УДК 539.37

ОБ ОДНОЙ ОБЩЕЙ ПРИЧИНЕ ЯВЛЕНИЙ ЗАПИРАНИЯ В ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДАХ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

В. А. МАКСИМЮК
Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, г. Киев

Цилиндрические оболочки некругового поперечного сечения представляют практический интерес в строительстве. С теоретической точки зрения расчет напряженно-деформированного состояния (НДС) таких оболочек при определенных нагрузках может быть тестом для численных методов. Одним из простейших тестов может быть одномерная задача [1] о деформировании под постоянным внутренним давлением длинной цилиндрической оболочки эллиптического поперечного сечения (фактически кольца), имеющая полуторастолетнюю историю. Эта задача позволила сформулировать некоторые общие выводы о точности численных методов теории оболочек.

Сеточные вычислительные методы механики оболочек на определенном этапе столкнулись с так называемой проблемой [2, 3] запирания (locking), проявляющейся в их замедленной, но, что важно, устойчивой сходимости. После дискретизации сеточные методы приводят к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Математики и механики, в основном, по-разному объясняют причины запирания. Первые указывают на «некорректно поставленную задачу», на «плохо обусловленную матрицу», на «малые коэффициенты при старших производных», то есть на причины, лежащие в плоскости алгебры или дифференциальных уравнений. Вторые говорят о «жестких смещениях», «соотношении вклада в энергию различных деформаций», то есть указывают на причины, лежащие в плоскости механики.

На наш взгляд, существует общая причина запирания, которая лежит в плоскости вариационного исчисления. Обычно получению СЛАУ предшествует процедура варьирования определенного функционала. Варьироваться могут только независимые функции. Вследствие неудачного выбора системы координат, системы варьируемых функций или некоторых особенностей деформирования конструкции между варьируемыми функциями может возникнуть некоторая связь. Именно она приводит к вычислительному явлению запирания. Например, в показательной тестовой задаче о бездеформативном смещении кольца [4] между перемещениями в полярной системе координат возникает связь по теореме Пифагора, а в декартовой – ее нет. Применение сдвиговых моделей к тонким оболочкам также ведет к взаимосвязи между будто бы независимыми функциями, перемещениями и углами поворота, смысл которой – геометрическая часть гипотез Кирхгофа-Лява [4], что и является причиной сдвигового запирания. Мембранное запирание возникает в упомянутой задаче о деформировании под внутренним давлением длинной цилиндрической оболочки эллиптического сечения [1,5], в которой связь между перемещениями обусловлена малыми растяжениями при больших изгибах.

На первый взгляд, причины запирания в трех приведенных примерах совершенно разные. Так, в первом случае можно говорить о жестком смещении, но только в полярной системе координат и с нулевым вкладом деформаций в энергию. Во втором вырождается система дифференциальных уравнений с десятого до восьмого порядка при малом вкладе поперечного сдвига в энергию. А в третьем имеем малый вклад растяжений в энергию. Однако все приведенные примеры объединяет наличие связи в алгебраическом или дифференциальном виде между варьируемыми функциями.

Особенно запирание проявилось в третьем случае [5]. Расчет НДС оболочки был выполнен вариационно-разностным методом на основе классического функционала Лагранжа. Для достижения сходимости в двух значащих цифрах в максимальных прогибах потребовалось четверть дуги эллипса (с небольшим, на первый взгляд, соотношением полуосей $b/a = 0{,}9$) разбить на 2561 узловых точек.

Можно ожидать, что если эту же длинную цилиндрическую оболочку эллиптического поперечного сечения нагрузить так, чтобы изгибы уменьшились или стали нулевыми, то запирание исчезнет. Такие поверхностные силы можно легко определить из уравнений равновесия, в которых задать отсутствие касательного перемещения и постоянный, пусть равный толщине, прогиб:

$$u = 0\,,\ w = h\,.$$

Тогда касательная и нормальная составляющие поверхностной нагрузки на оболочку, отнесенную к криволинейной системе координат (s, z, γ) в которой координата γ направлена по нормали к поверхности, а s – длина дуги эллипса, будут определяться формулами

$$q_s = -wk' \frac{Eh}{1-\nu^2}\,,\ q_\gamma = wk^2 \frac{Eh}{1-\nu^2}\,.$$

Здесь $k(s)$ – кривизна эллипса, k' – ее производная, которые определялись численно; E и ν – модуль упругости и коэффициент поперечной деформации материала. Очевидно, что компоненты нагрузки являются переменными по дуге эллипса и зависят от координаты s.

Расчет НДС оболочки выполнялся при таких параметрах: $h = 0{,}01$ м; $a = 1$ м; $b = 0{,}9$ м; $E = 210$ ГПа; $\nu = 0{,}3$. Расчеты показали, что при таком нагружении в оболочке возникает, как и ожидалось, практически безмоментное НДС. Окружные напряжения достигают максимального значения возле большой полуоси эллипса σ_s = 288,5 МПа; возле малой они уменьшаются до 209,8 МПа.

Отметим быструю сходимость по напряжениям. Так, для достижения сходимости в трех значащих цифрах достаточно было всего 6 узловых точек. При этом прогибы укладывались в интервал от 9,73 мм возле большой полуоси до 10,3 мм возле малой, т. е. отличались от точного значения $w = h$ = 10 мм на 3 %. Касательные перемещения вследствие симметрии в указанных точках, естественно, были нулевыми, а в промежуточных областях они были почти на два порядка меньшими от прогибов, что сопоставимо с погрешностью последних. Отношение максимальной разности напряжений на внешней и внутренней поверхностях оболочки к напряжению в срединной поверхности не превышало 0,1 %, что позволяет оценить степень безмоментности НДС. Вместе с тем сходимость по прогибам менее быстрая. Так, сходимость в трех значащих цифрах была достигнута при разбиении дуги на 161 узловых точек.

Таким образом, в результате численного решения задачи о НДС оболочки под действием переменной нагрузки получены достоверные результаты при быстрой сходимости, что свидетельствует об отсутствии запирания. А в случае постоянного внутреннего давления при прочих равных условиях запирание имело место. Данный анализ подтверждает сформулированную ранее общую причину запирания в различных случаях. Соответственно существует общий метод преодоления запирания путем дополнительного варьирования заранее малых функций [4].

На первый взгляд, может показаться странным, что при одной и той же матрице СЛАУ сходимость зависит от правых частей. Однако, как уже было отмечено, проблема лежит не в алгебраической плоскости, а в плоскости вариационного исчисления. Хотя, действительно, есть аналогия между линейной зависимостью строк матрицы и связями между варьируемыми функциями.

Список литературы

1 **Абросов, Ю. Ю.** Деформування довгої тонкої циліндричної оболонки еліптичного перерізу / Ю. Ю. Абросов, В. А. Максимюк, В. С. Тарасюк // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2015. – № 2. – С. 5–10.

2 **Belytschko, T.** Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures / T. Belytschko, W. K. Liu, B. Moran. – Chichester : John Wiley & Sons Ltd, 2000. – 660 p.

3 **Голованов, А. И.** Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций / А. И. Голованов, О. Н. Тюленева, А. Ф. Шигабутдинов. – М. : Физматлит, 2006. – 392 с.

4 **Maksimyuk, V. A.** Variational Finite-difference Methods in Linear and Nonlinear Problems of the Deformation of Metallic and Composite Shells (review) / V. A. Maksimyuk, E. A. Storozhuk, I. S. Chernyshenko // Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, No. 6. – P. 613–687.

5 **Abrosov, Yu.Yu.** Influence of Cross-Sectional Ellipticity on the Deformation of a Long Cylindrical Shell / Yu.Yu. Abrosov, V. A. Maksimyuk, I. S. Chernyshenko // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, No. 5. – P. 529–534.