УДК 539.3

РЕАЛИЗАЦИЯ РАСЧЕТА ИНДЕНТИРОВАНИЯ ПОКРЫТИЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

В. В. МОЖАРОВСКИЙ, Д. С. КУЗЬМЕНКОВ, М. В. КУЛАГИНА
Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины, Республика Беларусь

Основная задача исследования заключается в разработке алгоритма для построения и создания программ реализации расчетов индентирования покрытий на упругом основании. Индентирование может осуществляться коническим, шаровым индентором. Необходимо найти связь между глубиной вдавливания и действующим усилием. Задача значительно усложняется, если покрытие или основание имеют анизотропные механические свойства. На основании представленной математической модели расчета давления при действии инденторов для изотропного случая [1] построена схема реализации расчета для транверсально-изотропных покрытий. Аналогично получены зависимости для транверсально-изотропного и ортотропного покрытия при вдавливании цилиндра и шара, в частности, некоторые подходы представлены в [2]. Общая задача сводится к решению интегрального уравнения вида

$$H(\tau)-\frac{1}{\pi}\int_0^1\left[k(x+\tau)+k(x-\tau)\right]H(x)dx=f(\tau),$$

где $f=1-\gamma\tau\dfrac{\ln(1+\tau\rho)-\ln(1-\tau\rho)}{\ln(1+\rho/\gamma)-\ln(1-\rho/\gamma)}$ – для сферического индентора; $\rho=a/R,\ E_{11}=E_{33};\ \gamma=a/a_h$.

Математическая модель решения интегрального уравнения. Для решения задачи составлен алгоритм решения интегрального уравнения и протестирован. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x)-\lambda\int_{-1}^{1}k(x,s)y(s)ds=f(x),$$

где $-1\le x,s\le 1$; λ – заданный параметр; $f(x)$ – заданная функция; $y(x)$ – неизвестная функция. Будем рассматривать несингулярные интегральные уравнения, т. е. ядро $k(x,s)$ непрерывно и ограничено.

Для численного решения уравнения:

$$H(\tau)-\frac{1}{\pi}\int_0^1\left[k(x+\tau)+k(x-\tau)\right]H(x)dx=f(\tau)$$

применяем метод разложения по многочленам Чебышева. Здесь $H(x)$ – неизвестная функция, определяющая давления под индентором (см., например, [1]).

Ядро $k(\tau,s)$ определяется путём интегрирования следующего уравнения:

$$K(u)=\frac{a}{t}\int_0^\infty g(w)\cos\left(uw\frac{a}{t}\right)dw,$$

где функция $g(w)$ определяется в зависимости от упругих свойств рассматриваемого покрытия и основания. Так, для ортотропного покрытия можно определять по методике [3], а для изотропного покрытия – по [1].

Был разработан алгоритм и создана программа, реализующая решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода методом разложения по многочленам Чебышева. Главное окно разработанной программы представлено на рисунке 1.

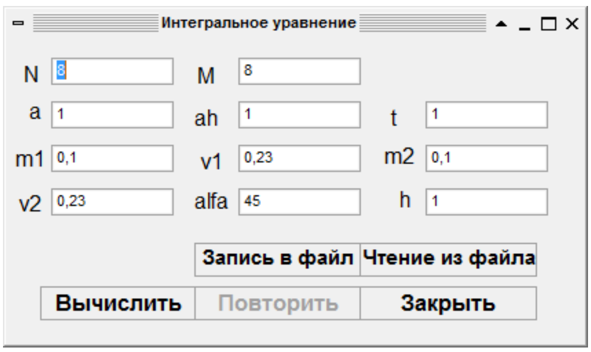

Рисунок 1 – Главное окно программы

Полученные результаты выводятся в виде таблицы. Для проверки полученных результатов вычисленные программой значения $H(\tau)$ подставляем в левую часть исследуемого интегрального уравнения и проводим численное интегрирование. Программа также была протестирована для расчета покрытия в случае изотропного материала.

Список литературы

1 **Han, S. M.** Determining hardness of thin films in elastically mismatched film-on-substrate systems using nanoindentation / Seung Min Han, Ranjana Saha, William D. Nix // Acta Materialia. –2006. – No. 54. – P. 1571–1581.

2 **Можаровский, В. В.** О контактном взаимодействии жесткого индентора с армированным резиновым слоем с учетом явлений вязкоупругости / В. В. Можаровский // Полимерные материалы и технологии. – 2017. – Т. 3, № 2. – С. 70–79.

3 **Можаровский, В. В.** Прикладная механика слоистых тел из композитов / В. В. Можаровский, В. Е. Старжинский. – Минск : Наука, 1988. – 280 с.

УДК 539.3

ТЕРМОСИЛОВОЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАГРУЖЕНИЕ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ В СВОЕЙ ПЛОСКОСТИ

А. В. НЕСТЕРОВИЧ

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

При осесимметричном растяжении-сжатии тангенциальная нагрузка отсутствует ($p_ц = 0$), а радиальная или постоянна, или не зависит от ц, т. е. $p_r = p_r(r)$. Первое уравнение системы принимает вид

$$a_1\left(u_r,_r + \frac{u_r,_r}{r} - \frac{u_r}{r^2}\right) = -p_r . \tag{1}$$

Его решением будет

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{1}{a_1 r}\int_0^r r\int_0^r p_r dr dr . \tag{2}$$

Константы интегрирования C_1, C_2 следуют из граничных условий. В центре сплошной пластины перемещение должно быть конечным, поэтому $C_2 = 0$. Если внешний контур пластины $r = r_0$ закреплен, то $u_r\big|_{r=r_0} = 0$, и из предыдущего выражения следует

$$C_1 = \frac{1}{a_1 r_0^2}\int_0^r r\int_0^r p_r dr dr .$$

При осесимметричном кручении радиальная нагрузка отсутствует $p_r = 0$, а тангенциальная или постоянна, или не зависит от ц, т. е. $p_ц = p_ц(r)$. Второе уравнение системы (1) принимает вид

$$a_5\left(u_\varphi,_{rr} + \frac{u_\varphi,_r}{r} - \frac{u_\varphi}{r^2}\right) = -p_\varphi . \tag{3}$$

Решение соответствующего однородного уравнения будет

$$u_\varphi = Ar^{\sqrt{2}} + Br^{-\sqrt{2}} .$$

Общее решение неоднородного уравнения (3) получим методом вариации произвольных постоянных:

$$u_\varphi = A(r)r^{\sqrt{2}} + B(r)r^{-\sqrt{2}} .$$

Параметры $A(r)$, $B(r)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} A,_r r^{\sqrt{2}} + B,_r r^{-\sqrt{2}} = 0 \\ \sqrt{2}A,_r r^{\sqrt{2}-1} - \sqrt{2}B,_r r^{-\sqrt{2}-1} = -p_\varphi \end{cases} .$$

В результате имеем

$$A(r) = -\frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^r p_\varphi r^{1-\sqrt{2}} dr + C_3 ; \; B(r) = \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^r p_\varphi r^{1+\sqrt{2}} dr + C_4 .$$