

УДК 532.5:51-7

*Н. Н. КИЗИЛОВА, Н. Л. РЫЧАК*

*Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Харьков, Украина*

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ РЕЧНОГО РУСЛА РЕКИ ХАРЬКОВ НА ТЕРРИТОРИИ Г. ХАРЬКОВА**

Исследуется течение на участке реки Харьков на территории г. Харькова с распределенными источниками загрязнений и притоками. Разработанная математическая модель позволяет предсказывать накопление загрязнений в придонных отложениях, перенос загрязнений с потоком, эволюцию береговой линии русла, наличие застойных зон с медленной циркуляцией, прогнозировать динамику донных заносов и зарастание русла. Модель также позволяет планировать инженерно-гидрогеологические меры по предотвращению размыва и зарастания рек с произвольной геометрией, улучшения циркуляции и повышения качества речных вод.

**Ключевые слова:** течение реки, динамика потока, конечноэлементное моделирование, загрязнение.

Современные возможности детального расчета параметров течений рек в руслах с произвольной геометрией на основе суперкомпьютеров с использованием зарекомендовавших себя методов механики жидкости в применении к течениям в окружающей среде (Environmental Fluid Mechanics) предоставляют уникальные возможности для прогнозирования динамики локальных экосистем в отношении переноса и накопления загрязнений, качества и доступности питьевой воды для растущего населения в условиях глобального потепления [1]. Моделирование речных русловых потоков основано на использовании дискретных, континуальных и смешанных дискретно-континуальных моделей речных русел с учетом их реальной трехмерной геометрии (береговые линии и профили дна), состава донных отложений, скорости течения воды, наличия притоков и поверхностного стока за счет ливней и таяния снега, и других источников воды и загрязнений [2–5].

Математические модели с учетом реальной геометрии и численные расчеты поля скоростей, завихренностей, сил трения и ряда других гидродинамических параметров позволяют оценить степень аккумуляции загрязнений в почве и придонной растительности, эрозии береговой линии, перенос донных отложений, выявить участки с замедленными течениями, в которых вследствие недостаточной циркуляции воды будет происходить зарастание дна и ухудшение качества воды.

В данной работе приведены результаты математического моделирования и расчетов скорости движения воды, распределений давлений, трения и других гидродинамических параметров, способствующих миграции русла реки

Харьков с учетом притока поверхностных вод и загрязнений с урбанизированной территории, его возможному зарастанию и изменению качества воды.

**Материалы и методы.** Геометрия участка русла реки Харьков, расположенного на территории г. Харьков (рисунок 1), определялась по гидрогеологическим картам и данным Shuttle Radar Topography Mission (SRTM) с разрешением 3' [6]. На рисунке 1 цифрами обозначены места забора проб воды для определения ее качества, а поперечные штрихи соответствуют местам измерений профиля русла, которые выбирались только на границах относительно прямых участков, а также с большей частотой – на участках закруглений русла для построения наиболее точной геометрической модели. Стрелкой указан приток р. Немышля. Результаты исследования качества воды приведены в таблице 1.

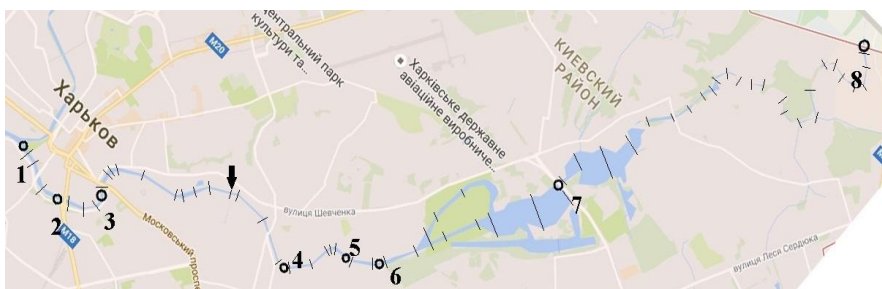


Рисунок 1 – Локализация мест забора проб воды (цифры 1–8) из р. Харьков на территории г. Харьков от места ее слияния с р. Лопань (1) до административной границы Харьковской области (8) и локализация мест измерения профиля русла (поперечные штрихи) для построения математической модели (источник – карты Google).

Таблица 1 – Результаты исследования качества воды в восьми местах забора и притоке р. Немышля (см. рисунок 1, а) на территории г. Харькова

Показатели	№ 1	№ 2	№ 3	р. Немышля	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7	№ 8
рН	7,49	7,92	7,63	7,51	7,22	7,39	7,34	7,95	7,5
Кислотность мг О <sub>2</sub> /дм <sup>3</sup>	8,5				10,4	8	20,1	22	18,1
Полифосфаты мг/дм <sup>3</sup>	0,1			0,2	0,12	0,1	0,05	0,04	0,03
Нефтепродукты мг/дм <sup>3</sup>	0,11				0,15	0,06	0,1	2,5	4
Сухой остаток мг/дм <sup>3</sup>	604,2			145,1	605	504	710	750	
Железо мг/дм <sup>3</sup>	0,28				0,32	0,44	0,41	0,7	1,8
Цинк	1,2	0,0014	0,0042	0,044				0,0007	
Медь		0,0104	0,006	0,004				0,0016	4
Кадмий		0	0	0				0	
Свинец		0	0	0,0007				0,0011	
Никель	1,7	0	0,0009	0,0009				0,0004	
Сульфаты	208			5000				260	180

Эти данные использовались для моделирования конвективного переноса, диффузии и накопления загрязняющих веществ в придонных областях. Отдельно выделены выбросы, поступающие в р. Харьков через приток р. Немышля, который протекает по заводской зоне.

**Одномерная модель течения воды в речном русле.** Наиболее широко используемыми математическими моделями речных русел являются одномерные модели [5], основанные на уравнении

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{q}) = Q_{in}, \quad (1)$$

где  $h = z + H + v^2/2g$  – динамический напор;  $v$  – скорость;  $g$  – ускорение свободного падения;  $H(x)$  – глубина русла;  $z$  и  $x$  – вертикальная и продольная координаты;  $Q_{in}$  – распределенные источники массы вдоль русла (притоки);  $\bar{q} = -kK\nabla h$  – поток;  $k = H^{5/3}$  – проводимость сечения канала;  $K = \sqrt{\Xi} / m$  – трение на смоченной поверхности русла;  $\Xi = (\partial h / \partial x)^2 + (\partial h / \partial z)^2$  – уклон;  $m$  – коэффициент Маннинга.

Перенос загрязнения (примеси с массовой концентрацией  $C$ ) описывается одномерным уравнением диффузии

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v \frac{dC}{dx} = D_C \frac{d^2 C}{dx^2} - q_C(x) + q_{in}(x), \quad (2)$$

где  $D_C$  – коэффициент диффузии компоненты;  $q_C(x)$  – скорость поглощения загрязнения на единицу длины русла (в донных отложениях и растительности);  $q_{in}(x)$  – скорость поступления загрязнения вместе с притоками и поверхностными стоками.

Реальное искривленное русло заменяется прямолинейным с теми же профилями дна и уклоном, что позволяет провести быстрые калибровочные численные оценки скорости течения, концентраций загрязнений, напряжений трения на смоченной поверхности (дне) и у береговой линии и важно для оценки целого набора параметров течения [2–4].

Возможны более детальные расчеты на базе трехмерных моделей методами компьютерной динамики жидкостей (CFD), однако они требуют значительной компьютерной мощности и времени для расчетов [1, 5]. При этом скорость и давление в речном потоке описываются уравнениями Навье-Стокса

$$\operatorname{div}(\bar{v}) = 0, \quad \rho \frac{d\bar{v}}{dt} = -\nabla p + \mu \Delta \bar{v} + \rho \bar{g}, \quad (3)$$

где  $\rho$  и  $\mu$  – плотность и вязкость жидкости;  $p$  – гидростатическое давление.

Граничные условия для уравнений (2) записывают в виде

$$\bar{v}|_{\Gamma_1} = 0, \quad p|_{\Gamma_1} = p_{atm}, \quad (4)$$

где  $p_{atm}$  – атмосферное давление;  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  – смоченная и свободная поверхности речного русла соответственно.

Задачи динамики речных русел на основе модели (3)–(4) решались для некоторых участков русел методом конечных элементов с помощью ANSYS Fluent и других конечноэлементных пакетов прикладных программ [1, 5], причем расчеты даже на более коротком участке реки Северский Донец [5] требовали параллельных вычислений, реализованных в целом ряде конкретных задач [1]. В данной работе для расчетов переноса основных загрязняющих компонент, представленных в таблице 1, использовался упрощенный подход, основанный на интегрировании уравнения (1) по поперечной координате и записи полученных уравнений (1), (2) в форме конечных разностей. На основании такого подхода была проведена валидация, оценка точности расчетов и решен целый ряд важных задач динамики русловых потоков [2–4].

Одномерная схема речного русла приведена на рисунке 2 в виде набора  $N$  линейных сегментов (конечных элементов, КЭ) с узлами  $(j-1, j)_{j=1}^N$ . Величины напора в каждом узле известны из данных радара. Известны также значения источников воды  $q_j$  в узлах вместе с притоком (р. Немышля), средней скорости аккумуляции загрязнений  $B_j$  (придонные отложения, растения), среднего объемного притока  $\Pi_j$  с поверхностными водами (дожди, таяние снега и др.), среднемассового притока загрязнений  $\pi_j$  вместе с поверхностными водами. Две последние величины рассчитывались по известным формулам в зависимости от типа почвы и наклона местности в окрестности КЭ [2–4] в расчете на единицу длины КЭ, а источники массы считались непрерывно распределенными вдоль КЭ, так что объемный расход  $Q_j = Q_j(x)$ , где  $x$  – продольная координата. Площади сечений русла в узлах  $S_j$  рассчитывались по известным профилям и длине смоченного контура [2, 3]. Уклон в одномерной модели определялся по реальному уклону  $\Xi$  каждого сегмента реки на поверхности Земли (см. выше).

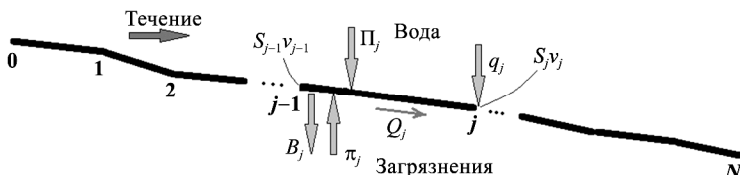


Рисунок 2 – Одномерная модель речного русла. Схема. Пояснения в тексте

Осреднение уравнений (1), (2) по поперечному сечению, а затем по каждому КЭ вдоль русла позволяют получить рекурсивные формулы для определения скорости течения воды и концентрации загрязнения в виде [2–4]

$$v_j = (\chi_{j-1}S_{j-1}v_{j-1} + Q_j + \Pi_j L_j)(\chi_j S_j)^{-1}, \quad (5)$$

$$C_j = \left[ (v_j L_j - 2D_C)C_{j-1} + D_C C_{j-2} + (\pi_j L_j + Q_j C_j) L_j^2 \right] (v_j L_j - D_C)^{-1}, \quad (6)$$

где  $L_j$  – длина  $j$ -го КЭ;  $D_C$  – коэффициент диффузии исследуемого компонента в воде.

Таким образом, зная скорость течения и концентрацию примеси на входе в русло (участок измерения № 8), можно по формулам (5), (6) рассчитать распределение скоростей и концентраций разных загрязнений.

**Численные расчеты и обсуждение результатов.** Численные расчеты по (5) проводились для определения линейной скорости  $v_j$  течения воды вдоль каждого КЭ и объемного расхода  $Q_j$  в каждом узле  $j = 1 \dots N$  ( $N = 60$ ), начиная с измеренных значений  $v_0$  в самой верхней точке русла (место замера № 8). По мере выполнения расчетов численные значения скорости  $v_j$  сопоставлялись с измеренными  $V_j$  в сечениях № 7–1. Поскольку имела место недостаточная точность определения величин  $\Pi_j$ , при отклонениях  $\Delta_v = |v_j - V_j| / V_j > 0,1$  проводилась корректировка параметра  $B_j$  на  $j$ -м КЭ. Массив рассчитанных значений скоростей в узлах использовался для расчетов значений  $Q_j$ , а затем концентраций  $C_j$  для каждого из компонентов в таблице 1 по формуле (6), начиная с измеренных значений концентраций  $C_0$  на участке замера № 8. Поскольку величины  $B_j$  и  $\pi_j$  для каждой из компонент определялись с наибольшей погрешностью из-за отсутствия детальной информации, при погрешностях  $\Delta_c > 0,05$  между рассчитанными и измеренными значениями, проводилась корректировка значений  $B_j$  и  $\pi_j$  методом наименьших квадратов вплоть до удовлетворительного соответствия рассчитанных и измеренных значений концентраций для каждой компоненты в каждом КЭ. Таким образом, в результате численных расчетов получен набор параметров модели  $\{B_j, \pi_j, \Pi_j\}$ , который можно использовать в дальнейших исследованиях для моделирования динамики переноса загрязнений при разных уровнях выпавших осадков и воды в русле и других факторов на качество воды. На рисунке 3 представлены результаты расчетов распределений концентраций некоторых из загрязняющих веществ по данным, приведенным в таблице 1 (измерения 15.06.2018 г.).

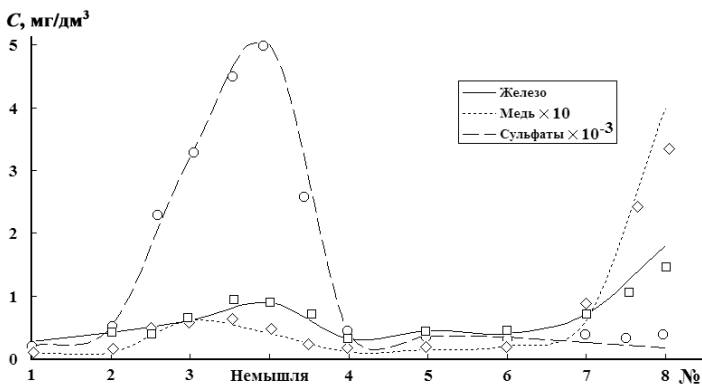


Рисунок 3 – Результаты численных расчетов и измерений концентраций разных загрязняющих веществ вдоль русла р. Харьков на территории города. Линии соответствуют численным расчетам, а значки – данным измерений

Таким образом, модель позволяет довольно точно рассчитывать концентрации при условии наличия близко расположенных мест забора проб (№ 1–3 и № 4–6). Резкое увеличение концентраций загрязнений наблюдается после попадания загрязненных вод р. Немышля. Быстрое снижение концентраций вплоть до допустимых связано с повышенным накоплением их в русле.

**Заключение.** В работе приведена одномерная модель динамики переноса загрязнений на участке речного русла с учетом известного уклона на каждом участке, профиля поперечного сечения, поступления воды с притоками и поверхностными водами, поступления загрязнений и отложения их в придонных слоях. На основе данных детальных измерений целого ряда загрязнений в виде сульфатов, тяжелых металлов и пр., проведены численные расчеты, позволяющие определить коэффициенты поступления воды и загрязнений и поглощения последних на каждом участке русла. Валидация модели на основе данных измерений позволяет проводить дальнейшие оценки переноса загрязнений и прогнозирование качества воды при разных уровнях сезонных осадков (ливни, таяние снега, засуха и др.) и неблагоприятных ситуаций (сбросы, прорыв коммуникаций и пр.), что составит предмет дальнейших исследований.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Thermo-Hydro-Mechanical-Chemical Processes in Porous Media: Benchmarks and Examples / ed. by O. Kolditz [et al.] // Springer Science Business Media. – 2012. – 399 p.

2 **Боровков, В. С.** Динамика русловых потоков на урбанизированных территориях / В. С. Боровков. – Л. : Гидрометеиздат, 1989. – 286 с.

3 **Гришанин, К. В.** Гидравлическое сопротивление естественных русел / К. В. Гришанин. – СПб. : Гидрометеиздат, 1992. – 183 с.

4 **Латипов, К. Ш.** О русловых потоках с переменным расходом / К. Ш. Латипов, М. Шаюсупов. – Ташкент : Изд-во „ФАН”, 1979. – 192 с.

5 **Khalin, A. A.** On numerical modeling of the river flows with validation on the measurement data / A. A. Khalin, N. N. Kizilova, N. L. Rychak // 3rd Intern. Conf. “Differential equations and Control Theory”. Book of Abstracts. Kharkiv, Ukraine. – 2018. – P. 28–29.

6 Shuttle Radar Topography Mission [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <https://www2.jpl.nasa.gov/srtm>. – Дата доступа 03.10.2019.

*N. N. KIZILOVA, N. L. RYCHAK*

*V. N. Karazin Kharkov National University, Kharkov, Ukraine*

#### MATHEMATICAL MODELING AND PROGNOSTICATION OF THE KHARKOV RIVER DYNAMICS ON THE KHARKIV CITY TERRITORY

The flow of the Kharkov river on the territory of the Kharkiv city with distributed sources of pollution and tributaries is investigated. The created mathematical model allows to predict the accumulation of pollutions in the bottom sediments, their transportation with the flow, the coastline evolution, and predicting the dynamics of the river channel overgrowth. The model also allows to plan the engineering and hydrogeological measures to prevent erosion and overgrowth of rivers with arbitrary geometry, to improve the river water circulation and quality.

Получено 17.11.2019