Полученные результаты выводятся в виде таблицы. Для проверки полученных результатов вычисленные программой значения $H(\tau)$ подставляем в левую часть исследуемого интегрального уравнения и проводим численное интегрирование. Программа также была протестирована для расчета покрытия в случае изотропного материала.

Список литературы

1 **Han, S. M.** Determining hardness of thin films in elastically mismatched film-on-substrate systems using nanoindentation / Seung Min Han, Ranjana Saha, William D. Nix // Acta Materialia. –2006. – No. 54. – P. 1571–1581.

2 **Можаровский, В. В.** О контактном взаимодействии жесткого индентора с армированным резиновым слоем с учетом явлений вязкоупругости / В. В. Можаровский // Полимерные материалы и технологии. – 2017. – Т. 3, № 2. – С. 70–79.

3 **Можаровский, В. В.** Прикладная механика слоистых тел из композитов / В. В. Можаровский, В. Е. Старжинский. – Минск : Наука, 1988. – 280 с.

УДК 539.3

ТЕРМОСИЛОВОЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАГРУЖЕНИЕ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ В СВОЕЙ ПЛОСКОСТИ

А. В. НЕСТЕРОВИЧ

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

При осесимметричном растяжении-сжатии тангенциальная нагрузка отсутствует ($p_ц = 0$), а радиальная или постоянна, или не зависит от ц, т. е. $p_r = p_r(r)$. Первое уравнение системы принимает вид

$$a_1\left(u_r,_r + \frac{u_r,_r}{r} - \frac{u_r}{r^2}\right) = -p_r. \tag{1}$$

Его решением будет

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{1}{a_1 r}\int_0^r r\int_0^r p_r dr dr. \tag{2}$$

Константы интегрирования C_1, C_2 следуют из граничных условий. В центре сплошной пластины перемещение должно быть конечным, поэтому $C_2 = 0$. Если внешний контур пластины $r = r_0$ закреплен, то $u_r\big|_{r=r_0} = 0$, и из предыдущего выражения следует

$$C_1 = \frac{1}{a_1 r_0^2}\int_0^r r\int_0^r p_r dr dr.$$

При осесимметричном кручении радиальная нагрузка отсутствует $p_r = 0$, а тангенциальная или постоянна, или не зависит от ц, т. е. $p_ц = p_ц(r)$. Второе уравнение системы (1) принимает вид

$$a_5\left(u_\varphi,_{rr} + \frac{u_\varphi,_r}{r} - \frac{u_\varphi}{r^2}\right) = -p_\varphi. \tag{3}$$

Решение соответствующего однородного уравнения будет

$$u_\varphi = Ar^{\sqrt{2}} + Br^{-\sqrt{2}}.$$

Общее решение неоднородного уравнения (3) получим методом вариации произвольных постоянных:

$$u_\varphi = A(r)r^{\sqrt{2}} + B(r)r^{-\sqrt{2}}.$$

Параметры $A(r)$, $B(r)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} A,_r r^{\sqrt{2}} + B,_r r^{-\sqrt{2}} = 0 \\ \sqrt{2}A,_r r^{\sqrt{2}-1} - \sqrt{2}B,_r r^{-\sqrt{2}-1} = -p_\varphi \end{cases}.$$

В результате имеем

$$A(r) = -\frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^r p_\varphi r^{1-\sqrt{2}} dr + C_3;\ B(r) = \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^r p_\varphi r^{1+\sqrt{2}} dr + C_4.$$

Подставив последние выражения в предыдущие, получим общее решение неоднородного уравнения

$$u_\varphi = C_3 r^{\sqrt{2}} + C_4 r^{-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{4}\left(r^{-\sqrt{2}} \int_0^r p_\varphi r^{1+\sqrt{2}} dr - r^{\sqrt{2}} \int_0^r p_\varphi r^{1-\sqrt{2}} dr \right). \quad (4)$$

Константы интегрирования следуют из граничных условий. В центре сплошной пластины перемещение должно быть конечным, поэтому $C_4 = 0$. Если внешний контур пластины $r = r_0$ закреплен, то $u_\varphi \big|_{r=r_0} = 0$, и из (4) следует

$$C_3 = -\frac{\sqrt{2}}{4}\left(r_0^{-2\sqrt{2}} \int_0^{r_0} p_\varphi r_0^{1+\sqrt{2}} dr - \int_0^{r_0} p_\varphi r_0^{1-\sqrt{2}} dr \right).$$

Следствие 1. При постоянных нагрузках p_r, $p_ц$ из решений (1), (4) для сплошной пластины получим перемещения:

$$u_r = C_1 r - \frac{p_r r^2}{3a_1}, \qquad u_\phi = C_3 r^{\sqrt{2}} - \frac{p_\varphi}{2a_5} r^2 .$$

где константы интегрирования C_1, C_3 определяются выражениями приведенными выше, и при закрепленном контуре будут

$$C_1 = \frac{p_r r_0}{3a_1}, \qquad C_3 = \frac{p_\varphi}{2a_5} r_0^{2-\sqrt{2}} .$$

При равномерном растяжении-сжатии деформации и напряжения вычисляются по формулам:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} = C_1 - \frac{2p_r r}{3a_1} = \frac{p_r}{3a_1}(r_0 - 2r); \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} = C_1 - \frac{p_r r}{3a_1} = \frac{p_r}{3a_1}(r_0 - r);$$

$$\sigma_{rr} = K^+ \varepsilon_{rr} + K^- \varepsilon_{\varphi\varphi} - 3K\alpha_0 T = \frac{p_r}{3a_1}\left[K^+ (r_0 - 2r) + K^- (r_0 - r) \right] - 3K\alpha_0 T ;$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = K^+ \varepsilon_{\varphi\varphi} + K^- \varepsilon_{rr} - 3K\alpha_0 T = \frac{p_r}{3a_1}\left[K^+ (r_0 - r) + K^- (r_0 - 2r) \right] - 3K\alpha_0 T .$$

Следствие 2. При нагрузках rp_r, $rp_ц$ (p_r, $p_ц$ – const), линейно зависящих от радиуса, из решений (1), (4) для сплошной пластины с заделанным контуром получим следующие перемещения:

$$u_r = C_1 r - \frac{p_r r^3}{8a_1}; \qquad u_\varphi = C_3 r^{\sqrt{2}}, \quad (5)$$

где константы интегрирования C_1, C_3 следуют из условия равенства нулю перемещений на контуре:

$$C_1 r_0 = \frac{p_r r_0^3}{8a_1}; \qquad C_3 = 0 .$$

Отметим, что с помощью решения (5) можно моделировать перемещения во вращающемся диске, где радиальная сила инерции пропорциональна радиальной координате рассматриваемой точки.

Следствие 3. При совместном осесимметричном растяжении и кручении пластины силами p_r, $p_ц$ в ее плоскости перемещения u_r, $u_ц$ в силу принципа суперпозиции и ортогональности нагрузок определяются формулами (1), (4).

Замечание. Для пластин кольцевой формы константы C_2, C_4 определяется из граничного условия на внутреннем контуре.

Численные результаты получены при постоянных нагрузках $p_r = 10^8$ Па, $p_ц = 10^8$ Па при трех различных конструкционных материалах пластины: нитридкремниевая конструкционная керамика (НКККМ), дюралюминий (сплав Д16Т), политетрафторэтилен (фторопласт-4). Расчеты производятся при температурах $T_1 = 293$ К, $T_2 = 343$ К, $T_3 = 393$ К.

При изменении температуры в принятых пределах радиальное u_r и тангенциальное $u_ц$ перемещения в керамической пластине не изменяются, т. к. термозависимость материала наступает при $T > 1273$ К. В дюралюминиевой пластине при повышении температуры на 50° перемещения увеличиваются на 3,5 %, при изменении на 100° происходит увеличение на 7 %. Во фторопластовой пластине соответствующее повышение температуры вызывает увеличение перемещений на 100 и 240 % соответственно.

Следует отметить, что изменение перемещений вызваны только зависимостью упругих модулей материалов от температуры.

По распределению радиальных у$_{rr}$ и тангенциальных у$_{цц}$ напряжений приходим к результатам: с ростом температуры материалы стесненных по контуру пластин расширяются, поэтому напряжения сдвигаются в отрицательную область, увеличиваясь по модулю для керамики и дюралюминия примерно на 114 и 227 %. В полимерной пластине соответствующее изменение напряжений несущественно.

Следует отметить, что радиальные у$_{rr}$ напряжения несколько больше по величине тангенциальных у$_{цц}$.

УДК 621.534; 62.752, 629.4.015

О РАСШИРЕНИИ ВОЗМОЖНОСТЕЙ СТРУКТУРНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

А. В. НИКОЛАЕВ
Иркутский государственный университет путей сообщения, Российская Федерация

Обеспечение надежности работы технических и транспортных машин в условиях интенсивного динамического нагружения связано с развитием методов математического моделирования, в частности, методов, основанных на структурных интерпретациях, что нашло отражение в работах [1, 2]. Возможности интерпретации механических колебательных систем в виде структурных схем эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления, позволяет использовать ряд понятий, связанных с отображением динамических жесткостей систем, и ее фрагментов, межпарциальных связей, передаточных функций и др.

В предлагаемом докладе рассматриваются вопросы детализации технологических приемов построения структурных математических моделей технических объектов с целью учета особенностей возникновения динамических эффектов.

1 Структурная математическая модель, технология преобразований. Математическя модель выстраивается на основе рекомендаций, изложенных в [3, 4]. На рисунке 1 показана в поэтапной последовательности технология преобразования структурных схем, отображающих возможности формирования определенных свойств технических объектов.

2 Особенности практической реализации метода. Разработана технология преобразования исходных расчетных схем к виду с выделением объекта в виде интегрирующего второго порядка, относительно которого формируется цепь отрицательной обратной связи. Такая цепь, в физическом смысле, интерпретируется как пружина с динамической жесткостью. Система с несколькими степенями свободы может быть приведена к системе с одной степенью свободы, обладающей обобщенным упругим элементом и внешними силами, которые приведены к объекту.

Знание динамических жесткостей позволяет оценить возможные динамические особенности системы. В частности, режим резонанса в системе может быть интерпретирован как движение объекта при нулевой динамической жесткости системы в целом. Нулевые динамические жесткости структурных образований (или квазипружин) соответствуют проявлениям определенных форм самоорганизации движения элементов системы [5].

При использовании характеристического уравнения, которое структурируется как сумма отдельных элементов, возможно определение частот собственных колебаний системы. Автором предлагается оригинальный графоаналитический способ для систем с несколькими степенями свободы [1]. Метод структурных преобразований позволяет ввести в рассмотрение понятия о коэффициентах связности движений, который можно интерпретировать через передаточную функцию межпарциальных связей систем.

Исследованы возможности изменения параметров системы через введение понятия динамических жесткостей, связности колебаний и внешних сил на графики амплитудно-частотных характеристик [3].