УДК 539.3

А. С. ЗЕЛЕНАЯ
Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Исследовано напряженно-деформированное состояние несимметричных по толщине упругих трехслойных пластин со сжимаемым заполнителем. Кинематические гипотезы основаны на гипотезе ломаной линии: для внешних слоев принимаются гипотезы Кирхгофа, в жестком сжимаемом заполнителе деформированная нормаль остается прямолинейной. Равномерно распределенная нагрузка приложена к внешней поверхности первого несущего слоя.

Ключевые слова: трехслойная прямоугольная пластина, сжимаемый заполнитель, упругость, метод Бубнова-Галеркина.

Введение. На сегодняшний день в строительстве все более широкое применение находят многослойные конструкции, которые при рациональном сочетании материалов с различными свойствами становятся способными сопротивляться многообразным внешним воздействиям, что позволяет сократить расходы в период эксплуатации. Частным случаем многослойных конструкций являются трехслойные элементы конструкций. При заданных ограничениях на прочность и жесткость, с точки зрения минимума весовых показателей в условиях работы на изгиб, трехслойные конструкции оказываются близкими оптимальным.

Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки исследованы в монографии [1]. Колебания трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем рассмотрены в работах [2–4]. Статьи [5, 6] посвящены исследованию статического деформирования трехслойных прямоугольных пластин с несжимаемым заполнителем, связанных с упругим основанием. В работе [7] рассмотрен цилиндрический изгиб трехслойных пластин в температурном поле.

Здесь выполнена постановка и решение задачи о статическом деформировании трехслойных прямоугольных пластин со сжимаемым заполнителем.

Постановка задачи. Рассматривается несимметричная по толщине упругая трехслойная прямоугольная пластина, состоящая из двух несущих слоев и сжимаемого заполнителя. Несущие слои предназначены для восприятия основной части механической нагрузки, поэтому они выполняются из материалов высокой прочности и жесткости. Заполнитель служит для образования монолитной конструкции, обеспечивает перераспределение усилий между несущими слоями, тем самым гарантирует совместную работу слоев пластины (рисунок 1).

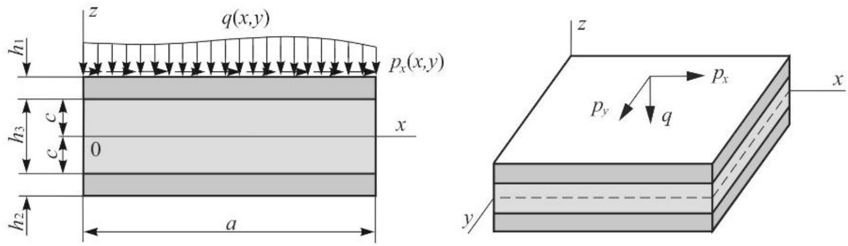

Рисунок 1 – Расчетная схема пластины

Для изотропных несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа. В жестком заполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты z. На границах контакта перемещения непрерывны. Материалы несущих слоев несжимаемы в поперечном и продольном направлении, в заполнителе учитывается обжатие. Деформации малые. Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью заполнителя. К внешней поверхности первого несущего слоя приложена произвольная распределённая нагрузка, проекции которой на координатные оси: $q(x, y)$, $p_x(x, y)$, $p_y(x, y)$. За искомые функции принимаются продольные перемещения $u_{kx}(x, y)$, $u_{ky}(x, y)$ и прогибы $w_k(x, y)$ срединных поверхностей несущих слоев (k = 1,2), после этого находим деформации и напряжения в слоях.

Продольные перемещения $u^{(k)}(x, y, z)$ и прогибы $w^{(k)}(x, y, z)$ в слоях можно выразить через искомые функции $w_1(x, y)$, $w_2(x, y)$, $u_{1x}(x, y)$, $u_{1y}(x, y)$, $u_{2x}(x, y)$, $u_{2y}(x, y)$ следующими соотношениями (k = 1, 2, 3):

для первого несущего слоя ($c \le z \le c + h_1$)

$$u_x^{(1)} = u_{1x} - \left(z - c - \frac{h_1}{2} \right) w_{1},_x , \quad w^{(1)} = w_1 , \quad u_y^{(1)} = u_{1y} - \left(z - c - \frac{h_1}{2} \right) w_{1},_y ;$$

для второго несущего слоя ($-c - h_2 \le z \le -c$)

$$u_x^{(2)} = u_{2x} - \left(z + c + \frac{h_2}{2} \right) w_{2},_x , \quad w^{(2)} = w_2 , \quad u_y^{(2)} = u_{2y} - \left(z + c + \frac{h_2}{2} \right) w_{2},_y ;$$

для заполнителя ($-c \le z \le c$)

$$u_x^{(3)} = \left(1 + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{1}{2}u_{1x} + \frac{h_1}{4}w_{1},_x\right) + \left(1 - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{1}{2}u_{2x} - \frac{h_2}{4}w_{2},_x\right),$$

$$u_y^{(3)} = \left(1 + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{1}{2}u_{1y} + \frac{h_1}{4}w_{1},_y\right) + \left(1 - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{1}{2}u_{2y} - \frac{h_2}{4}w_{2},_y\right), \qquad (1)$$

$$w^{(3)} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{c}\right)w_1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z}{c}\right)w_2 ,$$

где z – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной линии заполнителя.

С использованием выражений для перемещений (1) на основе вариационного принципа Лагранжа была получена система шести дифференциальных уравнений равновесия пластины в усилиях:

$$\begin{gathered} H_{1x} - V_1,_y - P_{1x},_x = p_x,\ H_{1x} + V_2,_y + P_{2x},_x = 0, \\ H_{1y} - V_1,_x - P_{1y},_y = p_y,\ H_{1y} + V_2,_x + P_{2y},_y = 0, \\ S_{1x},_{xx} + H_2 - T_{1x},_x - U_1,_{xy} + S_{1y},_{yy} - T_{1y},_y = q + \frac{p_x,_x h_1}{2} + \frac{p_y,_y h_1}{2}, \\ S_{2x},_{xx} - H_2 - T_{2x},_x - U_2,_{xy} + S_{2y},_{yy} - T_{2y},_y = 0, \end{gathered} \tag{2}$$

где H_{kx}, H_{ky}, V_k, P_{kx}, P_{ky}, $S_{kx}, S_{ky}, H_k, T_{kx}, T_{ky}, U_k$ – обобщенные усилия.

Шаровая и девиаторная части тензора деформаций в рассматриваемом случае будут следующими ($э_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij}$, $i, j = x, y, z$):

$$\varepsilon^{(k)} = \frac{1}{3}\left(\varepsilon_{xx}^{(k)} + \varepsilon_{yy}^{(k)}\right),\quad \varepsilon_{zz}^{(k)} = 0,\ э_{xx}^{(k)} = \frac{2}{3}\varepsilon_{xx}^{(k)} - \frac{1}{3}\varepsilon_{yy}^{(k)},\ э_{yy}^{(k)} = \frac{2}{3}\varepsilon_{yy}^{(k)} - \frac{1}{3}\varepsilon_{xx}^{(k)}\ (k=1,2),$$

$$\begin{gathered} \varepsilon^{(3)} = \frac{1}{3}\left(\varepsilon_{xx}^{(3)} + \varepsilon_{yy}^{(3)} + \varepsilon_{zz}^{(3)}\right),\quad э_{xx}^{(3)} = \frac{2}{3}\varepsilon_{xx}^{(3)} - \frac{1}{3}\left(\varepsilon_{yy}^{(3)} + \varepsilon_{zz}^{(3)}\right), \\ э_{yy}^{(3)} = \frac{2}{3}\varepsilon_{yy}^{(3)} - \frac{1}{3}\left(\varepsilon_{xx}^{(3)} + \varepsilon_{zz}^{(3)}\right),\quad э_{zz}^{(3)} = \frac{2}{3}\varepsilon_{zz}^{(3)} - \frac{1}{3}\left(\varepsilon_{xx}^{(3)} + \varepsilon_{yy}^{(3)}\right). \end{gathered} \tag{3}$$

В слоях рассматриваемой пластины для связи тензоров напряжений и деформаций используется соотношение закона Гука в девиаторно-шаровой форме:

$$s_{ij}^{(k)} = 2G_k э_{ij}^{(k)},\ \sigma^{(k)} = 3K_k\varepsilon^{(k)}\quad (i, j = x, y, z, (k=1,2,3)), \tag{4}$$

где – G_k сдвиговой модуль упругости материалов, $э_{ij}^{(k)}$ – компоненты девиатора тензора деформаций; K_k – объемный модуль упругости материалов, $\varepsilon^{(k)}$ – шаровая часть тензора деформаций.

Компоненты тензора напряжений с учетом (4). При $k=1, 2$:

$$\sigma_{xx}^{(k)} = K_k^+\varepsilon_{xx}^{(k)} + K_k^-\varepsilon_{yy}^{(k)},\ \sigma_{yy}^{(k)} = K_k^+\varepsilon_{yy}^{(k)} + K_k^-\varepsilon_{xx}^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)} = 2G_k\varepsilon_{xy}.$$

Для третьего слоя

$$\begin{gathered} \sigma_{xx}^{(3)} = K_3^+\varepsilon_{xx}^{(3)} + K_3^-\varepsilon_{yy}^{(3)} + K_3^-\varepsilon_{zz}^{(3)},\ \sigma_{yy}^{(3)} = K_3^+\varepsilon_{yy}^{(3)} + K_3^-\varepsilon_{xx}^{(3)} + K_3^-\varepsilon_{zz}^{(3)}, \\ \sigma_{zz}^{(3)} = K_3^+\varepsilon_{zz}^{(3)} + K_3^-\varepsilon_{xx}^{(3)} + K_3^-\varepsilon_{yy}^{(3)},\ \sigma_{xz}^{(3)} = 2G_3\varepsilon_{xz},\ \sigma_{yz}^{(3)} = 2G_3\varepsilon_{yz}, \end{gathered} \tag{5}$$

где $K_k^+ = K_k + \frac{4}{3}G_k$, $K_k^- = K_k - \frac{2}{3}G_k$.

Применив соотношения закона Гука (4) и (5), выразим внутренние усилия и моменты через функции u_{1x}, u_{2x}, u_{1y}, u_{2y}, w_1, w_2. Подставив полученные выражения в систему уравнений равновесия (2), получим систему дифференциальных уравнений, описывающих перемещения в упругой трехслойной пластине со сжимаемым заполнителем:

$$
\begin{gathered}
a_1u_{1x} - a_1u_{2x} - a_4u_{1x},_{xx} - a_5u_{2x},_{xx} - a_{19}u_{1x},_{yy} - a_{18}u_{2x},_{yy} - a_{21}u_{1y},_{xy} - a_{23}u_{2y},_{xy} + \\
+ a_2w_1,_x + a_3w_2,_x - 2a_{24}w_1,_{xyy} + a_{25}w_2,_{xyy} - 2a_6w_1,_{xxx} + a_7w_2,_{xxx} = p_x , \\
-a_1u_{1x} + a_1u_{2x} - a_5u_{1x},_{xx} - a_9u_{2x},_{xx} - a_{18}u_{1x},_{yy} - a_{20}u_{2x},_{yy} - a_{23}u_{1y},_{xy} - a_{22}u_{2y},_{xy} - \\
- a_{10}w_1,_x - a_{17}w_2,_x - a_{24}w_1,_{xyy} + 2a_{25}w_2,_{xyy} - a_6w_1,_{xxx} + 2a_7w_2,_{xxx} = 0 , \\
a_1u_{1y} - a_1u_{2y} - a_4u_{1y},_{yy} - a_5u_{2y},_{yy} - a_{19}u_{1y},_{xx} - a_{18}u_{2y},_{xx} - a_{21}u_{1x},_{xy} - a_{23}u_{2x},_{xy} + \\
+ a_2w_1,_y + a_3w_2,_y - 2a_{24}w_1,_{xxy} + a_{25}w_2,_{xxy} - 2a_6w_1,_{yyy} + a_7w_2,_{yyy} = p_y , \\
-a_1u_{1y} + a_1u_{2y} - a_5u_{1y},_{yy} - a_9u_{2y},_{yy} - a_{18}u_{1y},_{xx} - a_{20}u_{2y},_{xx} - a_{23}u_{1x},_{xy} - a_{22}u_{2x},_{xy} - \\
- a_{10}w_1,_y - a_{17}w_2,_y - a_{24}w_1,_{xxy} + 2a_{25}w_2,_{xxy} - a_6w_1,_{yyy} + 2a_7w_2,_{yyy} = 0 , \qquad (6) \\
-a_2u_{1x},_x - a_2u_{1y},_y + a_{10}u_{2x},_x + a_{10}u_{2y},_y + 2a_6u_{1x},_{xxx} + a_6u_{2x},_{xxx} + 2a_6u_{1y},_{yyy} + \\
+ a_6u_{2y},_{yyy} + 2a_{24}u_{1x},_{xyy} + a_{24}u_{2x},_{xyy} + 2a_{24}u_{1y},_{xxy} + a_{24}u_{2y},_{xxy} + a_{11}w_1,_{xx} + \\
+ a_{11}w_1,_{yy} - a_{12}w_2,_{xx} - a_{12}w_2,_{yy} + a_{15}w_1,_{xxxx} + a_{15}w_1,_{yyyy} - a_{16}w_2,_{xxxx} - \\
- a_{16}w_2,_{yyyy} + a_{26}w_1,_{xxyy} - a_{28}w_2,_{xxyy} + a_8w_1 - a_8w_2 = q + \frac{p_x,_x h_1}{2} + \frac{p_y,_y h_1}{2} , \\
-a_3u_{1y},_y - a_3u_{1x},_x + a_{17}u_{2y},_y + a_{17}u_{2x},_x - a_7u_{1y},_{yyy} - a_7u_{1x},_{xxx} - 2a_7u_{2y},_{yyy} - \\
- 2a_7u_{2x},_{xxx} - 2a_{27}u_{2y},_{xxy} - a_{25}u_{1y},_{xxy} - 2a_{25}u_{2x},_{xyy} - a_{25}u_{1x},_{xyy} - a_{12}w_1,_{xx} - \\
- a_{12}w_1,_{yy} + a_{14}w_2,_{xx} + a_{14}w_2,_{yy} - a_{16}w_1,_{xxxx} - a_{16}w_1,_{yyyy} + a_{13}w_2,_{xxxx} + \\
+ a_{13}w_2,_{yyyy} - a_{28}w_1,_{xxyy} + a_{27}w_2,_{xxyy} - a_8w_1 + a_8w_2 = 0 ,
\end{gathered}
$$

где a_i ($i = 1,\dots,28$) – коэффициенты, выражающиеся через объемный K_k и сдвиговой G_k модули упругости материалов, и геометрические параметры слоев пластины.

Краевая задача (6) об изгибе пластины замыкается добавлением граничных условий. Принимаем граничные условия, соответствующие свободному опиранию пластины по кромкам на неподвижные в пространстве жесткие опоры, где граничные условия в перемещениях ($k = 1,2$):

$$
\begin{aligned}
&\text{при } x = 0,\ a \qquad && u_{kx},_x = u_{ky} = w_k = w_k,_{xx} = 0 ; \\
&\text{при } y = 0,\ b \qquad && u_{ky},_y = u_{kx} = w_k = w_k,_{yy} = 0 .
\end{aligned} \qquad (7)
$$

Таким образом, получена система из шести линейных дифференциальных уравнений в частных производных относительно искомых перемещений.

2 Решение краевой задачи в перемещениях. Решение будем искать методом Бубнова-Галеркина. Для этого искомые перемещения представляем в виде разложения в двойные тригонометрические ряды, которые автоматически удовлетворяют граничным условиям (7):

$$
u_{1x} = \sum_{n,m=0}^{\infty} U_{1xmn} \cos\frac{\pi nx}{a} \sin\frac{\pi my}{b}, \; u_{2x} = \sum_{n,m=0}^{\infty} U_{2xmn} \cos\frac{\pi nx}{a} \sin\frac{\pi my}{b},
$$

$$u_{1y} = \sum_{m,n=0}^{\infty} U_{1ymn} \sin\frac{\pi nx}{a}\cos\frac{\pi my}{b},\ u_{2y} = \sum_{m,n=0}^{\infty} U_{2ymn} \sin\frac{\pi nx}{a}\cos\frac{\pi my}{b}, \tag{8}$$

$$w_1 = \sum_{n,m=0}^{\infty} W_{1mn} \sin\frac{\pi nx}{a}\sin\frac{\pi my}{b},\ w_2 = \sum_{n,m=0}^{\infty} W_{2mn} \sin\frac{\pi nx}{a}\sin\frac{\pi my}{b},$$

где U_{1xmn}, U_{2xmn}, U_{1ymn}, U_{2ymn}, W_{1mn}, W_{2mn} – искомые амплитуды перемещений прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем.

Положим продольную нагрузку $p_x \equiv 0$, $p_y \equiv 0$. Поперечную нагрузку q представим в виде разложения в двойной тригонометрический ряд:

$$q = \sum_{n,m=0}^{\infty} q_{mn} \sin\frac{\pi nx}{a}\sin\frac{\pi my}{b},\ q_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b q(x,y)\sin\frac{\pi nx}{a}\sin\frac{\pi my}{b}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{9}$$

После подстановки перемещений (8) и нагрузки (9) в систему уравнений равновесия (6) и необходимых преобразований получим систему линейных алгебраических уравнений для определения искомых амплитуд перемещений U_{1xmn}, U_{2xmn}, U_{1ymn}, U_{2ymn}, W_{1mn}, W_{2mn}:

$$\begin{gathered}
b_1U_{1xmn} + b_2U_{2xmn} + b_{11}U_{1ymn} + b_{12}U_{2ymn} + b_3W_{1mn} + b_4W_{2mn} = 0,\\
b_2U_{1xmn} + b_5U_{2xmn} + b_{12}U_{1ymn} + b_{13}U_{2ymn} + b_6W_{1mn} + b_7W_{2mn} = 0,\\
b_{11}U_{1xmn} + b_{12}U_{2xmn} + b_{14}U_{1ymn} + b_{15}U_{2ymn} + b_{16}W_{1mn} + b_{17}W_{2mn} = 0,\\
b_{12}U_{1xmn} + b_{13}U_{2xmn} + b_{15}U_{1ymn} + b_{18}U_{2ymn} + b_{19}W_{1mn} + b_{20}W_{2mn} = 0,\\
b_3U_{1xmn} + b_6U_{2xmn} + b_{16}U_{1ymn} + b_{19}U_{2ymn} + b_8W_{1mn} + b_9W_{2mn} = q_{mn},\\
b_4U_{1xmn} + b_7U_{2xmn} + b_{17}U_{1ymn} + b_{20}U_{2ymn} + b_9W_{1mn} + b_{10}W_{2mn} = 0,
\end{gathered} \tag{10}$$

где коэффициенты b_i выражаются через величины a_i и зависят от параметров m и n:

$$b_1 = a_1 + a_4\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + a_{19}\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2;\ b_2 = -a_1 + a_5\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + a_{18}\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2;$$

$$b_3 = -a_2\left(\frac{\pi n}{a}\right) - 2a_6\left(\frac{\pi n}{a}\right)^3 - a_{24}\left(\frac{\pi n}{a}\right)\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2;$$

$$b_4 = -a_3\left(\frac{\pi n}{a}\right) + a_7\left(\frac{\pi n}{a}\right)^3 + a_{25}\left(\frac{\pi n}{a}\right)\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2;$$

$$b_5 = a_1 + a_9\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + a_{20}\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2;\ b_6 = a_{10}\left(\frac{\pi n}{a}\right) - a_6\left(\frac{\pi n}{a}\right)^3 - a_{24}\left(\frac{\pi n}{a}\right)\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2;$$

$$b_7 = a_{17}\left(\frac{\pi n}{a}\right) + 2a_7\left(\frac{\pi n}{a}\right)^3 + 2a_{25}\left(\frac{\pi n}{a}\right)\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2;$$

$$b_8 = a_8 - a_{11}\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 - a_{11}\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 + a_{15}\left(\frac{\pi n}{a}\right)^4 + a_{15}\left(\frac{\pi m}{b}\right)^4 + a_{26}\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2;$$

$$b_9 = -a_8 + a_{12}\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + a_{12}\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 - a_{16}\left(\frac{\pi n}{a}\right)^4 - a_{16}\left(\frac{\pi m}{b}\right)^4 - a_{28}\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2;$$

$$b_{10} = a_8 - a_{14}\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 - a_{14}\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 + a_{13}\left(\frac{\pi n}{a}\right)^4 + a_{13}\left(\frac{\pi m}{b}\right)^4 + a_{27}\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2;$$

$$b_{11} = a_{21}\left(\frac{\pi n}{a}\right)\left(\frac{\pi m}{b}\right); b_{12} = a_{23}\left(\frac{\pi n}{a}\right)\left(\frac{\pi m}{b}\right); b_{13} = a_{22}\left(\frac{\pi n}{a}\right)\left(\frac{\pi m}{b}\right);$$

$$b_{14} = a_1 + a_4\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 + a_{19}\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2; b_{15} = -a_1 + a_5\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 + a_{18}\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2;$$

$$b_{16} = -a_2\left(\frac{\pi m}{b}\right) - 2a_6\left(\frac{\pi m}{b}\right)^3 - a_{24}\left(\frac{\pi m}{b}\right)\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2;$$

$$b_{17} = -a_3\left(\frac{\pi m}{b}\right) + a_7\left(\frac{\pi m}{b}\right)^3 + a_{25}\left(\frac{\pi m}{b}\right)\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2;$$

$$b_{18} = a_1 + a_9\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 + a_{20}\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2; b_{19} = a_{10}\left(\frac{\pi m}{b}\right) - a_6\left(\frac{\pi m}{b}\right)^3 - a_{24}\left(\frac{\pi m}{b}\right)\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2;$$

$$b_{20} = a_{17}\left(\frac{\pi m}{b}\right) + 2a_7\left(\frac{\pi m}{b}\right)^3 + 2a_{25}\left(\frac{\pi m}{b}\right)\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2.$$

Решая систему (10), получим амплитудные значения перемещений U_{1xmn}, U_{2xmn}, U_{1ymn}, U_{2ymn}, W_{1mn}, W_{2mn}.

Численный параметрический анализ. Численный анализ проводился для трехслойной пластины с материалами и толщинами слоев Д16Т–фторопласт–Д16Т, $h_1 = 0{,}04$ м, $h_2 = 0{,}02$ м, $h_3 = 0{,}2$ м. Механические характеристики материалов взяты в монографии [1]. Нагрузка равномерно распределена по всей поверхности пластины интенсивностью $q = -2$ МПа, размеры пластины $a = 1$ м, $b = 1$ м. При суммировании рядов (8) принималось 50 членов ряда.

На рисунке 2, *а, б* показано изменение продольных напряжений в слоях пластины вдоль оси x ($y = 0{,}5b$) при различных упругих характеристиках материалов: 1 – пакет Д16Т–фторопласт–Д16Т (пунктир); 2 – модули упругости заполнителя уменьшены в 10 раз, несущие слои – Д16Т (сплошная); 3 – значение параметров упругости несущих слоев увеличено в 10 раз, заполнитель – фторопласт (штриховая).

Продольные напряжения во внешнем несущем слое показаны на рисунке 2, *а*. Кривые без штриха соответствуют напряжениям на поверхности склейки этого слоя с заполнителем, со штрихом – 1', 2', 3' – напряжения на внешней поверхности. Уменьшение параметров упругости заполнителя приводит к увеличению напряжений по модулю на обеих поверхностях слоя в 3,5–4,5 раза. Причем в склейке они достигают по величине напряжения на внешней поверхности слоя. Увеличение модулей упругости несущих слоев вызывает ещё больший рост продольных напряжений в этом слое, причем происходит перемена знака. По модулю на внешней поверхности напряжения незначительно больше, чем в склейке.

Аналогичная зависимость продольных напряжений характерна и для второго несущего слоя (рисунок 2, *б*). Кривые без штриха соответствуют напряжениям на внешней поверхности $z = -c - h_2$, со штрихом – 1', 2', 3' – напряжения на поверхности склейки слоя с заполнителем $z = -c$. Уменьшение параметров упругости заполнителя приводит к увеличению напряжений по модулю в 2,3–10 раз. Увеличение параметров упругости несущих слоев приводит к перемене знака и значительному увеличению по модулю напряжений в склейке с заполнителем и на внешней поверхности.

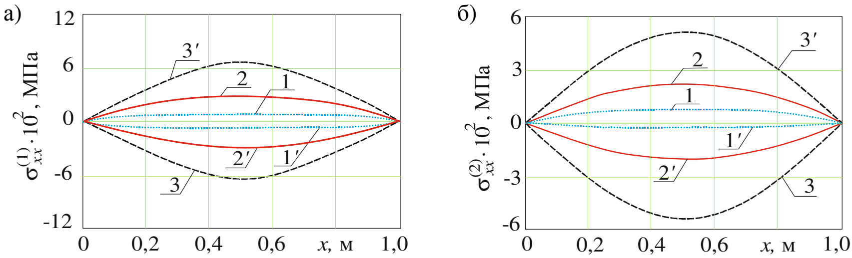

Рисунок 2 – Продольные напряжения в первом и втором несущих слоях

Продольные $\sigma_{xx}^{(3)}$ и поперечные $\sigma_{zz}^{(3)}$ напряжения в заполнителе показаны на рисунке 3, *а, б* соответственно. Кривые без штриха соответствуют напряжениям в склейке со вторым слоем $z = -c$, со штрихом – напряжения в склейке с первым слоем $z = c$.

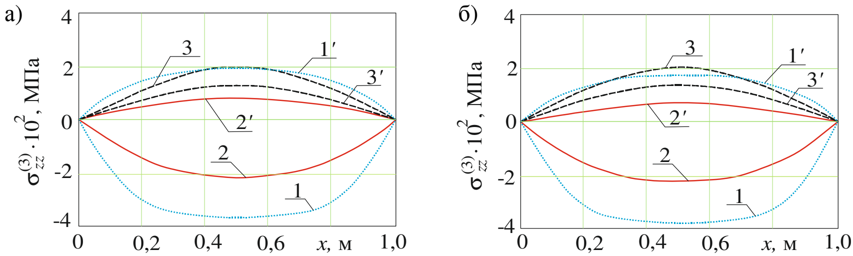

Рисунок 3 – Продольные и поперечные напряжения в третьем слое (заполнитель)

Уменьшение констант упругости заполнителя приводит к «выравниванию» кривых 1, некоторому уменьшению продольных и поперечных максимальных напряжений в склейке с первым слоем. На второй склейке экстремумы напряжений смещаются к середине, происходит уменьшение напряжений.

Увеличение параметров упругости несущих слоев приводит к перемене знака напряжений в склейке со вторым слоем, где $z = -c$. При этом во второй склейке наблюдается рост напряжений, экстремумы в данном случае достигают максимальных положительных значений для продольных и поперечных напряжений.

Заключение. Полученное в работе решение можно использовать для исследования напряженно-деформированного состояния упругой трёхслойной прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем при действии непрерывных распределенных нагрузок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Старовойтов, Э. И.** Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2002. – 343 с.

2 Natural vibration of a sandwich beam on an elastic foundation / V. D. Kubenko [et al.] // International Applied Mechanics. – 2006. – Vol. 42, No 5. – P. 541–547.

3 **Леоненко, Д. В.** Вынужденные колебания трехслойного стержня на упругом безынерционном основании / Д. В. Леоненко // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2007. – № 3. – С. 70–74.

4 **Леоненко, Д. В.** Колебания трехслойного стержня под действием импульсных нагрузок различных форм / Д. В. Леоненко // Материалы, технологии, инструменты. – 2004. – Т. 9, № 2. – С. 23–27.

5 **Старовойтов, Э. И.** Изгиб прямоугольной трехслойной пластины на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Е. П. Доровская // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2006. – № 3. – С. 21–28.

6 Деформирование трехслойной круговой пластины на упругом основании / А. Г. Горшков [и др.] // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2005. – № 1. – С. 16–22.

7 **Старовойтов, Э. И.** Цилиндрический изгиб прямоугольной трехслойной пластины в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. – 2014. – Вып. 8. – С. 179–185.

A. S. ZELENAYA

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

STRESS-DEFORMED STATE OF AN ELASTIC THREE-LAYERED RECTANGULAR PLATE WITH THE COMPRESSED FILLER

The stress-strain state of asymmetric in thickness elastic three-layered plates with a compressible filler is investigated. The kinematic hypotheses are based on the hypothesis of a broken line: the Kirchhoff hypotheses are accepted for the outer layers, the deformed normal remains rectilinear in a rigid compressible filler. A uniformly distributed load is applied to the outer surface of the first bearing layer.

Получено 28.09.2017