2 Параболическая нагрузка направлена выпуклостью вниз и действует на круговую часть поверхности пластины, ограниченную окружностью радиуса $r = a$. Тогда

$$q(r,t) = q_0(t)H_0(a-r)\left(1-\frac{r}{a}\right)^2 .$$

Отсюда

$$q_n(t) = \frac{4q_0(t)}{M_0 d_n \beta_n^3 a}\left[\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n+1}(\beta_n a) + \frac{J_0(\beta_n r_0)}{I_0(\beta_n r_0)}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_{2n+1}(\beta_n a)\right].$$

Вывод. По результатам проведенных исследований, с точки зрения прочности, при одинаковой равнодействующей вогнутые параболические нагрузки являются наиболее, а прямоугольные – наименее опасными.

УДК 539.3

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ С ОДНОРОДНОЙ ПРЕГРАДОЙ В ГРУНТЕ

Н. А. ЛОКТЕВА
Московский авиационный институт, Российская Федерация

Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ
НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация

Рассматривается, шарнирно опертая прямоугольная пластина, окруженная с двух сторон средами «1» и «2» (рисунок 1). Среды представляют из себя однородный грунт, что позволяет в качестве их моделей использовать однородную изотропную среду. В среде «1» индуцируется сферическая гармоническая волна, которая взаимодействует с преградой. В качестве модели пластины используется декартова система координат $Oxyz$, при этом предполагается, что плоскость Oxy для пластины является срединной, а ось Oz направлена в глубину среды «2».

На пластину набегает гармоническая сферическая волна с амплитудой давления на фронте p_* и частотой ω. В результате ее взаимодействия с пластиной в окружающих средах «1» и «2» возбуждаются давления с амплитудами p_1 и p_2 соответственно.

Основной целью является определение виброускорения, возникающее в среде «2» в результате взаимодействия волн и пластины. Необходимо определить координаты и модуль виброускорения:

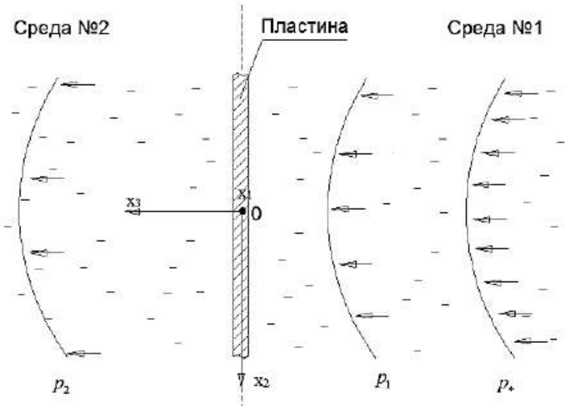

Рисунок 1

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} . \quad (1)$$

Будем считать, что все функции, входящие в уравнения движения преграды и среды, меняются по гармоническому закону.

В качестве преграды рассматривается пластина типа Тимошенко С.П. [1]. Все, входящие в уравнения Тимошенко С. П., функции раскладываются в тригонометрические ряды таким образом, чтобы выполнялись граничные условия, соответствующие шарнирному закреплению краев пластины. В результате разложения в тригонометрические ряды получается следующая система уравнений:

$$-\rho h\omega^2 w_{nm} + \mu h k^2\left(\lambda_n \chi_{1nm} + \lambda_n{}^2 w_{nm}\right) + \mu h k^2\left(\lambda_m \chi_{2nm} + \lambda_m{}^2 w_{nm}\right) - (p_{1nm} + p_{2nm}) = 0;$$

$$-\rho I\omega^2 \chi_{1nm} + I(\lambda+2\mu)\lambda_n^2 \chi_{1nm} + I(\lambda+\mu)\lambda_n\lambda_m \chi_{2nm} + \mu I \lambda_m^2 \chi_{1nm} + \mu h k^2\left(\chi_{1nm} + \lambda_n w_{nm}\right) = 0; \quad (2)$$

$$-\rho I\omega^2 \chi_{2nm} + I(\lambda+2\mu)\lambda_m^2 \chi_{2nm} + I(\lambda+\mu)\lambda_n\lambda_m \chi_{1nm} + \mu I \lambda_n^2 \chi_{2nm} + \mu h k^2\left(\chi_{2nm} + \lambda_m w_{nm}\right) = 0,$$

где $\lambda_n = \dfrac{\pi n}{l_1}$, $\lambda_m = \dfrac{\pi m}{l_2}$; щ – частота колебаний пластины; l_1, l_2 – длины сторон пластины; ρ и λ, μ – плотность и упругие постоянны Ламе; w_{nm} – прогиб; χ_{1nm}, χ_{2nm} – кривизны; κ – изменения кривизны срединной плоскости; p_{1nm}, p_{2nm} – амплитуды давлений в срезе «1» и «2». Из системы уравнений (2) определяются значения перемещений в коэффициентах рядов.

В качестве модели грунта используется однородная упругая изотропную среда. Замкнутая система уравнений, описывающая ее движение, включает в себя уравнения движения, соотношения Коши, физический закон [2]. Кроме того, возможно в качестве эквивалентных уравнений записать систему уравнений Ламе и выражения для перемещений в потенциалах:

$$\ddot{\varphi} = c_1^2 \Delta\psi, \quad \ddot{\psi} = c_2^2 \Delta\psi, \quad c_1^2 = \frac{\lambda_g + 2\mu_g}{\rho_g}, \; c_2^2 = \frac{\mu_g}{\rho_g}; \tag{3}$$

$$u_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi_3}{\partial y} - \frac{\partial\psi_2}{\partial z}, \; u_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi_1}{\partial z} - \frac{\partial\psi_3}{\partial x}, \; w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x} - \frac{\partial\psi_1}{\partial y}, \tag{4}$$

где u_1, u_2 и $w^{(l)}$ – перемещения упругой среды вдоль осей Ox, Oy и Oz соответственно, θ – коэффициент объемного расширения; ρ_g и λ_g, μ_g – плотность и упругие постоянные Ламе грунта; l – номер среды. Для решения волновых уравнений также представляем все функции в виде тригонометрических рядов. Поскольку занимаемая грунтом область неограниченна, то потенциалы решения уравнений (3) должны удовлетворять условиям излучения Зоммерфельда. Для определения констант интегрирования, возникающих в результате решения выражений (3), рассматриваются смешанные условия контакта пластины и грунта.

$$\begin{gathered} w_{nm} = w_{nm}^{(1)}\Big|_{z=0} + w_{*nm}, w_{nm} = w_{nm}^{(2)}\Big|_{z=0}, p_{1nm} = \sigma_{33nm}^{(1)}\Big|_{z=0} + \sigma_{33*nm}, p_{2nm} = -\sigma_{33nm}^{(2)}\Big|_{z=0}; \\ \sigma_{12nm}^{(2)}\Big|_{z=0} = \sigma_{12nm}^{(1)}\Big|_{z=0} = 0, \sigma_{13nm}^{(2)}\Big|_{z=0} = \sigma_{13nm}^{(1)}\Big|_{z=0} = 0, \sigma_{23nm}^{(2)}\Big|_{z=0} = \sigma_{23nm}^{(1)}\Big|_{z=0} = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

При этом принимается, что $\sigma_{33}\Big|_{z=0} = p_*\Big|_{z=0}$, где $p_* = \dfrac{-i\omega\rho_c}{\sqrt{(x-x_*)^2 + (y-y_*)^2 + (z+d)^2}}$; x_*, y_*, d – координаты источника.

Для задания значений напряжений и перемещений в набегающей волне решаем волновое уравнение в потенциалах с учетом значения нормального напряжения:

$$\begin{gathered} u_{1*nm} = \frac{x_* i\omega\rho_c R}{N r_*}\left(ike^{-ikr_*} + \frac{ke^{-ikr_*}}{r_*}\right); \; u_{2*nm} = \frac{y_* i\omega\rho_c R}{N r_*}\left(-ike^{-ikr_*} - \frac{ke^{-ikr_*}}{r_*}\right); \\ u_{3*nm} = \frac{i\omega\rho_c dR}{N r_*}\left(-ike^{-ikr_*} - \frac{ke^{-ikr_*}}{r_*}\right); \end{gathered} \tag{6}$$

$$\sigma_{11*nm} = \sigma_{22*nm} = \sigma_{33*nm} = \frac{-i\omega\rho_c R}{r_*}. \tag{7}$$

Здесь

$$R = \frac{l_1 l_2 (1-(-1)^n)(1-(-1)^m)}{\pi^2 nm};$$

$$N = 3\lambda\left(-ie^{-ik\sqrt{x_*^2+y_*^2+d^2}} - \frac{e^{-ik\sqrt{x_*^2+y_*^2+d^2}}}{\sqrt{x_*^2+y_*^2+d^2}}\right) + 2\mu\left(-ie^{-ik\sqrt{x_*^2+y_*^2+d^2}} - \frac{e^{-ik\sqrt{x_*^2+y_*^2+d^2}}}{\sqrt{x_*^2+y_*^2+d^2}}\right).$$

Подставляя полученные значения констант и параметров набегающей волны в выражения для перемещений, получаем коэффициенты разложений в ряды перемещений в среде «2». Тогда на основании формул (1) становится возможным определить модуль виброускорения в зависимости от частоты набегающей волны.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-58-00008).

Список литературы

1 **Тимошенко, С. П.** Пластины и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М. : Наука, 1966. – 636 с.
2 Волны в сплошных средах / А. Г. Горшков [и др.]. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.