УДК 531.36

А. А. КАРАСЕВ, А. Е. ЛАМОТКИН
Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ 2*n* НУЛЕВЫХ КОРНЕЙ С 2*n* ГРУПП РЕШЕНИЙ

В статье рассматривается задача устойчивости по отношению к части переменных, в случае, когда характеристическое уравнение системы имеет $2n$ нулевых корней с $2n$ группами решений. Предлагается подход к разрешению задачи с рассмотрением ненулевых членов наименьшего порядка в разложениях правых частей. Приводятся условия устойчивости и неустойчивости по отношению к части переменных.

Ключевые слова: устойчивость движения, функция Ляпунова, частичная устойчивость, невозмущенное движение.

Введение. Исследование устойчивости движений является одной из самых важных и сложных задач в механике. Во многих случаях эту задачу можно упростить, сведя её к исследованию устойчивости по первому приближению, однако существуют случаи, называемые критическими, в которых данное упрощение неприменимо. Исследованию критических случаев посвящено множество работ (например [2, 3]), но, как правило, в них рассматривается устойчивость относительно всех переменных. Возможность рассмотрения более общей задачи об устойчивости относительно части переменных была указана А. М. Ляпуновым, а первые теоремы были без доказательства сформулированы И. Г. Малкиным. Большой вклад в исследование теории устойчивости по части переменных внёс В. В. Румянцев, который доказал основные теоремы и указал практическое приложение данной теории к исследованию устойчивости космических аппаратов [1, 4].

Данная работа обобщает исследование авторов [5] на случай устойчивости относительно части переменных в критическом случае $2n$ нулевых корней с $2n$ группами решений. Такой случай представляет особый интерес, так как к нему может быть сведено исследование устойчивости для систем, имеющих $2n$ колебательных степеней свободы (т. е. имеющих $2n$ пар чисто мнимых корней). В статье формулируется постановка задачи об исследовании устойчивости по части переменных в критическом случае n пар нулевых корней с $2n$ группами решений, а также исследуются условия устойчивости и неустойчивости.

Постановка задачи. Пусть дана система дифференциальных уравнений возмущенного движения, правые части которых раскладываются в степенные ряды

$$\frac{dx_i^*}{dt} = q_{i1}x_1^* + \cdots + q_{i,r+2n}x_{r+2n}^* + X_i^*(x_1^*, \cdots, x_{r+2n}^*), \quad i = \overline{1, r+2n}, \qquad (1)$$

где $q_{ij}(i=\overline{1,r+2n},\ j=\overline{1,r+2n})$ – постоянные, X_i^* – функции переменных x_i^*, которые раскладываются по ним в степенные ряды в области (2), причем разложения начинаются членами не ниже второго порядка.

$$\left|x_i^*\right| \le \lambda, \quad i=\overline{1,r+2n}, \tag{2}$$

где λ – некоторая положительная постоянная.

Отбросив в системе (1) члены высших порядков, получаем систему линейного приближения

$$\frac{dx_i^*}{dt} = q_{i1}x_1^* + \cdots + q_{i,r+2n}x_{r+2n}^*, \quad i=\overline{1,r+2n}. \tag{3}$$

Будем полагать, что ее характеристическое уравнение имеет нулевой корень кратности $2n$, которому соответствуют $2n$ групп решений (т. е. ранг матрицы системы (3) равен r), кроме того, имеется l $(0 \le l < r)$ корней с отрицательной действительной частью, остальные корни могут быть произвольными.

С помощью последовательного применения подходящей линейной замены [2, 3], и нелинейной замены [2, 5] система (1), может быть приведена к виду:

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}_i}{dt} = \bar{X}_i(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_{2n},\xi_1,\cdots\xi_l,z_1,\cdots,z_p), \quad i=\overline{1,\ 2n}; \\ \dfrac{d\xi_j}{dt} = \sum\limits_{\nu=1}^{l} s_{i\nu}\xi_\nu + U_j(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_{2n},\xi_1,\cdots\xi_l,z_{1,}\cdots,z_p), \quad j=\overline{1,l}; \\ \dfrac{dz_k}{dt} = Z_k(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_{2n},\xi_1,\cdots\xi_l,z_{1,}\cdots,z_p), \quad k=\overline{1,p}, \quad p=r-l, \end{cases} \tag{4}$$

здесь все собственные числа матрицы $(s_{i\nu})_{i,\nu=1,l}$ имеют отрицательные действительные части, а функции $\bar{X}_i, U_j, Z_k$ разлагаются в ряды по степеням переменных, которые сходятся в области (5), причем разложения $\bar{X}_i, U_j$ начинаются с членов не ниже второго порядка

$$\left|\bar{x}_i\right| \le h, \left|\xi_j\right| \le h, \left|z_k\right| \le H, h < H, \tag{5}$$

где h, H – некоторые положительные постоянные. Потребуем также существование непрерывных частных производных по всем переменным правых частей в области (5). Ставится задача об исследовании на устойчивость нулевого решения системы (4) относительно переменных $\bar{x}_i(i=\overline{1,2n})$, $\xi_j(j=\overline{1,l})$.

Для дальнейших выкладок мы произвольно разделим переменные $\bar{x}_i(i=\overline{1,2n})$ на две равные группы и переобозначим их как $x_i, y_i(i=\overline{1,n})$, кроме того, наши дальнейшие исследования не зависят от уравнений для переменных $z_k(k=\overline{1,p})$, поэтому удобно записать следующую систему, полученную усечением (4),

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = X_i(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots y_2,\xi_1,\cdots\xi_l,z_{1,}\cdots,z_p), \quad i=\overline{1,\ n}; \\ \dfrac{dy_i}{dt} = Y_i(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots y_2,\xi_1,\cdots\xi_l,z_{1,}\cdots,z_p), \quad i=\overline{1,\ n}; \\ \dfrac{d\xi_j}{dt} = \sum\limits_{\nu=1}^{l} s_{i\nu}\xi_\nu + U_j(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots y_2,\xi_1,\cdots\xi_l,z_{1,}\cdots,z_p), \quad j=\overline{1,l}. \end{cases} \tag{6}$$

Задача устойчивости в критическом случае *n* пар нулевых корней. Рассмотрим усеченную систему уравнений возмущенного движения (6). Для каждого фиксированного i будем рассматривать устойчивость решения относительно x_i, y_i.

Систему рассматриваем в области (5). Пусть $X_i^{(k_i)}$, $Y_i^{(k_i)}$ – это формы k_i -го порядка от x_i, y_i, коэффициенты в которой зависят от совокупности переменных $x_1,\ldots, x_{i-1}, x_{i+1},\ldots, x_n, y_1,\ldots, y_{i-1}, y_{i+1},\ldots, y_n, \xi_1,\ldots,\xi_l, z_1,\ldots, z_p$, которую мы обозначим за вектор $\boldsymbol{w}_i$. И пусть $X_i^{(m_i)}$ и $Y_i^{(m_i)}$, где m_i – наименьшее из порядков в разложении правых частей уравнений для x_i и y_i, не обращаются в ноль одновременно ни при какой совокупности w_i^*. Разложение правых частей можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = X_i^{(m_i)} + X_i^{(m_i+1)} + \ldots + X_i^{(N)} + X_i^*, \\ \dfrac{dy_i}{dt} = Y_i^{(m_i)} + Y_i^{(m_i+1)} + \ldots + Y_i^{(N)} + Y_i^*, \end{cases} \tag{7}$$

где X_i^*, Y_i^* – аналитические функции, меньшие по модулю $A(|x_i|+|y_i|)^{N+1}$; A – некоторые константы.

На основе работ [2, 5], определим следующие $2n$ функции

$$\begin{cases} G_i = x_i Y_i^{(m_i)} - y_i X_i^{(m_i)}; \\ P_i = x_i X_i^{(m_i)} + y_i Y_i^{(m_i)} \end{cases} \tag{8}$$

и будем рассматривать уравнения $G_i = 0$, $i=\overline{1,n}$. Согласно [5] устойчивость невозмущенного движения относительно каждой пары x_i, y_i определяется знаком формы P_i, который она принимает на соответствующем уравнении $G_i = 0$.

Если хотя бы на одном $G_i = 0$ форма P_i принимает положительные значения, то невозмущенное движение будет неустойчиво на основании теоремы Четаева о неустойчивости [1] и теоремы [5].

Докажем ***утверждение***: если невозмущенное движение системы устойчиво относительно каждой x_i, y_i, то невозмущенное движение системы (6) будет соответственно устойчиво относительно совокупности x_i, y_i, ξ_j, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,l}$.

Доказательство. Пусть невозмущенное движение системы (2) устойчиво относительно x_i, y_i. Тогда, для каждой пары x_i, y_i, поскольку правые части равномерно ограничены в (5) и в этой имеют непрерывные частные производные, то согласно теореме о существовании функции Ляпунова [4], в области

$$|x_i| \le h_i, |y_i| \le h_i, \|\mathbf{w}_i\| < H, h_i < h < H, \tag{9}$$

существуют такие функции Ляпунова $V_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k, \xi_1, \ldots, \xi_l, z_1, \ldots, z_p)$, что

$$V_i(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots y_k, \xi_1, \cdots \xi_l, z_1, \cdots, z_p) \ge W_i\ (x_i, y_i) > 0, \tag{10}$$

где $W_i(x_i, y_i)$, обращается в ноль только при $x_i = y_i = 0$ (это означает, что V_i определенно положительная по x_i, y_i), и ее производная в силу (6):

$$\frac{dV_i}{dt} \le 0 .$$

Рассмотрев устойчивость невозмущенного движения системы (6) относительно $\xi_1, \ldots, \xi_l$, заметим, что оно будет устойчиво по линейному приближению [4], для этого нужно выполнение следующих условий:

1) все корни характеристического уравнения системы

$$\frac{d\xi_j}{dt} = \sum_{\nu=1}^{l} s_{i\nu}\xi_\nu + U_j(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots y_2, \xi_1, \cdots \xi_l, z_1, \cdots, z_p), \quad j = \overline{1, l}, \tag{11}$$

должны иметь отрицательные действительные части.

2) $U_j \le \sum_{\nu=1}^{l} s_{\nu j}$, и функции $U_j\Big|_{\xi_1 = \ldots = \xi_l = 0} = 0$.

Эти условия, очевидно, выполняются, значит, в области

$$|x_i| \le H, |y_i| \le H, |\xi_j| \le h, |z_k| \le H, \tag{12}$$

существует $V_\xi(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots y_k, \xi_1, \cdots \xi_l, z_1, \cdots, z_p)$, такая, что:

$$V_\xi(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots y_2, \xi_1, \cdots \xi_l, z_1, \cdots, z_p) \ge W_\xi\ (\xi_1, \cdots \xi_l) > 0, \tag{13}$$

где $W_\xi(\xi_1, \ldots, \xi_l)$ обращается в ноль только при $\xi_1 = \ldots = \xi_l = 0$ (что означает, что W_ξ знакоопределенная положительная по ξ_1, ξ_l), и ее производная в силу (6):

$$\frac{dV_\xi}{dt} \le 0 .$$

Перейдем тогда в область $|x_i| \le h,\ \|w_i\| \le h,\ |x_i| \le h,\ |z_l| < H,\ h < H$, которая является сужением областей (9) и (12) составим функцию

$$V(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots y_k, \xi_1, \cdots \xi_l, z_1, \cdots, z_p) = \sum_{i=1}^{n} V_i + V_\xi . \tag{14}$$

В силу (10) и (13) можно записать:

$$\sum_{i=1}^{n} V_i + V_\xi \ge \sum_{i=1}^{n} W_i + W_\xi .$$

Введем обозначение

$$W(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots y_k, \xi_1, \cdots \xi_l) = \sum_{i=1}^{n} W_i + W_\xi ,$$

где W будет обращаться в ноль только при $x_1 = \ldots = x_n = y_1 = \ldots = y_k = \xi_1 \ldots \xi_l = 0$, что, соответственно, означает, что V знакоопределенная по совокупности $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots y_k, \xi_1, \ldots \xi_l$, и ее производная:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dV_i}{dt} + \frac{dV_\xi}{dt} \le 0.$$

Тогда, по теореме об устойчивости по части переменных [4], невозмущенное движение системы (6) устойчиво относительно $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots y_k, \xi_1, \ldots \xi_l$. Утверждение доказано.

Таким образом, рассматривая устойчивость по части переменных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots y_k, \xi_1, \ldots \xi_l$ невозмущенного движения системы (6), необходимо рассмотреть формы (8).

1) Если для каждого $i = \overline{1, n}$ на поверхностях, заданных $G_i = 0$, выполнено $P_i < 0$, то невозмущенное движение системы (6) в силу утверждения 1 устойчиво по части переменных.

2) Если же существует i_* такой, что на $G_{i_*} = 0$ форма P_{i_*} принимает положительные значения, то невозмущенное движение системы (6) неустойчиво.

Данный результат может быть полезен при исследовании частичной устойчивости систем, имеющих $2n$ нулевых корней с $2n$ группами решений, а также систем, имеющих $2n$ пар чисто мнимых корней.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Воротников, В. И.** Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, метод и приложения / В. И. Воротников, В. В. Румянцев. – М. : Научный мир, 2001. – 320 с.

2 **Малкин, И. Г.** Теория устойчивости движения / И. Г. Малкин. – М. : Наука, 1966. – 533 с.

3 **Ляпунов, А. М.** Общая задача об устойчивости движения / А. М. Ляпунов. – М.–Л. : Гостехиздат, 1950. – 473 с.

4 **Румянцев, В. В.** Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных / В. В. Румянцев, А. С. Озиранер. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 256 с.

5 **Karasev, A. A.** On the stability study with respect to the part of the variables in the critical case of two zero roots / A. A. Karasev, A. E. Lamotkin // Mathematical Modeling and Information Technologies: Proceedings of 3rd Conf. – Yekaterinburg: USURT, 2016. – С. 205–215.

A. A. KARASEV, A. E. LAMOTKIN
Ural Federal University, Yekaterinburg, Russia

ON SUSTAINABILITY BY THE PART OF VARIABLES IN THE CRITICAL CASE OF $2n$ ZERO ROOTS WITH $2n$ GROUPS OF DECISIONS

The stability problem with respect to a part of the variables is considered for the case when the characteristic equation of the system has $2n$ zero roots with $2n$ groups of solutions. It is proposed an approach to the solution of the problem with consideration of nonzero terms of least order in expansions of the right-hand sides. The stability and the instability conditions are given with respect to a part of the variables.

Получено 30.05.2017