

УДК 539.384

*Ю. В. ЗАХАРЧУК*

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

## **НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ**

Приведена постановка краевой задачи об изгибе упругопластической круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем. Для тонких несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа. В относительно толстом лёгком наполнителе выполняется гипотеза Тимошенко с линейной аппроксимацией прогиба и квадратичной аппроксимацией радиальных перемещений по толщине слоя. На контуре – жесткая диафрагма, препятствующая относительному сдвигу слоев. Физические уравнения состояния в несущих слоях соответствуют теории малых упругопластических деформаций Ильюшина. Заполнитель нелинейно упругий. Неоднородная система нелинейных дифференциальных уравнений равновесия получена вариационным методом Лагранжа. Для решения применен метод последовательных приближений, основанный на методе упругих решений. Получено общее итерационное аналитическое решение краевой задачи в функциях Бесселя. Численные результаты получены для трехслойного пакета металл-полимер-металл.

**Ключевые слова:** трехслойная круговая пластина, физическая нелинейность, сжимаемость наполнителя, напряжения.

**Введение.** Теория расчета пластинчатых элементов конструкций представляет собой обширный раздел современной строительной механики. Большое количество исследований посвящено проблеме деформирования трехслойных структур с несущими внешними слоями и наполнителем между ними, т.к. известно, что они являются наиболее рациональными в условиях деформации изгиба. Постановки и методы решения соответствующих краевых задач приведены в [1, 2]. Деформирование трёхслойных элементов конструкций с несжимаемым наполнителем под действием статических нагрузок исследовалось в работах [3–5], динамических нагрузок – [6–9]. Работы [10–13] посвящены исследованию напряженно-деформированного состояния трехслойных пластин круглого очертания, связанных с упругим основанием. Трехслойные прямоугольные пластины со сжимаемым наполнителем исследовались в работах [14, 15]. В статьях [16–20] рассматривается упругое поведение материалов слоев круговых трехслойных пластин в случаях с легким и жестким сжимаемыми наполнителями. Система уравнений равновесия трехслойной круговой упругопластической пластины с легким сжимаемым наполнителем приведена в публикациях [21, 22]. Здесь рассмотрено деформирование подобной упругопластической пластины, проведено численное

исследование изменения радиальных и окружных напряжений по высоте алюмокомпозитной пластины в случае жесткого защемления ее контура.

**1 Постановка краевой задачи.** Рассмотрен изгиб круговой трехслойной пластины под действием осесимметричной нагрузки  $q(r)$ , приложенной к наружной поверхности первого слоя. Заполнитель легкий, сжимаемый по толщине. Приняты следующие кинематические гипотезы: для тонких изотропных несущих слоев с толщинами  $h_1, h_2$  справедливы гипотезы Кирхгофа; в заполнителе ( $h_3 = 2c$ ) нормаль остается прямолинейной, поворачивается относительно срединной поверхности на дополнительный угол  $\psi(r)$ ; деформации считаем малыми. Предполагается также, что на контуре имеется жесткая диафрагма, препятствующая относительному сдвигу слоев и обжатию заполнителя ( $\psi = 0, v = 0$  при  $r = r_0$ ). Цилиндрическая система координат  $r, \varphi, z$  связана со срединной плоскостью заполнителя. Номер слоя обозначен индексом  $k$  ( $k = 1, 2, 3$ ).

Обозначим:  $w(r)$  – прогиб нижнего слоя (2),  $u(r)$  – продольное перемещение срединной плоскости заполнителя,  $v(r)$  – функция обжатия заполнителя.

При линейном распределении прогибов по толщине  $w^{(3)}(r, z)$  радиальные перемещения  $u^{(3)}(r, z)$  изменяются в заполнителе квадратично по  $z$ . Все перемещения выражаются через четыре искомые функции  $w(r), u(r), \psi(r)$  и  $v(r)$  следующими соотношениями:

– для несущих слоев 1, 2:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - z(w_{,r} + v_{,r}), \quad w^{(1)}(r, z) = w(r) + v(r) \quad (c \leq z \leq c+h); \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r}, \quad w^{(2)}(r, z) = w(r) \quad (-c-h \leq z \leq -c); \end{aligned} \quad (1)$$

– для заполнителя 3 ( $-c \leq z \leq c$ ):

$$u_r^{(3)} = u + z\psi - z \left[ w_{,r} + \frac{v_{,r}}{2c}(z+c) \right], \quad w^{(3)}(r, z) = w(r) + \frac{v(r)}{2c}(z+c);$$

где  $z$  – координата рассматриваемого волокна; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Компоненты тензора деформаций в слоях следуют из перемещений (1) и соотношений Коши [1, 23]. Для связи напряжений и деформаций в слоях пластины используются нелинейные физические уравнения состояния типа теории Ильюшина малых упругопластических деформаций [1]:

$$\begin{aligned} s_\alpha^{(k)} &= 2G_k(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}))\vartheta_\alpha^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k\varepsilon^{(k)} \quad (k = 1, 2, 3; \alpha = r, \varphi), \\ s_z^{(3)} &= 2G_3(1 - \omega_3(\varepsilon_u^{(3)}))\vartheta_z^{(3)}, \quad s_{rz}^{(3)} = 2G_3(1 - \omega_3(\varepsilon_u^{(3)}))\vartheta_{rz}^{(3)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $s_\alpha^{(k)}, \vartheta_\alpha^{(k)}, \sigma^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$  – девиаторная и шаровая части тензоров напряжений и деформаций;  $G_k, K_k$  – модули сдвиговой и объемной деформации;  $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)})$  – функции Ильюшина пластичности материалов несущих слоев ( $k = 1, 2$ ) [1],

которые при  $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}$  равны нулю;  $\varepsilon_y^{(k)}$  – деформационные пределы текучести материалов;  $\omega_3(\varepsilon_u^{(3)})$  – универсальная функция, описывающая физическую нелинейность сжимаемого заполнителя, причем  $\omega^{(3)} \equiv 0$  при  $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_s^{(k)}$ ,  $\varepsilon_s^{(3)}$  – деформационный предел физической нелинейности;  $s_z^{(3)}$ ,  $s_{rz}^{(3)}$ ,  $\vartheta_z^{(3)}$ ,  $\vartheta_{rz}^{(3)}$  – девиаторы тензоров в заполнителе;  $\varepsilon_u^{(k)}$  – интенсивность деформаций.

Интенсивности обобщенных внутренних силовых факторов в пластине вводятся с помощью компонентов тензора напряжений  $\sigma_\alpha^{(k)}$  ( $\alpha = r, \varphi$ ):

$$T_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, \quad M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz,$$

$$H_\alpha = M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}), \quad D_\alpha = S_\alpha^{(3)} + c(M_\alpha^{(1)} + M_\alpha^{(2)}), \quad S_\alpha^{(3)} = \int_{h_3} \sigma_\alpha^{(3)} z^2 dz. \quad (3)$$

Компоненты тензора напряжений в слоях (2) разбиваются на упругие (индекс «e») и неупругие (индекс «o») составляющие

$$\sigma_\alpha^{(k)} = \sigma_{ae}^{(k)} - \sigma_{ao}^{(k)} \quad (\alpha = r, \varphi; k = 1, 2, 3),$$

$$\sigma_z^{(3)} = \sigma_{ze}^{(3)} - \sigma_{zo}^{(3)}, \quad \sigma_{rz}^{(3)} = \sigma_{rze}^{(3)} - \sigma_{rzo}^{(3)}, \quad (4)$$

где

$$\sigma_{ae}^{(k)} = 2G_k \vartheta_\alpha^{(k)} + K_k \theta_\alpha^{(k)}, \quad \sigma_{ao}^{(k)} = 2G_k \omega_k \vartheta_\alpha^{(k)},$$

$$\sigma_{ze}^{(3)} = 2G_3 \vartheta_z^{(3)} + K_3 \theta^{(3)}, \quad \sigma_{zo}^{(3)} = 2G_3 \omega_3 \vartheta_z^{(3)}, \quad \sigma_{rze}^{(3)} = 2G_3 \vartheta_{rz}^{(3)}, \quad \sigma_{rzo}^{(3)} = 2G_3 \omega_3 \vartheta_{rz}^{(3)}.$$

Внутренние усилия и моменты в слоях пластины также раскладываются на линейную (индекс «e») и нелинейную (индекс «o») части:

$$T_\alpha^{(k)} = T_{ae}^{(k)} - T_{ao}^{(k)}, \quad M_\alpha^{(k)} = M_{ae}^{(k)} - M_{ao}^{(k)}, \quad S_\alpha^{(3)} = S_{ae}^{(3)} - S_{ao}^{(3)} \quad (\alpha = r, \varphi),$$

где упругие и нелинейные составляющие вычисляются по формулам (3), в которых напряжения  $\sigma_\alpha^{(k)}$  нужно заменить соответственно на  $\sigma_{ae}^{(k)}$  и  $\sigma_{ao}^{(k)}$  ( $\alpha = r, \varphi$ ) из соотношений (4).

После этого обобщенные внутренние усилия будут

$$T_\alpha = T_{ae} - T_{ao} = \sum_{k=1}^3 T_{ae}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 T_{ao}^{(k)}, \quad M_\alpha = M_{ae} - M_{ao} = \sum_{k=1}^3 M_{ae}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 M_{ao}^{(k)},$$

$$H_\alpha = H_{ae} - H_{ao}, \quad H_{ae} = M_{ae}^{(3)} + c(T_{ae}^{(1)} - T_{ae}^{(2)}), \quad H_{ao} = M_{ao}^{(3)} + c(T_{ao}^{(1)} - T_{ao}^{(2)}), \quad (5)$$

$$D_\alpha = D_{ae} - D_{ao}, \quad D_{ae} = M_{ae}^{(1)} + \frac{1}{2} M_{ae}^{(3)} + \frac{1}{2c} S_{ae}^{(3)}, \quad D_{ao} = M_{ao}^{(1)} + \frac{1}{2} M_{ao}^{(3)} + \frac{1}{2c} S_{ao}^{(3)}.$$

Система дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях, описывающая деформирование круговой упругой трехслойной пластины с

легким сжимаемым заполнителем, была получена с помощью вариационного принципа Лагранжа в [20].

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r} - a_4 v_{,r}) + K_3^- v_{,r} &= p_\omega, \\ L_2(a_2 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r} - a_7 v_{,r}) &= h_\omega, \\ L_3(a_3 u + a_6 \psi - a_8 w_{,r} - a_9 v_{,r}) &= -q + q_\omega, \\ L_3(a_4 u + a_7 \psi - a_9 w_{,r} - a_{10} v_{,r}) + \frac{C}{6} K_3^- \left( v_{,rr} + \frac{v_{,r}}{r} \right) &= -q + g_\omega, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $a_i$ ,  $K_k^-$  – коэффициенты выражаются через упругие и геометрические характеристики слоев пластины и приведены в [20];  $L_2, L_3$  – линейные дифференциальные операторы

$$L_2(g) = \frac{1}{r}((rg)_{,r})_{,r}, \quad L_3(g) = \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r}.$$

Нелинейные добавки включены в правой части уравнений (6) в слагаемые с индексом « $\omega$ ». Они вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} p_\omega &= T_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(T_{r\omega} - T_{\varphi\omega}), \quad h_\omega = H_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(H_{r\omega} - H_{\varphi\omega}), \\ q_\omega &= M_{r\omega,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega,r} - M_{\varphi\omega,r}), \quad g_\omega = D_{r\omega,rr} + \frac{1}{r}(2D_{r\omega,r} - D_{\varphi\omega,r}), \end{aligned} \quad (7)$$

с учетом соотношений (3), (4), (5).

Краевая задача замыкается добавлением к дифференциальным уравнениям (6) силовых или кинематических граничных условий на контуре. Например, при жесткой заделке на контуре пластины ( $r = r_0$ ) должны выполняться требования

$$u^{(n)} = \psi^{(n)} = w^{(n)} = v^{(n)} = w_{,r}^{(n)} = v_{,r}^{(n)} = 0. \quad (8)$$

**2 Решение краевой задачи.** Для решения нелинейной системы уравнений (6) применен метод последовательных приближений, основанный на методе упругих решений Ильюшина. Итерационное решение системы дифференциальных уравнений будет

$$\begin{aligned} \psi^{(n)} &= -\frac{1}{a_6} L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) + \frac{C_1^{(n)} r}{4a_6} (2 \ln r - 1) - \\ &\quad - \frac{1}{a_6} (a_3 u^{(n)} - a_8 w_{,r}^{(n)} - a_9 v_{,r}^{(n)}) + C_3^{(n)} \frac{r}{2} + C_4^{(n)} \frac{1}{r}, \\ u^{(n)} &= b_1 v_{,r}^{(n)} + b_2 L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) + b_3 L_3^{-1}(q - g_\omega^{(n-1)}) - b_2 C_1^{(n)} \frac{r}{4} (2 \ln r - 1) - \\ &\quad - b_3 C_2^{(n)} \frac{r}{4} (2 \ln r - 1) + b_4 L_2^{-1}(h_\omega^{(n-1)}) + b_5 L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) + C_5^{(n)} \frac{r}{2} + C_6^{(n)} \frac{1}{r}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
v^{(n)} = & -\frac{C_7^{(n)}}{\beta} J_0(\beta r) - \frac{C_8^{(n)}}{\beta} Y_0(\beta r) + \frac{\pi}{2} \left( \int Y_1(\beta r) \int J_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr dr - \right. \\
& \left. - \int J_1(\beta r) \int Y_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr dr \right) + C_9^{(n)}, \\
w^{(n)} = & b_6 \int u^{(n)} dr - \frac{a_6 a_7 - a_5 a_9}{a_6^2 - a_5 a_8} v^{(n)} - \frac{a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} \int L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) dr - \\
& - \frac{a_6}{(a_6^2 - a_5 a_8)} \int L_2^{-1}(h_\omega^{(n-1)}) dr + \frac{C_1^{(n)} a_5}{(a_6^2 - a_5 a_8)} \frac{r^2}{4} (\ln r - 1) + C_{10}^{(n)} \frac{r^2}{4} + C_{11}^{(n)} \ln r + C_{12}^{(n)},
\end{aligned}$$

где  $n$  – номер приближения;  $C_1^{(n)}, C_2^{(n)}, \dots, C_{12}^{(n)}$  следуют из условия ограниченности решения в начале координат и граничных условий (8);  $q_1^{(n-1)}(r)$  – функция, зависящая от вида нагрузки и нелинейных добавок

$$q_1^{(n-1)} = p_1 \frac{1}{r} \int (q - q_\omega^{(n-1)}) r dr + p_2 \frac{1}{r} \int (q - g_\omega^{(n-1)}) r dr,$$

$p_1, p_2$  – константы, выражающиеся через параметры  $a_i$ ; нелинейные добавки в (9) вычисляются по результатам предыдущего приближения по формулам типа (7), в которых всем слагаемым нужно добавить верхний индекс  $(n-1)$ ; производные от прогиба и функции обжатия задаются формулами

$$\begin{aligned}
w_{,r}^{(n)} = & \frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} u^{(n)} - \frac{a_6 a_7 - a_5 a_9}{a_6^2 - a_5 a_8} v_{,r}^{(n)} - \frac{a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) - \\
& - \frac{a_6}{a_6^2 - a_5 a_8} L_2^{-1}(h_\omega^{(n-1)}) + \frac{C_1^{(n)} a_5}{(a_6^2 - a_5 a_8)} \frac{r}{4} (2 \ln r - 1) + C_{10}^{(n)} \frac{r}{2} + C_{11}^{(n)} \frac{1}{r}, \\
v_{,r}^{(n)} = & C_7^{(n)} J_1(\beta r) + C_8^{(n)} Y_1(\beta r) + \\
& + \frac{\pi}{2} \left( Y_1(\beta r) \int J_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr - J_1(\beta r) \int Y_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr \right).
\end{aligned}$$

Для сплошных круговых пластин, исходя из условия ограниченности решения в начале координат, следует положить

$$C_1^{(n)} = C_2^{(n)} = C_4^{(n)} = C_6^{(n)} = C_8^{(n)} = C_{11}^{(n)} = 0. \quad (10)$$

Оставшиеся константы интегрирования следуют из принятых граничных условий типа (8).

Константы интегрирования в случае жесткой заделки контура пластины:

$$\begin{aligned}
C_3^{(n)} = & \frac{2}{a_6 r_0} L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0}, \quad C_5^{(n)} = -\frac{2b_2}{r_0} L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0} - \\
& - \frac{2b_3}{r_0} L_3^{-1}(q - g_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0} - \frac{2b_4}{r_0} L_2^{-1}(h_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0} - \frac{2b_5}{r_0} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_7^{(n)} &= -\frac{\pi}{2J_1(\beta r_0)} \left( Y_1(\beta r_0) \int J_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr \Big|_{r=r_0} - \right. \\
&\quad \left. - J_1(\beta r_0) \int Y_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr \Big|_{r=r_0} \right), \quad C_9^{(n)} = \frac{C_7^{(n)}}{\beta} J_0(\beta r_0) - \\
&\quad - \frac{\pi}{2} \left( \int Y_1(\beta r) \int J_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr dr \Big|_{r=r_0} - \int J_1(\beta r) \int Y_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr dr \Big|_{r=r_0} \right), \\
C_{10}^{(n)} &= \frac{2a_5}{(a_6^2 - a_5 a_8) r_0} L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0} + \frac{2a_6}{(a_6^2 - a_5 a_8) r_0} L_2^{-1}(h_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0}, \\
C_{12}^{(n)} &= \left( \frac{a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} - b_2 \frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} \right) \int L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) dr \Big|_{r=r_0} + \\
&\quad + \left( \frac{a_6}{(a_6^2 - a_5 a_8) r_0} - \frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} b_4 \right) \int L_2^{-1}(h_\omega^{(n-1)}) dr \Big|_{r=r_0} - \\
&\quad - b_5 \frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} \int L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) dr \Big|_{r=r_0} - b_3 \frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} \int L_3^{-1}(q - g_\omega^{(n-1)}) dr \Big|_{r=r_0} - \\
&\quad - \frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} C_5^{(n)} \frac{r_0^2}{4} - C_{10}^{(n)} \frac{r_0^2}{4}. \tag{11}
\end{aligned}$$

Таким образом, формулы (9) с константами интегрирования (10), (11) дают итерационное решение задачи об изгибе круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым наполнителем при жесткой заделке ее контура.

**3 Численные результаты.** В качестве материала несущих слоев пластины при расчетах принят алюминиевый сплав Д16Т, наполнителя – фторопласт-4 (ПТФЭ). Параметры упругости и нелинейности этих материалов приведены в [6, 23]. При численной реализации итерационного решения величина нагрузки и толщины слоев подбирались так, чтобы нелинейные свойства материалов слоев проявились в достаточной степени:  $q = -3$  МПа,  $h_1 = h_2 = 0,03$ ,  $c = 0,23$ . Пластина жестко заделана по контуру, ее радиус  $r_0 = 1$  м. Все геометрические параметры пластины и линейные перемещения отнесены к ее радиусу.

Влияние физической нелинейности материалов слоев на напряженное состояние рассматриваемой пластины отражено на рисунках 1–4. Рисунок 1 иллюстрирует изменение радиальных напряжений  $\sigma_r^{(k)}$  по толщине в центре пластины. Максимальные напряжения в нижнем несущем слое за счет нелинейного деформирования пластины увеличиваются до 27 %. В наполнителе – до 47 %.

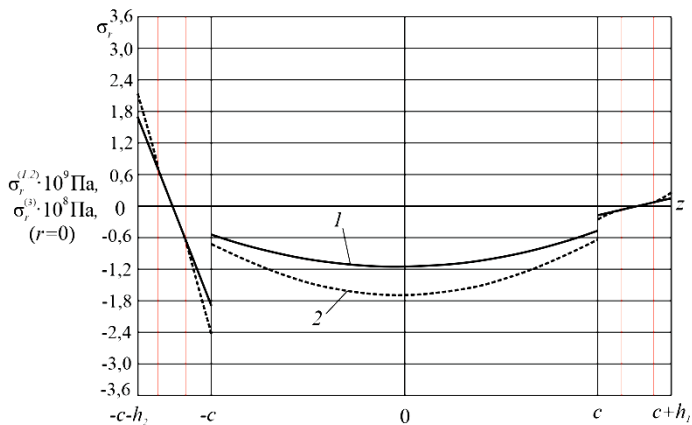


Рисунок 1 – Изменение радиальных напряжений  $\sigma_r^{(k)}$  по толщине в центре пластины: 1 – упругая пластина; 2 – физически нелинейная

Изменение окружных напряжений  $\sigma_\phi^{(k)}$  по толщине пластины в ее центре показано на рисунке 2. Увеличение максимальных напряжений за счет нелинейного деформирования здесь незначительно: в нижнем несущем слое 5,5 %, в заполнителе – 1,6 %.

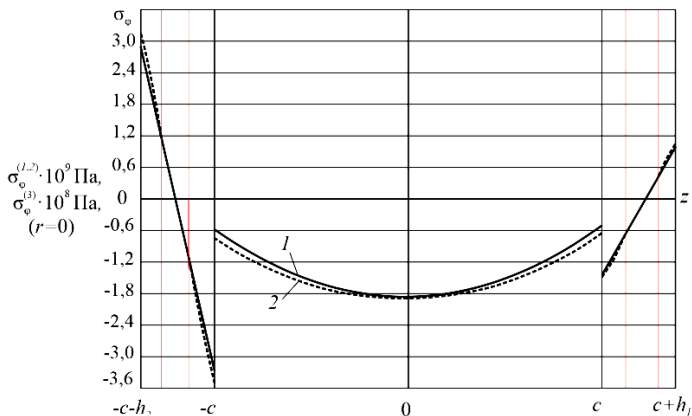


Рисунок 2 – Изменение окружных напряжений  $\sigma_\phi^{(k)}$  по толщине в центре пластины: 1 – упругая пластина; 2 – физически нелинейная

Рисунок 3 иллюстрирует изменение радиальных напряжений  $\sigma_r^{(k)}$  по толщине на контуре пластины. Нижний слой деформируется упруго. В верхнем слое рост напряжений на 15,3 %, в заполнителе – на 16 %.

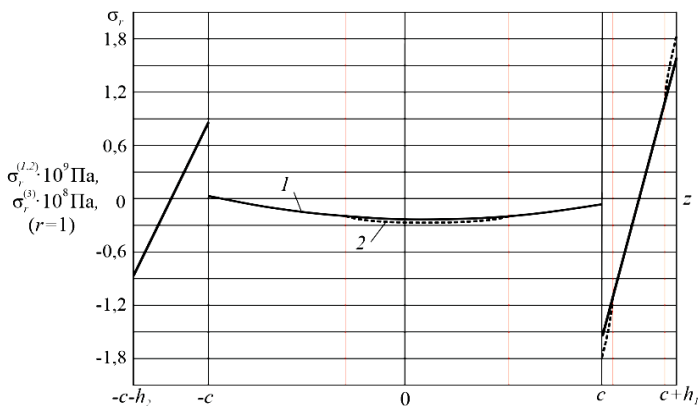


Рисунок 3 – Изменение радиальных напряжений  $\sigma_r^{(k)}$  на контуре пластины:  
1 – упругая пластина; 2 – физически нелинейная

Картина изменения окружных напряжений  $\sigma_\phi^{(k)}$  по толщине в центре пластины (рисунок 4) совпадает с распределением радиальных напряжений, показанном на рисунке 3. В верхнем слое рост напряжений на 19,7 %, в заполнителе – на 19,1 %.

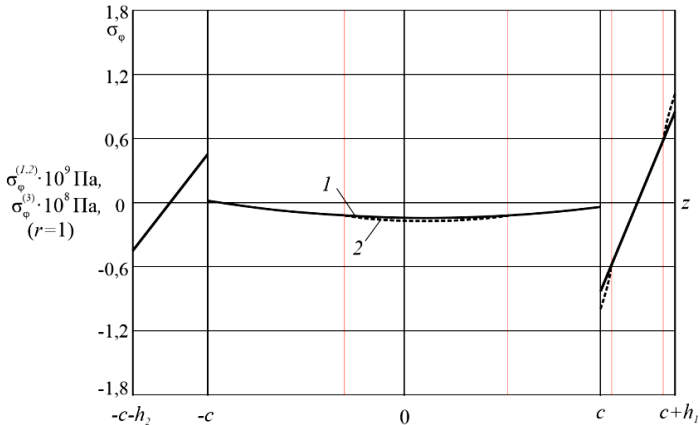


Рисунок 4 – Изменение окружных напряжений  $\sigma_\phi^{(k)}$  на контуре пластины:  
1 – упругая пластина; 2 – физически нелинейная

**Заключение.** Выполненные расчеты показывают, что учет сжимаемости заполнителя приводит к увеличению напряжений в несущих слоях до 27 %. Таким образом, полученное аналитическое решение позволяет увеличить точность прочностных расчетов при исследовании напряженно-деформированного состояния трехслойных круговых пластин со сжимае-



мым наполнителем при осесимметричных нагрузках с учетом нелинейных деформаций материалов слоев.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Т19РМ-089).*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Starovoitov, E. I.** Foundations of the theory of elasticity, plasticity, and viscoelasticity / E. I. Starovoitov, F. B. Nagiyev. – Toronto, New Jersey : Apple Academic Press, 2012. – 346 p.

2 **Carrera, E.** Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells / E. Carrera // Archives of Computational Methods in Engineering. – 2002. – Vol. 9, Is. 2. – P. 87–140.

3 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование упругого трехслойного стержня локальными нагрузками / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2001. – № 4. – С. 37–40.

4 **Осадчий, Н. В.** Исследование поперечного изгиба сотовой трехслойной панели с круговой осью / Н. В. Осадчий, В. Т. Шепель // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2018. – № 1. – С. 86–93.

5 **Янковский, А. П.** Моделирование упругопластического изгиба сэндвич-панелей с тонкими армированными несущими слоями / А. П. Янковский // Механика машин, механизмов и материалов. – 2018. – № 1(42). – С. 72–80.

6 **Gorshkov, A. G.** Harmonic Vibrations of a Viscoelastoplastic Sandwich Cylindrical Shell / A. G. Gorshkov, E. I. Starovoitov, A. V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2001. – Vol. 37, No. 9. – P. 1196–1203.

7 **Starovoitov, E. I.** Vibration of circular sandwich plates under resonance loads / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. – Vol. 39, No. 12. – P. 1458–1463.

8 **Тарлаковский, Д. В.** Нестационарные задачи для упругой полуплоскости с подвижной точкой смены граничных условий // Д. В. Тарлаковский, Г. В. Федотенков // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 3. – С. 188–206.

9 **Юрченко, А. А.** Численное моделирование деформирования трехслойных панелей при кратковременных нестандартных воздействиях / А. А. Юрченко // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2011. – № 4. – С. 85–92.

10 **Starovoitov, E. I.** Resonant effects of local loads on circular sandwich plates on an elastic foundation / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // International Applied Mechanics. – 2010. – Vol. 46, No. 1. – P. 86–93.

11 **Старовойтов, Э. И.** Колебания круговых композитных пластин на упругом основании под действием локальных нагрузок / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика композитных материалов. – 2016. – Т. 52, № 5. – С. 943–954.

12 **Козел, А. Г.** Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 127–133.

13 **Козел, А. Г.** Решение задачи об изгибе упругопластической круговой пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика. – 2019. – Вып. 34. – С. 165–171.

14 **Зеленая, А. С.** Деформирование упругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем / А. С. Зеленая // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Естественные науки. – 2017. – № 6 (105). – С. 89–95.

15 **Зеленая, А. С.** Цилиндрический изгиб упругопластической прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем в температурном поле / А. С. Зеленая // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 1 (38). – С. 45–49.

16 **Захарчук, Ю. В.** Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 4(33). – С. 53–57.

17 **Захарчук, Ю. В.** Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – Вып. 10. – С. 55–66.

18 **Захарчук, Ю. В.** Деформирование круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Теоретическая и прикладная механика. – 2018. – Вып. 33. – С. 363–369.

19 **Захарчук, Ю. В.** Влияние сжимаемости наполнителя на перемещения в трехслойной круговой симметричной пластине // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2018. – № 2. – С. 14–27.

20 **Старовойтов, Э. И.** Изгиб круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым наполнителем / Э. И. Старовойтов, Ю. В. Захарчук // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2018. – № 4. – С. 88–97.

21 **Захарчук, Ю. В.** Трехслойная круговая упругопластическая пластина со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4 (37). – С. 72–79.

22 **Захарчук, Ю. В.** Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 80–87.

23 **Старовойтов, Э. И.** Сопrotивление материалов / Э. И. Старовойтов. – М. : Физматлит, 2008. – 384 с.

*Yu. V. ZAKHARCHUK*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## **STRESS-STRAIN STATE OF A CIRCULAR THREE LAYER PLATE WITH A COMPRESSIBLE FILLER**

The boundary value problem of bending of an elastic-plastic circular sandwich plate with compressible filler is formulated. The Kirchhoff's hypotheses are accepted for the thin bearing layers. In the relatively thick lightweight filler, the hypothesis of Timoshenko is applied with a linear approximation of the deflection and a quadratic approximation of the radial displacements over the layer thickness. On the contour there is a rigid diaphragm that prevents the relative shift of the layers. The physical equations of state in the bearing layers correspond to the theory of small elastic-plastic deformations of Ilyushin. The filler is nonlinear elastic. The inhomogeneous system of the equilibrium nonlinear differential equations is obtained by the Lagrange variation method. The method of successive approximations based on the method of the elastic solutions is applied for the solution. The general iterative analytical solution of the boundary value problem in Bessel functions is obtained. Numerical results are obtained for a three-layer metal-polymer-metal package.

Получено 25.11.2019