

$\omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}, T_k)$ – термозависимая функция нелинейности (пластичности); $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций; α_{0k} – коэффициент линейного температурного расширения; T_k – температура в k -м слое.

Уравнения равновесия рассматриваемого стержня составят систему нелинейных дифференциальных уравнений в перемещениях. Для ее решения применяется метод упругих решений. Решение этой системы принимается в виде разложения в тригонометрические ряды, которые автоматически удовлетворяют граничным условиям свободного опирания на неподвижные в пространстве жесткие опоры:

$$u_1^n = \sum_{m=1}^{\infty} U_{1m}^n \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \quad u_2^n = \sum_{m=1}^{\infty} U_{2m}^n \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right); \quad w_1^n = \sum_{m=1}^{\infty} W_{1m}^n \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \quad w_2^n = \sum_{m=1}^{\infty} W_{2m}^n \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right),$$

где $U_{1m}^n, U_{2m}^n, W_{1m}^n, W_{2m}^n$ – неизвестные амплитуды перемещений.

После подстановки перемещений и дополнительных усилий в уравнения равновесия получим систему линейных алгебраических уравнений для определения искомым амплитуд перемещений. После ее решения вычисляются перемещения в слоях стержня, деформации – из соотношений Коши и напряжения из физических уравнений состояния.

При численной реализации метода упругих решений достаточно было пять итераций, т. к. отличие от перемещений на последующем шаге не превышало 0,2 %. Численные расчеты показали существенное влияние температуры и физической нелинейности на перемещения и напряжения в стержне. Учет сжимаемости заполнителя уточняет искомые перемещения на 13–17 %.

УДК 539.37

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ВОЗЛЕ КРУГОВОГО ОТВЕРСТИЯ НА БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Е. А. СТОРОЖУК, И. С. ЧЕРНЫШЕНКО, О. В. ПИГОЛЬ
Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, г. Киев

Тонкие цилиндрические оболочки кругового и некругового сечений находят широкое применение в различных областях современной техники как конструктивные элементы машин и приборов. В большинстве случаев эти элементы по конструктивным или технологическим соображениям имеют отверстия различной формы. При значительных уровнях действующих нагрузок возле указанных концентраторов возникают зоны повышенных напряжений, а свойства их материала характеризуются нелинейной диаграммой деформирования.

Рассмотрим тонкую цилиндрическую оболочку эллиптического поперечного сечения, которая ослаблена круговым отверстием радиуса r_0 и отнесена к криволинейной ортогональной системе

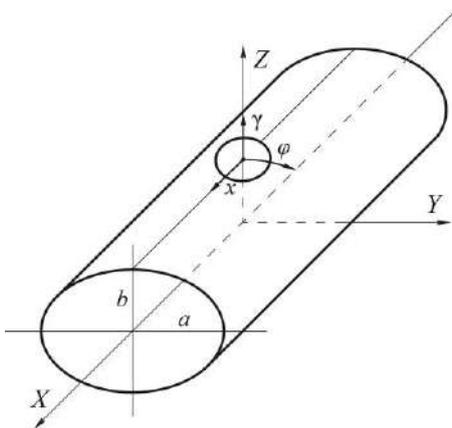


Рисунок 1 – Эллиптическая цилиндрическая оболочка с круговым отверстием

координат (x, φ, γ) , где x, γ – длины образующей и нормали к срединной поверхности оболочки, φ – угол между нормалью к срединной поверхности и вертикальной осью (рисунок 1). Примем, что оболочка изготовлена из однородного изотропного материала и находится под действием поверхностных и краевых сил.

Геометрические соотношения представим в векторной форме согласно теории непологих оболочек, в которой имеют место гипотезы Кирхгофа-Лява [1]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_1 \partial x}; & \varepsilon_{22} &= \vec{a}_2 \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_2 \partial \varphi}; & \varepsilon_{12} &= \vec{a}_2 \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_1 \partial x} + \vec{a}_1 \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_2 \partial \varphi}; \\ \mu_{11} &= \vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{\vartheta}}{A_1 \partial x}; & \mu_{22} &= \vec{a}_2 \cdot \frac{\partial \vec{\vartheta}}{A_2 \partial \varphi}; & 2\mu_{12} &= \vec{a}_2 \cdot \frac{\partial \vec{\vartheta}}{A_1 \partial x} + \vec{a}_1 \cdot \frac{\partial \vec{\vartheta}}{A_2 \partial \varphi}, \end{aligned}$$

где \vec{u} – вектор перемещений; $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n}$ – орты системы координат (x, φ, γ) ; $\vec{\vartheta} = \vartheta_x \vec{e}_1 + \vartheta_\varphi \vec{e}_2$ – вектор углов поворота нормали, которые определяются по формулам: $V \vartheta_x = -\vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_1 \partial x}$; $\vartheta_\varphi = -\vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{A_2 \partial \varphi}$.

Принимая, что нагружение простое, физические соотношения запишем на основе теории малых упругопластических деформаций в виде [1]

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{11}^0 + \sigma_{11}^P; \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}^0 + \sigma_{12}^P; \quad \sigma_{11}^0 = \frac{2G}{1-\nu}(e_{11} + \nu e_{22}); \quad \sigma_{12}^0 = G e_{12}; \\ \sigma_{11}^P &= 2G \left[\left(\frac{1-\omega_i}{1-\nu_i} - \frac{1}{1-\nu} \right) e_{11} + \left(\frac{(1-\omega_i)\nu_i}{1-\nu_i} - \frac{\nu}{1-\nu} \right) e_{22} \right]; \quad \sigma_{12}^P = -G\omega_i e_{12}; \\ e_{11} &= \varepsilon_{11} + \gamma\mu_{11}; \quad e_{12} = \varepsilon_{12} + 2\gamma\mu_{12} \quad (1 \leftrightarrow 2). \end{aligned}$$

Здесь G, ν – модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала оболочки; ω_i, ν_i – функция пластичности и переменный коэффициент поперечной деформации.

Систему разрешающих уравнений получим из принципа возможных перемещений с использованием метода дополнительных напряжений и метода конечных элементов.

В качестве числового примера представим результаты исследования упругопластического состояния цилиндрической оболочки с отверстием, изготовленной из сплава АМг-6 и нагруженной внутренним давлением интенсивности $q = 4 \cdot 10^5$ Па. Принято, что отверстие закрыто крышкой, которая передает на его контур только действие перерезывающих усилий $Q_k = q r_0 / 2$.

Расчеты проведены для оболочки с такими параметрами: $(a+b)/h=100$; $a/b=11/10$; 1; 10/11; $r_0/h=12$; $E=70$ ГПа; $\nu=0,3\dots 0,5$; $\sigma_n=140$ МПа; $\varepsilon_n=0,002$.

В таблице 1 дано распределение относительных прогибов (w/h) и окружных напряжений σ_θ^* ($\sigma_\theta = \sigma_\theta^* \cdot 10^5$ Па) вдоль контура отверстия ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, где угол θ отсчитывается от образующей) на внешней и внутренней поверхностях оболочки ($\gamma/h = \pm 0,5$). Результаты приведены для двух эллиптических ($a=1,1b$ и $b=1,1a$) и одной круговой ($a=b$) цилиндрических оболочек как для линейно-упругих задач (ЛЗ), так и физически нелинейных (ФНЗ).

Таблица 1 – Распределение прогибов и окружных напряжений вдоль контура отверстия

| Решение | $\theta,^\circ$ | γ/h | ЛЗ | | | ФНЗ | | |
|-------------------|-----------------|------------|----------|--------|----------|----------|--------|----------|
| | | | $b=1,1a$ | $a=b$ | $a=1,1b$ | $b=1,1a$ | $a=b$ | $a=1,1b$ |
| w/h | 0 | 0 | -6,519 | -0,057 | 7,099 | -13,73 | -0,058 | 13,88 |
| | 45 | 0 | -5,967 | 0,015 | 6,751 | -12,13 | 0,015 | 12,96 |
| | 90 | 0 | -5,433 | 0,087 | 6,413 | -10,86 | 0,088 | 12,07 |
| σ_θ^* | 0 | 0,5 | -4670 | 643 | 5781 | -2166 | 645 | 2213 |
| | | -0,5 | 5060 | 1824 | -1410 | 2149 | 1503 | -1592 |
| | 45 | 0,5 | -1661 | 1061 | 3749 | -1485 | 1062 | 1873 |
| | | -0,5 | 2563 | 724 | -1151 | 1641 | 722 | -1282 |
| | 90 | 0,5 | -266 | 698 | 1676 | -334 | 698 | 1474 |
| | | -0,5 | -789 | -1143 | -1548 | -1281 | -1143 | -1439 |

Из представленных результатов следует, что при незначительном отклонении формы поперечного сечения оболочки от круговой максимальные значения компонент напряженно-деформированного состояния существенно возрастают. Так, для ЛЗ максимальные прогибы и напряжения увеличиваются, соответственно, в 75 и 2,77 раза при $b=1,1a$ и в 82 и 3,17 раза при $a=1,1b$, а для ФНЗ – в 156 и 1,44 раза при $b=1,1a$ и в 158 и 1,47 раза при $a=1,1b$.

Учет пластических деформаций материала оболочки приводит к выравниванию напряжений как по толщине оболочки, так и на контуре отверстия, а также к уменьшению максимальных напряжений по сравнению с результатами линейно-упругого решения на 57 % при $b=1,1a$, на 18 % при $a=b$ и на 62 % при $a=1,1b$. Кроме этого, максимальные прогибы для ФНЗ больше соответствующих данных ЛЗ на 111 % при $b=1,1a$, на 1 % при $a=b$ и на 96 % при $a=1,1b$.

Список литературы

- 1 Maksimyyuk, V. A. Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review) / V. A. Maksimyyuk, E. A. Storozhuk, I. S. Chernyshenko // Int. Appl. Mech.– 2012. – 48, No. 6. – P. 613–687.