

УДК 623.45

Ю. П. СМЕРНОВ, В. К. ТАРАСОВ

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

О РАЗЛИЧИИ ЗАКОНОВ ВЕРТИКАЛЬНОГО И ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ЛИНИИ ЦЕЛИ ПРИ ОТСЛЕЖИВАНИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ТОЧЕЧНОЙ ЦЕЛИ

Аналитически и графически показано существенное различие законов вертикального и горизонтального вращения линии цели при равномерном и прямолинейном движении цели. Эти законы движения должны обрабатываться соответствующими следящими приводами.

Ключевые слова: линия цели, кинематические уравнения, аналитические зависимости, анализ экстремумов.

Введение. В существующей литературе вращение линии цели (её также называют осью прицела или линией визирования), отслеживающей прямолинейное вертикальное движение точки, описывается законом арктангенса [1, 2]. В представленной работе показано существенное различие законов движения линии цели в разных плоскостях – вертикальной и горизонтальной.

Постановка задачи. Движение точечной цели A , через которую всегда проходит линия визирования OA , (рисунок 1) задано кинематическими уравнениями:

$$x_A = x_0 + vt; \quad y_A = p; \quad z_A = h. \quad (1)$$

Для простоты взята горизонтальная траектория точки A и, кроме того, ось Ox параллельна траектории точки A . Начало координат неподвижной системы осей и наблюдатель помещены в точку O , v – скорость точки, h – высота траектории, p – боковое удаление траектории от оси z , x_0 – начальное значение координаты x .

Требуется выразить углы ψ и ϕ , под которыми наблюдается точка A из начала координат, как функции времени t и параметров v , p , h , x_0 . Названные углы определяют движение линии цели в горизонтальной и вертикальной плоскостях соответственно. Кроме того, требуется определить законы изменения угловых скоростей $\dot{\psi}$, $\dot{\phi}$ и ускорений $\ddot{\psi}$, $\ddot{\phi}$, а также произведений $\dot{\psi}\dot{\psi}$ и $\dot{\phi}\dot{\phi}$.

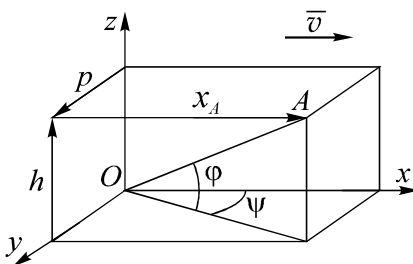


Рисунок 1 – Расчетная схема задачи о визировании точки A

Решение. Из расчетной схемы, представленной на рисунке 1, следуют зависимости для углов

$$\operatorname{ctg} \psi = \frac{x_0 + vt}{p}, \quad \operatorname{ctg} \varphi = \frac{\sqrt{[x_0 + vt]^2 + p^2}}{h}. \quad (2)$$

Чтобы получить искомые выражения угловых скоростей и ускорений, а также их произведений, продифференцируем формулы (2) по времени дважды. Получим:

$$\dot{\psi} = -\frac{v}{p} \sin^2 \psi = -\frac{vp}{p^2 + (x_0 + vt)^2}; \quad (3)$$

$$\ddot{\psi} = 2 \frac{v^2}{p^2} \sin^3 \psi \cos \psi = \frac{2v^2 p (x_0 + vt)}{[p^2 + (x_0 + vt)^2]^2}; \quad (4)$$

$$\psi \dot{\psi} = -\frac{2V^3}{p^3} \sin^5 \psi \cos \psi = -\frac{2V^3 p^2 (x_0 + Vt)}{[p^2 + (x_0 + Vt)^2]^3}; \quad (5)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{V}{h} \sin^2 \varphi \cos \varphi = -\frac{Vh(x_0 + Vt)}{[(x_0 + Vt)^2 + p^2 + h^2] \sqrt{(x_0 + Vt)^2 + p^2}}; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} = & \frac{2V^2 h (x_0 + vt)^2}{[(x_0 + vt)^2 + p^2 + h^2]^2 \sqrt{(x_0 + vt)^2 + p^2}} - \\ & - \frac{v^2 h p^2}{[(x_0 + vt)^2 + p^2 + h^2][(x_0 + vt)^2 + p^2]^{3/2}}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} \ddot{\varphi} = & -\frac{2v^3 h^2 (x_0 + vt)^3}{[(x_0 + vt)^2 + p^2 + h^2]^3 [(x_0 + vt)^2 + p^2]} + \\ & + \frac{v^3 h^2 p^2 (x_0 + vt)}{[(x_0 + vt)^2 + p^2 + h^2]^2 [(x_0 + vt)^2 + p^2]}. \end{aligned} \quad (8)$$

Анализ экстремальных значений выражений (3)–(8) дает следующие результаты:

– максимальное значение угловой скорости $|\dot{\psi}|_{\max} = \frac{v}{p}$ достигается при

значении времени $t_m = -\frac{x_0}{v}$;

– экстремум углового ускорения $|\ddot{\psi}|_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \frac{v^2}{p^2}$ имеет место в момент

$$t_m^* = -\frac{x_0}{v} \pm \frac{p}{v\sqrt{3}};$$

– максимум произведения угловой скорости и углового ускорения

$$|\dot{\psi}\ddot{\psi}|_{\max} = \frac{125}{108\sqrt{5}} \frac{v^3}{p^3} \approx 0,5167 \frac{v^3}{p^3}$$

достигается в моменты времени

$$t_m^{**} = -\frac{x_0}{v} \pm \frac{p}{v\sqrt{5}};$$

– экстремум угла поворота ϕ составляет $\phi_{\max} = \arctg \frac{h}{p}$ и соответствует

времени $t_m = -\frac{x_0}{v}$;

– максимальное значение угловой скорости

$$|\dot{\phi}|_{\max} = \frac{v}{h} \frac{\sqrt{-\frac{p}{h} + \sqrt{8+9\frac{p^2}{h^2}}}}{\left(1 + \frac{3p^2}{4h^2} + \frac{p}{4h} \sqrt{8+9\frac{p^2}{h^2}}\right) \sqrt{3\frac{p}{h} + \sqrt{8+9\frac{p^2}{h^2}}}}$$

достигается при

$$t_m^{***} = -\frac{x_0}{v} \pm \frac{1}{2v} \sqrt{p\sqrt{9p^2 + 8h^2} - p^2};$$

– минимум углового ускорения

$$\ddot{\phi}_{\min} = -\frac{v^2}{h^2 + p^2} \cdot \frac{h}{p}$$

наблюдается при

$$t_m = -\frac{x_0}{v}.$$

Максимумы углового ускорения $\ddot{\phi}$ и экстремумы произведения $\dot{\phi}\ddot{\phi}$ не выражаются в радикалах, но могут быть при необходимости найдены в результате численного решения алгебраических уравнений.

Графики, качественно отражающие характер зависимостей (2)–(8), построены в интервале изменения аргумента x от $-\infty$ до $+\infty$ и представлены на рисунке 2.

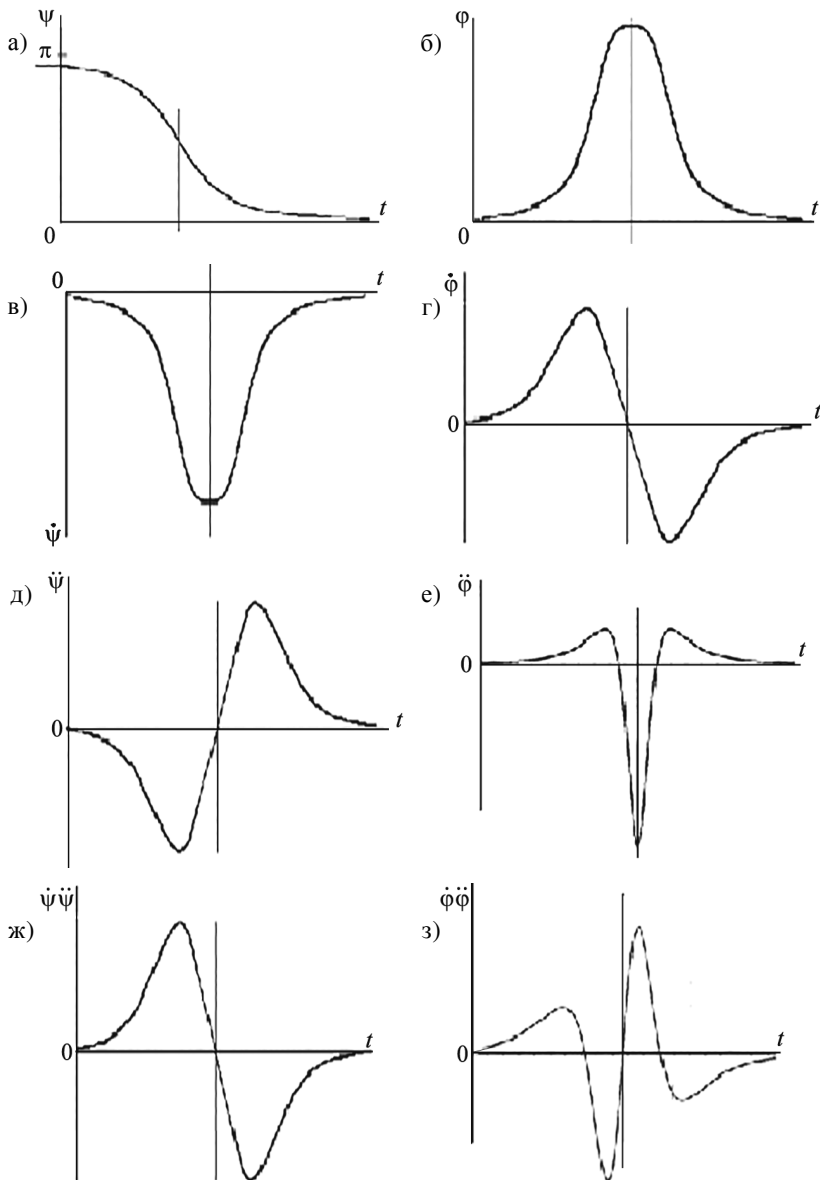


Рисунок 2 – Графики, характеризующие изменение кинематических параметров от времени:
 $a - \psi(t)$, $б - \varphi(t)$, $в - \dot{\psi}(t)$, $г - \dot{\varphi}(t)$, $д - \ddot{\psi}(t)$, $е - \ddot{\varphi}(t)$, $ж - \dot{\psi}(t) \cdot \ddot{\psi}(t)$, $з - \dot{\varphi}(t) \cdot \ddot{\varphi}(t)$

Формулы (2)–(9) и графики наглядно показывают, сколь существенно отличаются законы вращения линии цели OA в разных плоскостях.

При перемещении точки A из минус бесконечности в плюс бесконечность угол ψ непрерывно уменьшается, а угол ϕ имеет максимум, когда отрезок OA имеет минимальную длину.

Угловая скорость $\dot{\psi}$ имеет экстремум на расстоянии наибольшей близости точек O и A , график же $\dot{\phi}$ имеет нуль в этой точке, но зато два экстремума разных знаков по соседству.

График $\ddot{\psi}$ имеет нуль в точке наибольшей близости и два экстремума разных знаков, а график $\ddot{\phi}$ имеет три экстремума и два раза проходит через нуль.

График $\dot{\psi}\ddot{\psi}$ имеет два экстремума и один раз проходит через нуль, а у графика $\dot{\phi}\ddot{\phi}$ четыре экстремума и три нулевых точки. При $p \rightarrow 0$ зависимости для $\dot{\psi}$, $\ddot{\psi}$, $\ddot{\phi}$ претерпевают разрывы, а график ψ превращается в ступеньку, функции ϕ и $\dot{\psi}$ превращаются в δ -функции, функции же $\dot{\phi}$, $\ddot{\psi}$, $\ddot{\phi}$ превращаются в производные δ -функции по времени.

Приведенные формулы и графики дают возможность приближенно оценивать величины углов, угловых скоростей и ускорений линии цели. Знание этих величин необходимо для разработки силовых следящих приводов, управляющих движением ствола. Для более точного определения положения ствола необходимо исчислять время полета снаряда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Попков, С. Л. Следящие системы / С. Л. Попков. – М. : Высш. шк. – 1963. – 304 с.

2 Беляев, Н. И. Выбор двигателя и редуктора следящих систем / Н. И. Беляев, В. Д. Нагорский. – М. : Машиностроение. – 1972. – 216 с.

3 Токарев, А. Д. Теория и расчет пулеметных станков и зенитных установок / А. Д. Токарев, С. Б. Штейн, Н. А. Сахнов. – Пенза : ПВАИУ. – 1976. – 301 с.

YU. P. SMIRNOV, V. K. TARASOV

Tula State University, Tula, Russia

ABOUT THE DIFFERENCES OF VERTICAL AND HORIZONTAL MOVEMENT LAWS OF THE OBJECT LINE AT THE POINT OBJECT MOVEMENT TRACKING

The essential difference between the laws of vertical and horizontal rotation of the target line is analytically and graphically shown for uniform and rectilinear movement of the target. These laws of motion must be practiced by appropriate servo drives.

Получено 16.04.2017