

УДК 624.072.21.7

*К. А. СИРОШ, О. В. КОЗУНОВА, А. А. ВАСИЛЬЕВ*

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

## **ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПЛАСТИНЫ КАК ЗАКЛАДНОЙ ДЕТАЛИ ОПОРНОГО УЗЛА В НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ**

Рассматривается закладная деталь опорного узла «ригель – консоль колонны» и исследуется ее напряженно-деформированное состояние в нелинейной постановке. Способом расчета данного элемента опорного соединения строительной конструкции является вариационно-разностный метод (ВРМ). Приведены дифференциальные соотношения полной потенциальной энергии пластинки и действующей на нее нагрузки. Проведен анализ эпюр горизонтальных напряжений на предмет соблюдения принципа Сен-Венана в характерных сечениях: на краю и в середине пластины.

**Ключевые слова:** закладная деталь, вариационно-разностный метод, принцип Сен-Венана, физическая нелинейность, итерационный алгоритм.

**Введение.** Одним из приближенных способов расчета строительных конструкций является вариационно-разностный метод (ВРМ). Его сущность состоит в реализации вариационного принципа Лагранжа с применением метода конечных разностей и заключается в сведении задачи минимизации функционала полной потенциальной энергии, являющейся квадратичной функцией относительно деформаций и перемещений, к задаче минимизации функции многих переменных, отнесенных к узлам конечно-разностной сетки [1].

Ранее ВРМ применялся для расчета контактных задач о взаимодействии балочных плит с нелинейно-упругим основанием. Постановка, алгоритм и результаты нелинейного решения таких задач приводятся в статье [2].

К достоинствам вариационно-разностного метода можно отнести следующие его качества:

- 1) простоту математической формулировки задачи;
- 2) ясный физический смысл используемого функционала;
- 3) автоматическое выполнение уравнений равновесия и статических граничных условий;
- 4) возможность использования метода для расчета тел сложной формы, в том числе неоднородных по деформационно-прочностным характеристикам материалов;
- 5) нелинейные расчеты сводятся к решению системы линейных алгебраических уравнений, для реализации которой существует достаточно надежный математический аппарат линейной алгебры.

В представленной работе авторами поставлена задача об исследовании одной из гипотез теории упругости, принципа Сен-Венана, на соответствие

его выполнения при статических расчетах нелинейно-упругих пластин. Рассматривается постановка краевой задачи и итерационный алгоритм нелинейного расчета пластин вариационно-разностным методом (ВРМ).

**Постановка задачи.** Закладная деталь опорного узла моделируется пластиной размерами  $l \times h$  с упругими параметрами  $E_0, \mu_0$  под действием сосредоточенных сил  $R$  в условии плоского напряженного состояния (рисунок 1).

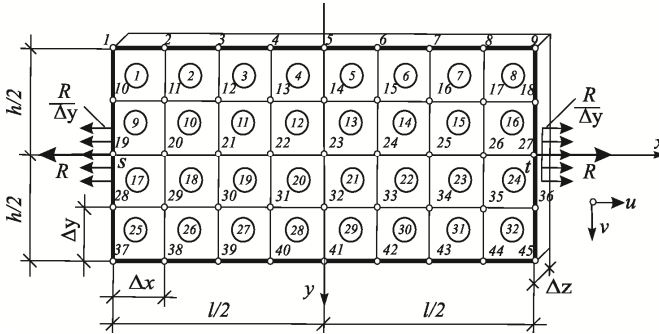


Рисунок 1 – Разбивочная сетка расчетной модели

**Граничные условия контактных задач.** При рассмотрении дифференциальных уравнений строительной механики и теории упругости полученное решение обязательно должно удовлетворять граничным (краевым) условиям решаемой задачи. Все граничные условия делятся на три типа: 1) кинематические (геометрические); 2) статические; 3) смешанные.

На рисунке 2 показана расчетная область базовой задачи нелинейных расчетов пластинки на упругом неоднородном основании, с соответствующими граничными условиями.

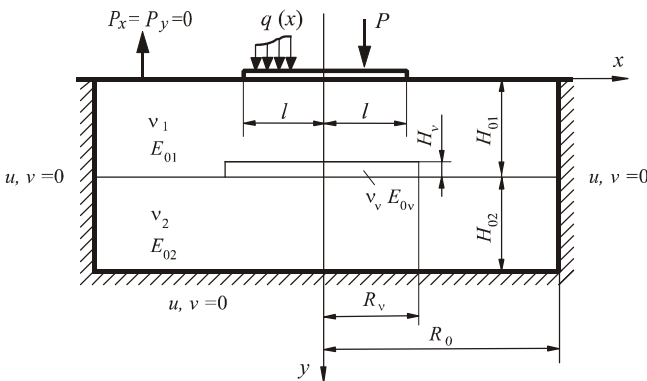


Рисунок 2 – Расчетная область. Граничные условия

Рассматриваемая краевая задача замыкается кинематическими и статическими граничными условиями.

*Кинематические граничные условия* [3] реализуются на границе принятой расчетной области и в контактной зоне (см. рисунок 2), а именно:

1) на границе принятой расчетной области перемещения в направлении осей  $X$  и  $Y$  принимается равными нулю  $u = 0$  и  $v = 0$ ;

2) в контактной зоне справедливо равенство осадок основания  $v_i$  прогибам пластинки  $y_k$

$$v_i = y_k . \quad (1)$$

*Статические граничные условия* определяются действием внешних по отношению к рассматриваемой области сил и моментов. На рисунке 2 продемонстрированы статические граничные условия в усилиях вне контактной зоны, а именно

$$P_x = P_y = 0. \quad (2)$$

Условия (2) в напряжениях приведены на рисунке 3, *а*. Для крайних точек  $k$  пластинки (рисунок 3, *б*) имеют место статические граничные условия для поперечных сил и изгибающих моментов:

$$Q^{(k)} \Big|_{x=\pm l} = -EJ \frac{d^3 y_k}{dx^3} = 0 ; \quad M^{(k)} \Big|_{x=\pm l} = -EJ \frac{d^2 y_k}{dx^2} = 0. \quad (3)$$

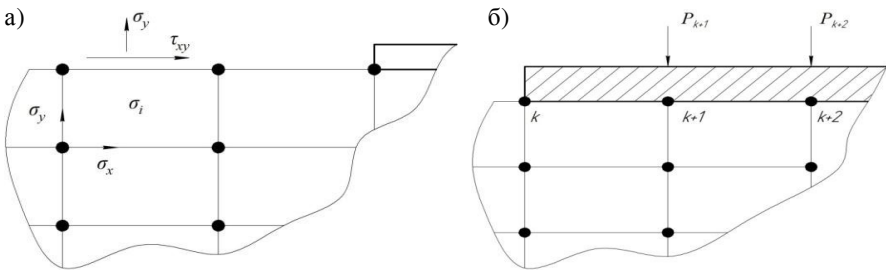


Рисунок 3 – Статические граничные условия: *а*) для напряжений, *б*) для сил и моментов

**Алгоритм расчета в нелинейной постановке.** Разобьем пластинку прямоугольной сеткой (см. рисунок 1) на отдельные ячейки (рисунок 4) и найдем энергию деформаций [3] для отдельной ячейки с номером “ $j$ ”.

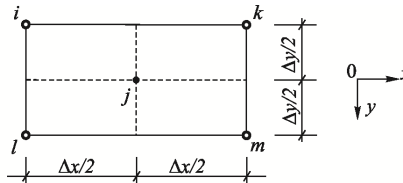


Рисунок 4 – Прямоугольная ячейка метода конечных разностей

Получаем выражение

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathcal{E}_j &= \left[ \frac{E_j^{(m)}}{1-\mu_0^2} \left( (\varepsilon_x^j)^2 + (\varepsilon_y^j)^2 + 2\mu_0 \varepsilon_x^j \varepsilon_y^j \right) + \frac{E_j^{(m)}}{4(1+\mu)} (\gamma_{xy}^j)^2 \right] \Delta x \Delta y = \\
 &= \left[ \frac{E_j^{(m)}}{1-\mu_0^2} \left( \frac{1}{2\Delta x} (u_k + u_m - u_i - u_l) \right)^2 + \left( \frac{1}{2\Delta y} (v_k + v_i - v_l - v_m) \right)^2 + \right. \\
 &+ \frac{2\mu_0}{2\Delta x} (u_k + u_m - u_i - u_l) \frac{1}{2\Delta y} (v_k + v_i - v_l - v_m) \left. \right] + \\
 &+ \frac{E_j^{(m)}}{4(1+\mu_0)} \left( \frac{1}{2\Delta y} (u_i + u_k - u_l - u_m) + \frac{1}{2\Delta x} (v_k + v_m - v_l - v_i) \right)^2 \left. \right] \Delta x \Delta y.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Тогда полная энергия пластинки и действующей на нее нагрузки представится в виде суммы

$$\mathcal{E} = \sum_{n=1} \Delta \mathcal{E}_j - R(u_s + u_t), \tag{5}$$

где  $n$  – количество ячеек разбивочной области, в рассматриваемом случае  $n = 32$ .

Далее, дифференцируя (5) по каждому узловому перемещению, получаем систему линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим алгоритм решения задачи для случая физической нелинейности, связанной с изменением свойств материала по объему области. Вначале определяются перемещения  $u_0$  и  $v_0$  при начальном модуле упругости  $E_0$ . Далее для определения напряженно-деформированного состояния пластины как закладной детали опорного узла в *нелинейной постановке* предусматривается организация итерационного алгоритма, где *линейный расчет становится нулевой итерацией*.

*1-я итерация.* Находим интенсивность деформации для центра каждой  $j$ -той ячейки

$$\varepsilon_j^{(0)} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x^{(0)} - \varepsilon_y^{(0)})^2 + \varepsilon_y^{(0)2} + \varepsilon_x^{(0)2} + \frac{3}{2} \gamma_{xy}^{(0)2}}. \tag{6}$$

Конечно-разностные соотношения для относительных деформаций (6) приводятся ранее в формуле (4).

Определяем касательный модуль для ячейки с номером « $j$ »

$$E_j^{(1)} = \frac{E_0}{\operatorname{ch}^2 \left( \frac{E_0}{\sigma_u} \varepsilon_j^{(0)} \right)}, \tag{7}$$

где  $\sigma_u$  – предел текучести материала.

Находим выражение для полной энергии системы при касательном модуле  $E_j^{(1)}$  в каждой ячейке. Дифференцируем ее и из системы линейных алгебраических уравнений определяем узловые перемещения  $u_1$  и  $v_1$ .

*2-я итерация.* Последовательность действий аналогична первой итерации. Находим интенсивность деформации для центра каждой  $j$ -той ячейки по формуле (6) и касательный модуль деформации по формуле (7), в которые подставляем относительные деформации, полученные через соотношения из формулы (4), но для первой итерации.

Находим выражение для полной энергии системы при касательном модуле  $E_j^{(2)}$  в каждой ячейке. Дифференцируем и определяем узловые перемещения  $u_2$  и  $v_2$ .

Итерация с номером  $m$  выполняется аналогично предыдущим. Выражение интенсивности деформаций для этой итерации (в общем виде)

$$\varepsilon_j^{(m-1)} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x^{(m-1)} - \varepsilon_y^{(m-1)})^2 + \varepsilon_x^{(m-1)2} + \varepsilon_y^{(m-1)2} + \frac{3}{2} \gamma_{xy}^{(m-1)2}}. \quad (8)$$

В качестве примера численного нахождения решения организован итерационный цикл при постоянном коэффициенте Пуассона [4]. Приняты следующие исходные данные:  $E_0 = 2 \cdot 10^5$  МПа;  $\sigma_u = 240$  МПа;  $l = 0,4$  м;  $h = 0,2$  м;  $\Delta z = 0,01$  м,  $\mu_0 = 0,3$ ;  $R = 150$  кН.

На рисунке 5 приведены эпюры окончательных нормальных напряжений  $\sigma_x$  в двух вертикальных сечениях пластинки в центрах ячеек  $j = 5, 13, 21, 29$  – первое сечение (вблизи середины пластины),  $j = 8, 16, 24, 32$  – второе сечение (у края пластины), для сосредоточенной силы  $R$ , линейный расчет.

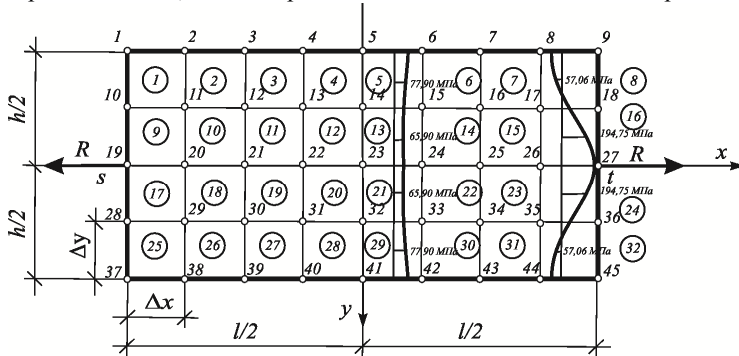


Рисунок 5 – Распределение  $\sigma_x$  в двух вертикальных сечениях пластинки (линейный расчет)

Знакопеременные эпюры  $\sigma_x$  на рисунке 5 (у края пластинки) с большими значениями напряжений в точке приложения сосредоточенной силы (линейный расчет – 194,75 МПа) полностью соответствуют принципу Сен-Венана в

части равномерного распределения перемещений (напряжений) по поперечному сечению от одной из системы сил, которая «состоит из сил, имеющих такую же геометрическую равнодействующую и такой же равнодействующий момент, как и заданные силы, но приложенные и распределенные так, чтобы вызвать перемещения, точно представленные формулами» [7].

**Заключение.** В результате проведенных исследований был разработан алгоритм определения напряженно-деформированного состояния пластины как закладной детали опорного узла в нелинейной постановке. В результате расчетов получено, что, очертание эпюр напряжений  $\sigma_x$  в основном соответствует принципу Сен-Венана [7, 8].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Козунова, О. В.** Нелинейный расчет фундаментных плит на слоистых основаниях, ослабленных биогенными включениями / О. В. Козунова // Вестник гражданских инженеров. – 2009. – 2(19). – С. 100–104.

2 **Барашков, В. Н.** Алгоритм реализации задач теории упругости и пластичности вариационно-разностным методом. Ч. 1 / В. Н. Барашков // Известия Томского политехнического университета. – 2003. – Т. 306, № 3. – С. 23–28.

3 **Рындин, Н. И.** Краткий курс теории упругости и пластичности / Н. И. Рындин. – Л. : Изд-во Ленинград. ун-та, 1974. – 174 с.

4 **Александров, А. В.** Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – М. : Высш. шк., 1990. – 398 с.

5 **Фихтенгольц, Г. М.** Основы математического анализа. Т. 1 / Г. М. Фихтенгольц. – СПб. : Лань, 2001. – 448 с.

6 **Калиткин, Н. Н.** Численные методы: учеб. пособие / Н. Н. Калиткин. – 2-е изд., испр. – СПб. : БХВ – Петербург, 2014. – 592 с.

7 **Сен-Венан, Б.** Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм / Б. Сен-Венан. – М. : Физматгиз, 1961. – 519 с.

8 **Джанелидзе, Г. Ю.** Принцип Сен-Венана и его использование в теории пластин и оболочек / Г. Ю. Джанелидзе, Л. Г. Пановко. – Расчет пространственных конструкций. – 1950. – № 1. – С. 329–342.

*K. A. SIROSH, O. V. KOZUNOVA, A. A. VASILIEV*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## VARIATIONAL-DIFFERENT INVESTIGATION OF DEFORMING FOR THE PLATE AS A EMBEDDED DETAIL OF A SUPPORT UNIT IN A NONLINEAR SETTING

It was considered the embedded part of the support assembly "bolt-console of the column" and it was analyzed its stress-strained condition in a nonlinear setting. The calculating method for the element of the supporting structure of the building structure was the variational-difference method. Differential ratios of the total potential energy of the plate and the load acting on it are given. The analysis of horizontal stresses diagram was made to determine if the Saint-Venant principle in characteristic sections was fulfilled at the edge and in the middle of the plate.

Получено 16.12.2017