-упругом основании / О. В. Козунова, Д. М. Гурский // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 94–104.

11 **Griffin, D. S.** A numerical solution for axially symmetrical and plane elasticity problems / D. S. Griffin, R. B. Kellogg // International Journal of Solids and Structures. – 1967. – Vol. 3, Is. 5. – P. 781–794.

12 **Босаков, С. В.** Метод Ритца в контактных задачах теории упругости / С. В. Босаков. – Брест : БрГТУ. – 2006. – 107 с.

13 **Босаков, С. В.** Статические расчеты плит на упругом основании / С. В. Босаков. – Минск : БНТУ, 2002. – 127 с.

O. V. KOZUNOVA, D. M. GURSKY

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

AXISYMMETRIC CONTACT PROBLEM FOR A CIRCULAR PLATE ON THE NONLINEAR ELASTIC BASE UNDER THE ACTION OF THE CONCENTRATED FORCES SYSTEM

The investigation is a continuation of the "round plate-nonlinear elastic base" axisymmetric contact problem study by the variational-difference method. Here there are realized the formulation, the nonlinear calculation algorithm and the numerical results are implemented for the contact problem solution considering the concentrated forces system action. The solution of the formulated problem is performed using an iterative algorithm of the A. A. Ilyushin small elastic-plastic deformations of in the elasticity variable parameters form. The base elasticity modulus is assumed to be variable (secant), the Poisson's ratio is constant, due to the smallness of its change. It is shown that the physical non-linearity can be neglected at the modeling of the medium hardness plates and homogeneous bases interaction.

Получено 30.11.2019