УДК 624.072.21.7

О. В. КОЗУНОВА, А. А. ВАСИЛЬЕВ, С. В. КУМАШОВ
Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И АЛГОРИТМ НЕЛИНЕЙНОГО РАСЧЕТА БАЛКИ С ТРЕЩИНАМИ КАК ЭКВИВАЛЕНТНОГО ЭЛЕМЕНТА

Рассматривается фундаментная балка с трещинами на линейно-упругом основании. Получено дифференциальное уравнение ее изгиба. Приведены зависимости между возникающими в балке моментами, ее изгибной жесткостью и кривизной. Сформулирован алгоритм расчета фундаментной балки с трещинами в нелинейной постановке. Для решения дифференциального уравнения изгиба балки используется метод упругих решений в форме переменных параметров упругости.

Ключевые слова: фундаментная балка, трещина, железобетон, нелинейность, переменная кривизна, дифференциальное уравнение изгиба, метод упругих решений.

Введение. Разрабатывая расчетную модель системы «фундамент – основание», следует выделить и учесть наиболее существенные факторы, определяющие напряженно-деформированное состояние такой системы. Прежде всего, это относится к выбору моделей основания [1, 2], фундаментной конструкции [3, 4] и методов расчета [5, 6]. Его целесообразно осуществлять с позиций расчета по предельным состояниям [7].

Если средняя нагрузка на основание не превосходит расчетного сопротивления, то осадку и давления от реакции основания можно считать линейно-зависящими от нагрузки. В этом случае основным ограничением при назначении размеров фундамента, например для фундаментных плит больших размеров, являются предельные деформации основания, т. е. расчет ведется по второму предельному состоянию. Иная ситуация для фундаментных балок и фундаментов небольших размеров. Здесь часто бывает, что при расчете оснований по деформациям основным ограничением являются не предельные деформации, а расчетное сопротивление основания, т. е. расчет ведется по первому предельному состоянию.

При проектировании фундаментов, как правило, предполагается, что они будут работать с трещинами. В связи с этим предметом исследования в рассматриваемой работе является фундаментная балка с трещинами.

В этом случае необходимо учитывать нелинейные свойства железобетона через переменную кривизну элемента балки [5]. До образования трещин железобетонные конструкции могут быть рассчитаны как линейно-упругие. При нарушении сплошности материала вследствие трещинообразования расчет производится методом, основанным на приведении железобетонного элемента с трещинами эквивалентному ему по жесткости сплошному элементу [5].

Постановка задачи. Статический расчет фундаментной балки с трещинами предполагается выполнять, как для нелинейно-упругой балки, свободно опирающейся на линейно-упругое однородное основание. Граничные условия контактной задачи: прогибы балки равны осадкам основания, трением на контакте упругих тел пренебрегаем, справедливы статические условия на границе балки.

В приводимых далее исследованиях используется переменная (секущая) кривизна в зависимости «момент-кривизна», аппроксимированной нелинейной функцией, график которой для элемента балки прямоугольного сечения из бетона класса C20/25 (B25) приведен на рисунке 1, *а*. На рисунках 1, *б*, и 1, *в* показаны графики зависимостей изгибной жесткости соответственно от момента и кривизны [5]. Участок 0–1 соответствует стадии работы без трещин. В стадии с трещинами показано два графика: штриховой линией по формулам СНБ [8]; сплошной (участок 2–3) – с уточнениями значений ξ и ν по формулам (2.10) и (2.11) из [5]. При образовании трещин ($M = M_{crc}$) кривизна элемента балки возрастает скачком, т. е. изгибная жесткость немонотонно изменяется в зависимости от изгибающего момента (рисунок 1, *б*).

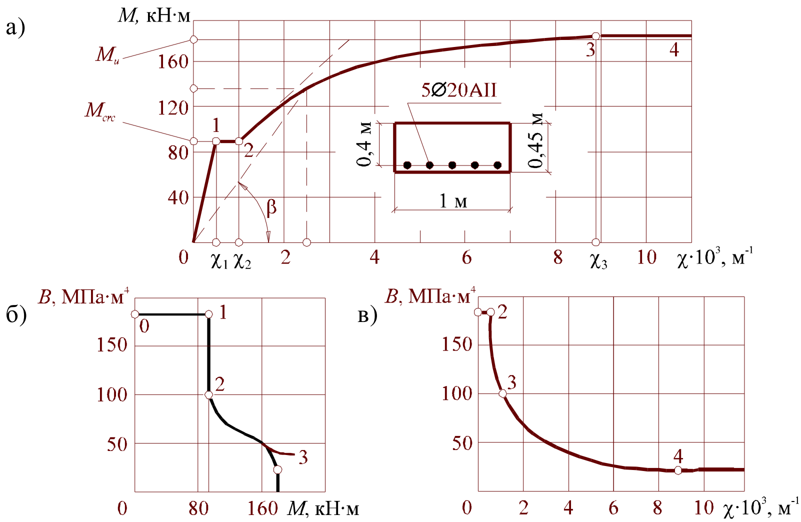

Рисунок 1 – Зависимость кривизны элемента балки (*а*) и изгибной жесткости (*б*) от момента; зависимость изгибной жесткости от кривизны (*в*)

Для балок непрямоугольного поперечного сечения или при других марках бетона и классах арматуры зависимости между изгибающими моментами и кривизной качественно будут такими же.

Алгоритм расчета. Основы современной теории деформирования железобетонных балок с трещинами были заложены В. И. Мурашевым [4]. Он предположил, что в сечениях с трещинами все растягивающие напряжения воспринимаются арматурой; эпюра напряжений в сжатой зоне бетона прямоугольная (рисунок 2); средние деформации линейно меняются по высоте балки (рисунок 3).

Физическое уравнение деформирования балки записывается в виде соотношения между изгибающим моментом и кривизной:

$$\chi = \frac{M}{B}, \qquad (1)$$

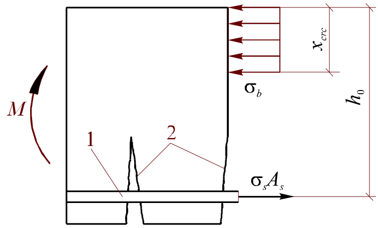

Рисунок 2 – Напряжения в сечении с трещиной: 1 – арматура; 2 – трещины

где B – жесткость балки при изгибе, которую после некоторых математических преобразований можно представить в следующем виде [5]:

$$B = \frac{h_0^3(1-0{,}5\xi)}{\dfrac{\psi_s}{E_s A_s} + \dfrac{\psi_b}{\xi b h_0 \vartheta E_b}}, \qquad (2)$$

$\xi = \dfrac{x_{crc}}{h_0}$ – относительная высота сжатой зоны в сечении с трещиной.

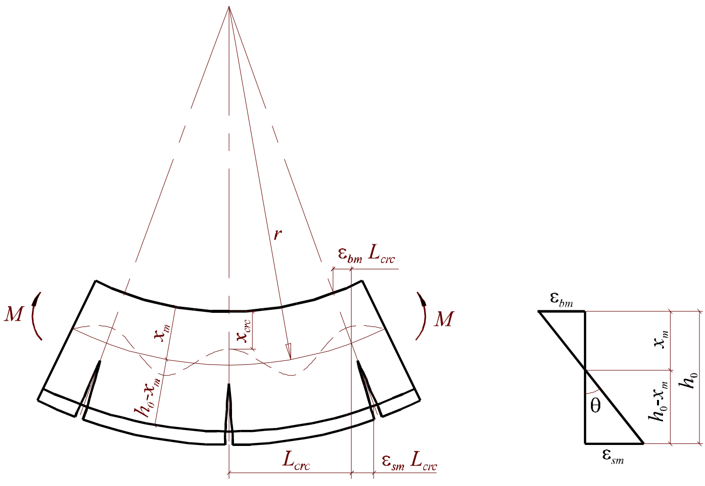

Рисунок 3 – Определение кривизны балки с трещиной

Начальная изгибная жесткость определяется по формуле [5]

$$B = B_0 = \frac{0{,}85 E_b I_{red}}{\varphi_{b2}}, \qquad (3)$$

где 0,85 – коэффициент, учитывающий влияние кратковременной ползучести бетона; φ_{b2} – коэффициент, учитывающий влияние длительной ползучести бетона, при кратковременном нагружении принимается равным 1, а при длительном – в зависимости от влажности окружающей среды [4]; I_{red} – момент инерции приведенного поперечного сечения относительно его центра тяжести.

Приведенные ранее формулы позволяют выделить две стадии деформирования элементов балок: без трещин и с трещинами. В обоих случаях физическим уравнением изгиба балки является зависимость (1), в которой значение B вычисляется либо по формуле (2) – для стадии деформирования без трещин, либо по формуле (3) – для стадии деформирования с трещинами.

Изгибная жесткость B (рисунок 3) представляет собой тангенс угла наклона секущей OA к оси кривизны, так как $B = \operatorname{tg}\beta = M/\chi$. В статически неопределимых балках кривизна в момент появления трещин не может возрастать скачком, поскольку этому препятствуют соседние участки, поэтому можно принять, что моменту M_{crc} соответствуют не только кривизны χ_1 и χ_2, но и любая кривизна, находящаяся в интервале от χ_1 до χ_2, т. е. график зависимости «момент – кривизна» между точками 1 и 2 на рисунке 1, *а* есть горизонтальная прямая [9]. Принятие такой предпосылки равносильно устранению разрыва при $M = M_{crc}$, поскольку изгибная жесткость B становится непрерывной функцией кривизны.

Чтобы получить дифференциальное уравнение изгиба железобетонной фундаментной балки, в дополнение к физическому уравнению необходимо записать уравнение статики и геометрическое уравнение:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = p - q; \;\; \chi = -\frac{d^2w}{dx^2}, \tag{4}$$

где p – интенсивность давлений от реакции основания; q – интенсивность внешней нагрузки; w – вертикальное перемещение; x – координатная ось, совпадающая с осью балки.

Расчет балки сводится к совместному решению предыдущих уравнений. Если трещины отсутствуют, то изгибная жесткость B – постоянная величина ($B = B_0$), и в этом случае задача сводится к решению линейного уравнения:

$$B_0\left(\frac{d^4w}{dx^4}\right) = p - q, \tag{5}$$

Перемещения, внутренние силовые факторы, реактивные давления и другие параметры данного напряженно-деформированного состояния будут прямо пропорциональны внешней нагрузке.

Для балок с трещинами физическое уравнение нелинейно, а следовательно, изгибная жесткость будет меняться по длине балки. В этом случае, дифференциальное уравнение имеет вид:

$$B\frac{d^4w}{dx^4} + 2\frac{dB}{dx}\frac{d^3w}{dx^3} + \frac{d^2B}{dx^2}\frac{d^2w}{dx^2} = q - p. \tag{6}$$

Это дифференциальное уравнение является нелинейным, так как входящая в него величина B является функцией не только координаты x, но и неявной функцией кривизны.

Физически нелинейная задача решается путем последовательных приближений. В каждом приближении разрешающие уравнения линеаризируются и конструкция рассчитывается как некоторая линейно-упругая система. Такие способы расчета названы методами упругих решений [10], в форме (по терминологии И. А. Биргера) переменных параметров упругости.

Метод переменных параметров упругости. Он заключается в том, что на каждом этапе последовательных приближений рассчитывается линейно-упругая балка, изгибная жесткость элементов которой различна и вычисляется по результатам предыдущего приближения, т. е. на каждом этапе решается уравнение (6), преобразованное к виду

$$B^{(k-1)}\frac{d^4w}{dx^4}+2\left(\frac{dB}{dx}\right)^{(k-1)}\left(\frac{d^3w}{dx^3}\right)^k+\left(\frac{d^2B}{dx^2}\right)^{(k-1)}\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^k+p^k=q, \qquad (7)$$

где k – номер приближения.

При первом приближении жесткость принимается равной B_0. Решив уравнение (7), находим перемещения, а затем и кривизны во всех точках балки χ^k. Изгибающие моменты M^k легко могут быть определены, так как функция жесткости балки $\beta^{k-1}=\mathrm{tg}\beta^{k-1}$ известна из предыдущего приближения. Теперь имеем возможность получить функцию жесткости балки для последующего приближения B^k. На рисунке 4 показано два пути определения этой функции: по моментам – $B_M^k=\mathrm{tg}\beta_M^k$ и кривизнам – $B_\chi^k=\mathrm{tg}\beta_\chi^k$.

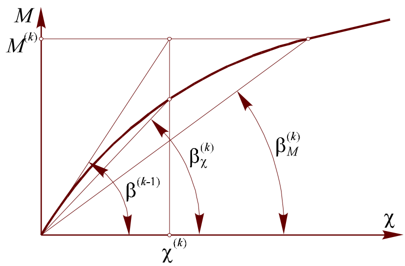

Рисунок 4 – Определение изгибной жесткости по моментам $\beta^k=\mathrm{tg}\beta_M^k$ и кривизнам $\beta^k=\mathrm{tg}\beta_\chi^k$

Здесь лишь заметим, что на рисунке 4 приведена упрощенная по сравнению с изображенной на рисунке 1, *а* диаграмма M – χ, которая не имеет разрыва в точке $M=M_{crc}$, а следовательно, позволяет найти жесткость как непрерывную функцию изгибающего момента.

Последовательное решение уравнения (7) с уточнением изгибных жесткостей тем или другим способом при каждом приближении продолжается до тех пор, пока разница между результатами, получаемыми для двух соседних приближений, не окажется достаточно малой.

Заключение. В результате проведенных исследований были выполнены постановка задачи расчета фундаментной балки с трещинами и сформулирован алгоритм расчета в нелинейной постановке, которые дают возможность сделать следующие выводы:

1) решение нелинейного дифференциального уравнения балки с трещинами [5] методом упругих решений позволяет получить такие параметры напряженно-деформированного состояния, как давление от реакции основания и осадки под фундаментной балкой;

2) наличие трещин в балке изменяет высоту сжатой зоны, в связи с этим деформации арматуры и бетона переменны по длине элемента балки, и для дальнейших расчетов целесообразно осуществлять их усреднение в пределах рассматриваемого элемента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Босаков, С. В.** Статические расчеты плит на упругом основании / С. В. Босаков. – Минск : БНТУ, 2002. – 127 с.

2 **Тарасевич, А. Н.** Изгиб самонапряженных плит на упругом основании : дис. … канд. техн. наук : 05.23.17 / А. Н. Тарасевич. – Брест, 2001. – 125 л.

3 **Бондаренко, В. М.** Некоторые вопросы нелинейной теории железобетона / В. М. Бондаренко. – Харьков, 1968. – 323 с.

4 **Мурашев, В. И.** Трещиностойкость, жесткость и прочность железобетона / В. И. Мурашев. – М : Машиностроение, 1950. – 268 с.

5 **Соломин, В. И.** Методы расчета и оптимальное проектирование железобетонных фундаментных конструкций / В. И. Соломин, С. Б. Шматков. – М : Стройиздат, 1986. – 206 с.

6 **Горбунов-Посадов, М. И.** Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В. И. Соломин. – М. : Стройиздат, 1984. – 631 с.

7 **ТКП 45-5.01-254–2012.** Основания и фундаменты зданий и сооружений. Основные положения. – Введ. 01.07.2012 (с отменой СНБ 5.01.01–99). – Минск : Минстройархитектуры Республики Беларусь, 2012. – 102 с.

8 **СНБ 5.03.01–02.** Строительные нормы Республики Беларусь. Бетонные и железобетонные конструкции. – Минстройархитектуры Республики Беларусь, 2003. – 258 с.

9 **Соломин, В. И.** О расчете железобетонных плит и балок, опирающихся на упругое основание / В. И. Соломин // Строительная механика и расчет сооружений. – 1974. – С. 19–21.

10 **Биргер, И. А.** Некоторые общие методы решения задач теории пластичности / И. А. Биргер // Прикладная математика и механика. – 1951. – Т. XV, вып. 6. – С. 765–770.

O. V. KOZUNOVA, A. A. VASILIEV, S. V. KUMASHOV
Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

STATEMENT OF THE PROBLEM AND THE ALGORITHM OF NON-LINEAR CALCULATION OF A BEAM WITH CRACKS AS AN EQUIVALENT ELEMENT

A foundation beam with cracks on a linear elastic foundation is considered. The differential equation of the beam bending is obtained. There are presented the dependences between the torques in the beam, its flexural rigidity and curvature. It is formulated an algorithm for calculating a foundation beam with cracks in a nonlinear formulation. To solve the differential equation of the beam bending, the method of elastic solutions in the form of variable elastic parameters is used.

Получено 07.12.2017