

Рисунок 1 – Схема последовательных преобразований расчетных и структурных схем для оценки форм взаимодействия элементов системы:

- а – система с одной степенью свободы (позиции I, II, III, IV – введение демпфера, позиции V, VI – введение УПД);
- б – система с двумя степенями свободы (позиции I, II, III, IV – формирование обратных связей на объект защиты  $m_2$ );
- в – система с двумя степенями свободы (позиции I, II – введение демпферов в первом и втором каскадах, позиции III и IV – формирование обратных связей для частичной системы и объекта защиты  $m_2$ );
- г – учет особенностей введения в одном каскаде демпфера и УПД (позиции I–IV)

Возможности структурных преобразований и выделения объектов с определенными связями позволяют решать вопросы выбора расположения частотных зон, то есть учитывать особенности формирования структуры вибрационных полей и детализации представлений о соотношениях амплитуд колебаний точек рабочего органа.

#### Список литературы

- 1 Елисеев, С. В. Прикладная теория колебаний в задачах динамики линейных механических систем / С. В. Елисеев, А. И. Артюнин. – Новосибирск : Наука, 2016. – 459 с.
- 2 Clarence W. Vibration. Fundamentals and Practice / Clarence W., De Silva. – Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2000. – 957 p.
- 3 Структурное математическое моделирование в задачах оценки динамических свойств механических колебательных систем / В. Б. Кашуба [и др.] // Системы. Методы. Технологии. – 2016. – № 3 (31). – С.16–28.
- 4 Устройство для преобразования движения: особенности межпарциальных взаимодействий / С. В. Елисеев [и др.] // Вестник Иркутского государственного технического университета. – 2016. – № 12 (119). – С. 20–27.
- 5 Рычажные связи в динамических взаимодействиях элементов механических колебательных систем / С. В. Елисеев [и др.] // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2017. – № 2. – С. 39–50.

УДК 642

### УСТОЙЧИВОСТЬ ЧАСТИЧНО ПОГРУЖЕННОЙ СВАИ

А. А. ПОДДУБНЫЙ

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

В. А. ГОРДОН

Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева, Российская Федерация

Исследуется зависимость критического значения сжимающей силы для стержня, частично опертого на упругое основание Винклера, от жесткостных свойств стержня и основания и длины опертого участка при различных условиях закрепления концов стержня.

**1 Постановка задачи.** Расчетная схема стержня, моделирующая частично погруженную сваю, состоящая из двух участков, с указанием осей  $x_i$  и  $y_i$  ( $i=1, 2$ ) и длины участков  $L_1$  и  $L_2$ , изображена на рисунке 1.

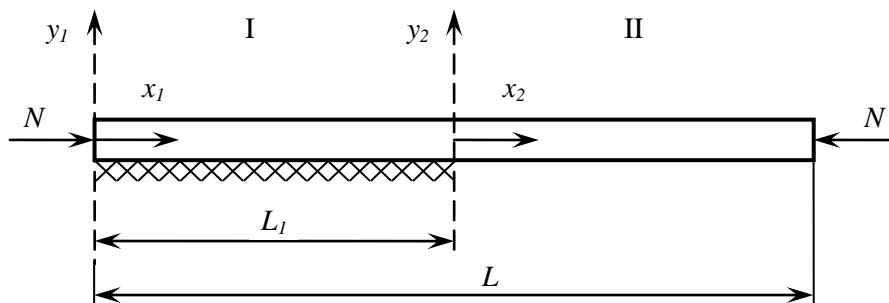


Рисунок 1 – Расчетная схема сжатого стержня, частично опертого на упругое основание

Стержень, длиной  $L$  с изгибной жесткостью  $EI$  ( $E$  – модуль упругости материала,  $I$  – минимальный момент инерции сечения), частично оперт на упругое основание Винклера с коэффициентом жесткости  $k = \text{const}$  и нагружен осевой сжимающей силой  $N$ . Наличие упругого основания эквивалентно действию распределенной нагрузки:

$$q(x) = -ky(x), \quad q(x) = -ky(x),$$

где  $y = y(x)$  – поперечное перемещение оси стержня в сечении  $x$ .

Ставится задача определения критического значения  $N_{\text{кр}}$  сжимающей силы при определенных условиях закрепления концов стержня:  $x_1 = 0$  и  $x_2 = L_2$ .

Уравнения прогибов стержня по участкам  $i=1, 2$  в безразмерных переменных и параметрах

$$\xi_1 = \frac{x_i}{L}; \quad w_i = \frac{y_i}{L}; \quad \bar{N}^2 = \frac{NL^2}{4EI}; \quad \alpha^4 = \frac{kL^4}{4EI}; \quad \nu = \frac{L_1}{L} \quad (i=1, 2) \text{ имеют вид [1-5]}$$

$$w_1^{IV} + 4\bar{N}^2 w_1'' + 4\alpha^4 w_1 = 0. \quad (1)$$

$$w_2^{IV} + 4\bar{N}^2 w_2'' = 0. \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) интегрируются независимо, постоянные интегрирования определяются из граничных условий и из условий сопряжения участков.

## 2 Напряженно-деформированное состояние 1-го участка ( $0 \leq \xi_1 \leq \nu$ ).

Решение уравнения (1) ищем подстановкой Эйлера

$$w_1 = Ae^{n\xi_1}, \quad (3)$$

где  $A, n$  – константы, подлежащие определению.

Характеристическое уравнение для дифференциального уравнения (1) получим, подставляя представление (3) в уравнение (1):

$$n^4 + 4\bar{N}^2 n^2 + 4\alpha^4 = 0. \quad (4)$$

Подстановкой  $n^2 = m$  биквадратное уравнение (4) приводится к квадратному:

$$m^2 + 4\bar{N}^2 m + 4\alpha^4 = 0, \quad (5)$$

корни которого можно представить двояко в зависимости от соотношения величин  $\bar{N}$  и  $\alpha$ :

$$m_{1,2} = -2\bar{N}^2 \pm 2\sqrt{\bar{N}^2 - \alpha^4}, \quad \text{если } \bar{N} > \alpha; \quad (6)$$

$$m_{1,2} = -2\bar{N}^2 \pm 2i\sqrt{\alpha^4 - \bar{N}^2}, \quad \text{если } \bar{N} < \alpha. \quad (7)$$

Заметим, что если ввести параметр  $N_0 = 2\sqrt{kEI}$ , имеющий размерность силы и потому названный «условной силой», то соотношения между  $\bar{N}$  и  $\alpha$ :  $\bar{N} > \alpha$ ,  $\bar{N} = \alpha$ ,  $\bar{N} < \alpha$ , могут быть заме-

нены аналогичными соотношениями между размерными величинами  $N$  и  $N_0$ :  $N > N_0$ ,  $N = N_0$ ,  $N < N_0$ , так как

$$\bar{N} = \sqrt{\frac{NL^2}{4EI}} \quad \text{и} \quad \alpha = \sqrt{\frac{N_0L^2}{4EI}}.$$

Корни  $m_{1,2}$  вида (6) используются, если  $\bar{N} > \alpha$ . При этом корни характеристического уравнения (4) будут чисто мнимыми:

$$n_{1,2} = \pm ic, \quad n_{3,4} = \pm id, \quad (8)$$

где  $c = \sqrt{\bar{N}^2 + \alpha^2} + \sqrt{\bar{N}^2 - \alpha^2}$ ;  $d = \sqrt{\bar{N}^2 + \alpha^2} - \sqrt{\bar{N}^2 - \alpha^2}$ .

Функция прогибов (3) при этом принимает вид

$$w_1 = A_1 \cos c\xi_1 + A_2 \sin c\xi_1 + A_3 \cos d\xi_1 + A_4 \sin d\xi_1. \quad (9)$$

Корни  $m_{1,2}$  вида (7) используются, если  $\bar{N} < \alpha$ . В этом случае корни уравнения (4) становятся комплексными:

$$n_{1,2,3,4} = \pm a \pm ib, \quad (10)$$

где  $a = \sqrt{L^2 - \bar{N}^2}$ ,  $b = \sqrt{\alpha^2 + \bar{N}^2}$ .

Функция прогибов (3) принимает вид

$$w_1 = A_1 cha\xi_1 \cos b\xi_1 + A_2 sha\xi_1 \cos b\xi_1 + A_3 cha\xi_1 \sin b\xi_1 + A_4 sha\xi_1 \sin b\xi_1. \quad (11)$$

И, наконец, при  $\bar{N} = \alpha$  получаем из (6) или (7) двукратные корни уравнения (4):

$$n_{1,2} = ib, \quad n_{3,4} = -ib \quad (12)$$

и функцию прогибов вида:

$$w_1 = (A_1 + A_2\xi_1) \cos b\xi_1 + (A_3 + A_4\xi_1) \sin b\xi_1. \quad (13)$$

Постоянные интегрирования  $A_i (i=1..4)$  дифференциального уравнения (1) удобно выразить через начальные параметры  $w_{01} = w_1(0)$ ,  $w'_{01} = w'_1(0)$ ,  $w''_{01} = w''_1(0)$ ,  $w'''_{01} = w'''_1(0)$ . Процедуру преобразования коэффициентов функций (9), (11), (13) покажем на примере функции (9) ( $\bar{N} > \alpha$ ).

Дифференцируя функцию (9) трижды по  $\xi_1$ , получим безразмерные функции углов поворота поперечного сечения  $w'_1(\xi_1)$ , изгибающего момента  $w''_1(\xi_1)$ , поперечной силы  $w'''_1(\xi_1)$ :

$$\begin{aligned} w'_1 &= c(-A_1 \sin c\xi_1 + A_2 \cos c\xi_1) + d(-A_3 \sin d\xi_1 + A_4 \cos d\xi_1); \\ w''_1 &= c^2(-A_1 \cos c\xi_1 - A_2 \sin c\xi_1) + d^2(-A_3 \cos d\xi_1 - A_4 \sin d\xi_1); \\ w'''_1 &= c^3(A_1 \sin c\xi_1 - A_2 \cos c\xi_1) + d^3(A_3 \sin d\xi_1 - A_4 \cos d\xi_1). \end{aligned} \quad (14)$$

Введем вектор состояния  $\bar{w}_1$  в произвольном сечении  $\xi_1$ :

$$\bar{w}_1 = \{w_1(\xi_1) \quad w'_1(\xi_1) \quad w''_1(\xi_1) \quad w'''_1(\xi_1)\}^T,$$

вектор постоянных интегрирования  $\bar{A}$

$$\bar{A} = \{A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4\}^T$$

и функциональную матрицу  $M(\xi_1)$ , полученную при дифференцировании функции (9):

$$M_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} \cos c\xi_1 & \sin c\xi_1 & \cos d\xi_1 & \sin d\xi_1 \\ -c \sin c\xi_1 & c \cos c\xi_1 & -d \sin d\xi_1 & d \cos d\xi_1 \\ -c^2 \cos c\xi_1 & -c^2 \sin c\xi_1 & -d^2 \cos d\xi_1 & -d^2 \sin d\xi_1 \\ c^3 \sin c\xi_1 & -c^3 \cos c\xi_1 & d^3 \sin d\xi_1 & -d^3 \cos d\xi_1 \end{pmatrix}.$$

Теперь систему уравнений (9), (14) можно представить матричным уравнением

$$\bar{w}_1 = M\bar{A}. \quad (15)$$

Вычисляя значения функций (9) и (14) в начале координат 1-го участка  $\xi_1 = 0$ , получим матричное уравнение, связывающее начальные параметры 1-го участка с постоянными интегрирования  $A_i$ :

$$\bar{w}_{01} = L\bar{A}, \quad \bar{A} = L^{-1}\bar{w}_{01}, \quad (16)$$

где  $\bar{w}_{01} = \{w_{01} \quad w'_{01} \quad w''_{01} \quad w'''_{01}\}$  – вектор начальных параметров 1-го участка.

$$L_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ -c^2 & 0 & -d^2 & 0 \\ 0 & -c^3 & 0 & -d^3 \end{pmatrix}; \quad L^{-1}_{4 \times 4} = \frac{1}{cd(d^2 - c^2)} \begin{pmatrix} cd^3 & 0 & cd & 0 \\ 0 & d^3 & 0 & d \\ -c^3d & 0 & -cd & 0 \\ 0 & -c^3 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Подставляя вектор  $\bar{A}$  из (16) в уравнение (15), получим матричное уравнение

$$\bar{w}_1 = \Phi_1(\xi_1)\bar{w}_{01}, \quad (17)$$

где матрица  $\Phi_1 = ML^{-1}$  характеризует влияние начальных параметров на состояние произвольного сечения  $\xi_1$  1-го участка. Элементами матрицы  $\Phi_1 = \{\Phi_{ij}\}$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4$ ) являются функции

$\Phi_{11} = \frac{d^2 \cos c\xi_1 - c^2 \cos d\xi_1}{d^2 - c^2}$ ;  $\Phi_{12} = \frac{d^3 \sin \xi_1 - c^3 \sin d\xi_1}{cd(d^2 - c^2)}$ ;  $\Phi_{13} = \frac{\cos c\xi_1 - \cos d\xi_1}{d^2 - c^2}$ ;  $\Phi_{14} = \frac{d \sin c\xi_1 - c \sin d\xi_1}{cd(d^2 - c^2)}$ ;

$$\Phi_{21} = -(cd)^2 \Phi_{14}; \quad \Phi_{22} = \Phi_{11}; \quad \Phi_{23} = \frac{d \sin d\xi_1 - c \sin c\xi_1}{d^2 - c^2}; \quad \Phi_{24} = \Phi_{13};$$

$$\Phi_{31} = -(cd)^2 \Phi_{13}; \quad \Phi_{32} = \Phi_{21}; \quad \Phi_{33} = \frac{d^2 \cos d\xi_1 - c^2 \cos c\xi_1}{d^2 - c^2}; \quad \Phi_{34} = \Phi_{23};$$

$$\Phi_{41} = -(cd)^2 \Phi_{23}; \quad \Phi_{42} = \Phi_{31}; \quad \Phi_{43} = \frac{c^3 \sin c\xi_1 - d^3 \sin d\xi_1}{d^2 - c^2}; \quad \Phi_{44} = \Phi_{33}.$$

Применяя аналогичную процедуру к функциям (11) и (13), получим соответственно матричные уравнения

$$\bar{w}_1 = \chi_1(\xi_1)\bar{w}_{01}; \quad (18)$$

$$\bar{w}_1 = \psi_1(\xi_1)\bar{w}_{01}. \quad (19)$$

Таким образом, напряженно-деформированное состояние 1-го участка описывается одним из уравнений (17)–(19).

В конце 1-го участка при  $\xi_1 = v$  векторы состояния принимают значения  $\bar{w}_1(v) = \Phi_1(v)\bar{w}_{01}$  либо  $\bar{w}_1(v) = \chi_1(v)\bar{w}_{01}$ , либо  $\bar{w}_1 = \psi_1(\xi_1)\bar{w}_{01}$ .

### 3 Напряженно-деформированное состояние 2-го участка ( $0 \leq \xi_2 \leq 1 - v$ ).

Применяя подстановку Эйлера

$$w_2 = Ae^{n\xi_2}$$

для уравнения (2), получим для него характеристическое уравнение

$$n^4 + 4\bar{N}^2 n^2 = 0,$$

которое имеет четыре корня: двукратный корень  $n_{1,2} = 0$  и чисто мнимые корни  $n_{3,4} = \pm 2i\bar{N}$ . Тогда общее решение уравнения (2) принимает вид

$$w_2 = A_1 \sin 2\bar{N}\xi_2 + A_2 \cos 2\bar{N}\xi_2 + A_3 \xi_2 + A_4.$$

Заменяя константы  $A_i$  ( $i = 1 \dots 4$ ) начальными параметрами 2-го участка  $w_{20} = w_2(0)$ ,  $w'_{20} = w'_2(0)$ ,  $w''_{20} = w''_2(0)$ ,  $w'''_{20} = w'''_2(0)$ , выразим вектор состояния  $\bar{w}_2(\xi_2)$  в произвольном сечении  $\xi_2$  через вектор начальных параметров этого участка  $\bar{w}_{20}$

$$\bar{w}_2 = K(\xi_2)\bar{w}_{20}, \quad (20)$$

где  $\bar{w}_2 = \{w_2(\xi_2) \quad w_2'(\xi_2) \quad w_2''(\xi_2) \quad w_2'''(\xi_2)\}$ ;  $\bar{w}_{20} = \{w_{20} \quad w_{20}' \quad w_{20}'' \quad w_{20}'''\}$ ;  $K(\xi_2) = \{\alpha_{ij}\}_{4 \times 4}$  – матрица влияния 2-го участка с элементами

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= 1; & \alpha_{12} &= \xi_2; & \alpha_{13} &= \frac{\sin^2 \bar{N} \xi_2}{2\bar{N}^2}; & \alpha_{14} &= \frac{\alpha_{12} - \alpha_{23}}{4\bar{N}^2}; \\ \alpha_{21} &= 0; & \alpha_{22} &= 1; & \alpha_{23} &= \frac{\sin 2\bar{N} \xi_2}{2\bar{N}}; & \alpha_{24} &= \alpha_{13}; \\ \alpha_{31} &= 0; & \alpha_{32} &= 0; & \alpha_{33} &= \cos 2\bar{N} \xi_2; & \alpha_{34} &= \alpha_{23}; \\ \alpha_{41} &= 0; & \alpha_{42} &= 0; & \alpha_{43} &= -2\bar{N} \sin 2\bar{N} \xi_2; & \alpha_{44} &= \alpha_{33}. \end{aligned}$$

**4 Условие сопряжения участков.** Условием сопряжения участков стержня служит равенство векторов состояния в сечении, являющимся одновременно концевым 1-го участка и начальным – 2-го, то есть

$$\bar{w}_1(v) = \bar{w}_2(0). \quad (21)$$

Состояние в начальном сечении 2-го участка определяется вектором (20) при  $\xi_2 = 0$ . Учитывая, что матрица  $K(0)$  единичная, из (20) следует, что  $\bar{w}_2(0) = \bar{w}_{20}$ .

Подставляя (21) в уравнения (17)–(19), получим связь между начальными параметрами участков для соответствующих вариантов представления корней характеристического уравнения (4)

$$\begin{aligned} \bar{w}_{20} &= \varphi_1(v) \bar{w}_{01}, & \bar{N} &> \alpha; \\ \bar{w}_{20} &= \chi_1(v) \bar{w}_{01}, & \bar{N} &< \alpha; \\ \bar{w}_{20} &= \psi_1(v) \bar{w}_{01}, & \bar{N} &= \alpha. \end{aligned} \quad (22)$$

Уравнения связи начальных параметров (22) позволяют выразить состояние произвольного сечения любого участка через единичный набор начальных параметров 1-го участка:

– в случае  $\bar{N} > \alpha$  ( $N > N_0$ )

$$\bar{w}_1(\xi_1) = \varphi_1(\xi_1) \bar{w}_{01}; \quad \bar{w}_2(\xi_2) = K(\xi_2) \varphi_1(v) \bar{w}_{01} = \varphi_2(\xi_2) \bar{w}_{01}; \quad \varphi_2(\xi_2) = \{t_{ij}\}; \quad (23)$$

– в случае  $\bar{N} < \alpha$  ( $N < N_0$ )

$$\bar{w}_1(\xi_1) = \chi_1(\xi_1) \bar{w}_{01}; \quad \bar{w}_2(\xi_2) = K(\xi_2) \chi_1(v) \bar{w}_{01} = \chi_2(\xi_2) \bar{w}_{01}; \quad \chi_2(\xi_2) = \{s_{ij}\}; \quad (24)$$

– в случае  $\bar{N} = \alpha$  ( $N = N_0$ )

$$\bar{w}_1(\xi_1) = \psi_1(\xi_1) \bar{w}_{01}; \quad \bar{w}_2(\xi_2) = K(\xi_2) \psi_1(v) \bar{w}_{01} = \psi_2(\xi_2) \bar{w}_{01}; \quad \psi_2(\xi_2) = \{r_{ij}\}. \quad (25)$$

Для дальнейших построений необходимо определиться с условиями закрепления концов стержня.

**5 Критическая сила сжатого стержня с шарнирным закреплением концов.** Граничные условия в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 0, & w_{10} &= w_{10}'' = 0; \\ \xi_2 &= 1 - v, & w_2(1 - v) &= w_2''(1 - v) = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Для определения критической силы вначале принимаем условие, согласно которому сжимающая стержень сила  $N$  равна «условной силе»  $N_0$ . Тогда для 1-го участка получим вариант (12), (13), (19), а для стержня в целом – вариант (25). Причем при  $\bar{N} = \alpha$  из соотношения (10) следует  $\bar{N} = \frac{b}{\sqrt{2}}$ . Запишем второе уравнение (25) для сечения  $\xi_2 = 1 - v$  в развернутом виде с учетом граничных условий (26):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ w_2'(1 - v) \\ 0 \\ w_2'''(1 - v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11}(1 - v, v) & r_{12}(1 - v, v) & r_{13}(1 - v, v) & r_{14}(1 - v, v) \\ r_{21}(1 - v, v) & r_{22}(1 - v, v) & r_{23}(1 - v, v) & r_{24}(1 - v, v) \\ r_{31}(1 - v, v) & r_{32}(1 - v, v) & r_{33}(1 - v, v) & r_{34}(1 - v, v) \\ r_{41}(1 - v, v) & r_{42}(1 - v, v) & r_{43}(1 - v, v) & r_{44}(1 - v, v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ w_0' \\ 0 \\ w_0''' \end{pmatrix},$$

откуда получаем систему однородных алгебраических уравнений относительно двух неизвестных начальных параметров  $w_0'$  и  $w_0'''$

$$\begin{cases} r_{12}(1-\nu, \nu)w_0' + r_{14}(1-\nu, \nu)w_0''' = 0; \\ r_{32}(1-\nu, \nu)w_0' + r_{34}(1-\nu, \nu)w_0''' = 0. \end{cases} \quad (27)$$

Приравнявая определитель матрицы, составленной из коэффициентов системы (27), нулю, получим трансцендентное уравнение, минимальный положительный корень которого является критической силой заданного стержня при относительной длине части, контактирующей с упругим основанием, равной  $\nu$ :

$$r_{12}(1-\nu, \nu)r_{34}(1-\nu, \nu) - r_{14}(1-\nu, \nu)r_{32}(1-\nu, \nu) = 0. \quad (28)$$

Решение уравнения (28) при заданном  $\nu$  дает ряд значений параметра  $b_n (n=1, 2, 3, \dots)$ , каждому значению  $b_n$  соответствует безразмерный параметр  $\bar{N}_n$  (или  $\alpha_n$ ):

$$\bar{N}_n = \alpha_n = \frac{b_n}{\sqrt{2}}. \quad (29)$$

Выражая жесткость основания  $k$  через «условную силу»  $N_0$ , получим

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{N_0}{N_{\text{крс}}}}, \quad (30)$$

где  $N_{\text{крс}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$  – критическая сила такого же, но свободного стержня.

Исключая из (29) и (30)  $\alpha_n$  и учитывая исходное предположение, что критическая сила стержня равна «условной силе», получим

$$N_{\text{кр}} = N_0 = \frac{2b_1}{\pi^2} N_{\text{крс}}. \quad (31)$$

Последнее равенство следует трактовать следующим образом: если «условная сила»  $N_0$  стержня с характеристиками  $E, I, L$ , поддерживаемого частично на относительной длине  $\nu$  упругим основанием с коэффициентом жесткости  $k$ , закрепленного шарнирно по концам, равна следующей величине:

$$N_0 = \frac{2b_1^2(\nu)}{\pi^2} N_{\text{крс}},$$

то и критическая сила такого стержня будет такой же:

$$N_{\text{кр}} = \frac{2b_1^2(\nu)}{\pi^2} N_{\text{крс}}.$$

При иных параметрах стержня и основания, дающих «условную силу»

$$N_0 \neq \frac{2b_1^2(\nu)}{\pi^2} N_{\text{крс}},$$

расчет критической силы производится по вариантам либо (8), (9), (23), либо (10), (11), (24), в зависимости от того, в какую сторону  $N_0$  отклоняется от числа  $\frac{2b_1^2(\nu)}{\pi^2} N_{\text{крс}}$ .

**Заключение.** Разработанная методика расчета критической силы сжатого стержня, частично опертого на упругое основание Винклера отличается от известных методик [1–5] тем, что оценивает величину «условной силы» в долях известной критической силы такого же, но свободного (без основания) стержня. Это позволяет, определив коэффициент  $\frac{2b_1^2(\nu)}{\pi^2} N_{\text{крс}}$ , характеризующий данную систему «стержень-основание», обоснованно выбрать одну из трех функций прогибов (форм потери устойчивости) и далее искать критическую силу на базе этих функций.

Кроме того, использование начальных параметров в разработанной методике позволяет эффективно применять ее для стержней и (или) оснований, состоящих из произвольного числа кусочно-непрерывных участков.

### Список литературы

- 1 Eisenberger, M. Stability of beams on elastic foundation / M. Eisenberger, D. Yankelevsky, J. Clastornik // Computers and Structures. – Vol. 24. – No. 1. – 1986. – P. 135–139.
- 2 Stability of end-bearing piles in a non-homogeneous elastic foundation / R. P. West [et al.] // Intern. J. for Numerical and Analytical Methods in geomechanics. – Vol. 21. – 1997. – P. 845–861.
- 3 Kraav, T. Buckling of beams and columns on elastic foundation / T. Kraav, J. Lellep // Proc. 2nd. Intern. conf. on Optimization and Analysis of Structures: Tartu, Estonia, 2013. – P. 52–58.
- 4 Aristizabal-Ochoa, J. D. Stability of slender columns on an elastic foundations with generalised end conditions / J. D. Aristizabal-Ochoa // Ingenieria e Investigation. – Vol. 33. – No. 3. – 2013. – P. 34–40.
- 5 Analysis of buckling of piles fully embedded in ground according to finite element method / V. Shatri [et al.] // Intern. J. of Current Engineering and Technology. – Vol. 4. – No. 1. – 2014. – P. 201–205.

УДК 621.3

### ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ СТРУКТУРЫ ФИТИЛЯ В ПЛОСКИХ ТЕПЛОТВОДЯЩИХ ОСНОВАНИЯХ, РАБОТАЮЩИХ ПО ПРИНЦИПУ ТЕПЛОВЫХ ТРУБ

*П. О. ПОЛЯКОВ, Л. Н. РАБИНСКИЙ, Ю. О. СОЛЯЕВ*  
*Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация*

Предложена методика топологической оптимизации плоских теплоотводящих оснований, работающих по принципу тепловых труб и применяемых для охлаждения микроэлектроники. Рассматриваются основания, выполненные из меди (медные стенки/медный фитиль), и с водой в качестве рабочей жидкости. Предполагается, что толщина слоя фитиля на внутренних стенках изделия может быть переменной, то есть является неизвестной функцией координат, которая определяется в результате решения задачи топологической оптимизации. Целью оптимизации является снижение потерь давления и повышение капиллярного предела рассматриваемой плоской тепловой трубки.

Расчеты проводятся в квазистационарном приближении в плоской постановке и включают в себя модель фильтрации жидкости в пористом фитиле, модель ламинарного течения газа в паропроводе и модель теплопроводности в стенке изделия с учетом эффектов конденсации/испарения рабочей жидкости. Особенностью расчетов является необходимость поиска оптимальной внутренней геометрии фитиля в плоской тепловой трубке для обеспечения одновременного снижения потерь давлений в противоположных потоках жидкости (в фитиле) и газа (в паропроводе). Требование по максимальной температуре нагрева в зоне подвода тепла является ограничением задачи оптимизации.

В результате расчетов установлены оптимальные структуры теплоотводящих оснований различной формы с одним или несколькими источниками тепла.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (ФЦП «Исследования и разработки, соглашение №14.574.21.0166, RFMEFI57417X0166).

УДК 539.3

### НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ЛИНЕЙНО-ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА

*С. Г. ПШЕНИЧНОВ*  
*Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова,*  
*г. Москва, Российская Федерация*

Во многих отраслях современного производства, в том числе в машиностроении, авиационной промышленности, строительстве и т. д., используются материалы, обладающие наследственными свойствами, в частности, линейно-вязкоупругие материалы. Элементы конструкций, изготовленные из таких материалов, в процессе эксплуатации или в аварийных ситуациях могут подвергаться раз-