сто пятна нагрева изменяется при движении вставки. Расчеты показали, что повышение температуры вставки в зоне контакта в первые 0,5 с от начала скольжения составляет около 14 градусов, что соответствует реализуемым на практике значениям. Заметное увеличение температуры провода наблюдается только вблизи области контакта. Это соответствует полученным ранее результатам теплового анализа. Данная модель позволила также произвести оценку значений напряжений, возникающих в результате скользящего контакта.

Разработанные модели в последующем могут быть использованы для усовершенствования конструкции узла токосъема.

УДК 539.3

СЭНДВИЧ-ПЛАСТИНА НА ОСНОВАНИИ ПАСТЕРНАКА

А. Г. КОЗЕЛ
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Требования к применяемым конструкциям в транспортном и строительном комплексах постоянно растут, что приводит к появлению новых технологий или совершенствования старых. Трёхслойные конструкции, имеющие относительно малую массу, способны обеспечить не только заданные показатели прочности и жёсткости, но и хорошие звуко- и теплоизолирующие свойства, а также противостоять многим другим отрицательным факторам. Благодаря этому широкое использование получили сэндвич-пластины. Они могут изготавливаться из материалов с различными физико-механическими свойствами, которые варьируются в зависимости от необходимых характеристик и условий эксплуатации заданного изделия. Конструкции и технология производства сэндвич-пластин постоянно совершенствуются, наделяя данный строительный материал новыми свойствами, что вызывает необходимость уточнения их расчёта, включая температурные и радиационные воздействия, сложность деформируемого основания.

Ранее деформирование сэндвич-пластин было изучено при опирании на одноконстантное основание Винклера. Модель упругого основания Пастернака учитывает не только сжимаемость, но и его связность, поэтому предложенная постановка задачи является новой.

Здесь предложено решение краевой задачи об осесимметричном деформировании упругой круговой сэндвич-пластины с легким заполнителем на сложном основании.

Постановка задачи проводится в цилиндрической системе координат, связанной со срединной плоскостью заполнителя. В тонких несущих слоях принимаются гипотезы Кирхгофа, в несжимаемом по толщине заполнителе нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r)$. Заполнитель считается легким, т. е. не учитывается его работа в тангенциальном направлении. На контуре пластины предполагается жесткая диафрагма, которая препятствует относительному сдвигу слоев. Решение задачи сводится к нахождению прогиба пластины, относительного сдвига в заполнителе и радиального перемещения координатной плоскости, т. е. $w(r)$, $\psi(r)$,. $u(r)$. Реакция основания описывается моделью Пастернака:

$$q_r(r) = -\kappa_0 w + t_f \Delta w, \tag{1}$$

где κ_0, t_f – коэффициенты сжатия и сдвига; Δ – оператор Лапласа.

Уравнения равновесия и граничные условия в усилиях выведены из вариационного принципа Лагранжа с учетом (1):

$$\mathrm{L}_2(a_1 u) = 0; \quad \mathrm{L}_2(a_2\psi - a_3 w,_r) = 0; \quad \mathrm{L}_3(a_3\psi - a_4 w,_r) - \kappa_0 w + t_f \Delta w = -q_0, \tag{2}$$

где q_0 – интенсивность внешней распределенной нагрузки; a_i – коэффициенты, учитывающие упругие и геометрические параметры слоев:

$$a_1 = \sum_{k=1}^{3} h_k K_k^+; \quad a_2 = c^2\left(2h_1 K_1^+ + \tfrac{2}{3} c K_3^+\right); \quad a_3 = c\left[2h_1\left(c + \tfrac{1}{2}h_1\right)K_1^+ + \tfrac{2}{3}c^2 K_3^+\right];$$

$$a_4 = 2h_1\left(c^2 + ch_1 + \tfrac{1}{3}h_1^2\right)K_1^+ + \tfrac{2}{3}c^3 K_3^+;$$

L_k – линейные дифференциальные операторы:

$$L_3(g) \equiv \frac{1}{r}\left(rL_2(g)\right),_r \equiv g,_{rrr} + \frac{2g,_{rr}}{r} - \frac{g,_r}{r^2} + \frac{g}{r^3}; \quad L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg),_r\right),_r \equiv g,_{rr} + \frac{g,_r}{r} - \frac{g}{r^2}.$$

С помощью первых двух уравнений системы (2) в третьем уравнении обнуляем коэффициенты перед функциями u и ψ. После двукратного интегрирования этих уравнений система приводится к виду

$$u=0; \quad \psi=\frac{a_3}{a_2}w,_r + C_1 r + \frac{C_2}{r}; \quad L_3(w,_r) - t_f D\Delta w + \kappa_0 D w = q_0 D, \tag{3}$$

где C_1, C_2 – константы интегрирования, $D=\dfrac{a_2}{a_4 a_2 - a_3^2}$.

Перепишем третье уравнение системы (3) в развернутом виде и получим решение однородного уравнения, приравняв левую часть уравнения нулю и используя замену переменной $x=\kappa r$:

$$w,_{xxxx} + \frac{2}{x}w,_{xxx} - \frac{1}{x^2}w,_{xx} + \frac{1}{x^3}w,_x - 2t_0^2\left(w,_{xx} + \frac{1}{x}w,_x\right) + w = 0,$$

или

$$\Delta^2 w - 2t_0^2 \Delta w + w = 0, \tag{4}$$

где $\kappa^4=\kappa_0 D$; $q=q_0 D$; $t_{f1}=t_f D$; $2t_0^2 = t_{f1}/\kappa^2$.

Решение третьего уравнения системы (3), с учётом решения уравнения (4) имеет вид

$$w=C_3 J_0(\sqrt{a}x) + C_4 H_0^{(1)}(\sqrt{a}x) + C_5 J_0(\sqrt{\bar{a}}x) + C_6 H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}}x) + w_p, \tag{5}$$

где w_p – частное решение неоднородного уравнения.

Исходя из условия ограниченности решения в начале координат, для сплошных пластин необходимо положить $C_2 = C_4 = C_6 = 0$.

Решение системы уравнений равновесия (3) с учётом решения (5) для случая равномерно распределённой нагрузки получено в виде

$$u=0; \quad \psi=-\kappa\frac{a_3}{a_2}\left(\sqrt{a}C_3 J_1(\sqrt{a}\kappa r) + \sqrt{\bar{a}}C_5 J_1(\sqrt{\bar{a}}\kappa r)\right) + C_1 r; \quad w=C_3 J_0(\sqrt{a}x) + C_5 J_0(\sqrt{\bar{a}}x) + \frac{q_0}{\kappa_0},$$

где $J_0(\sqrt{a}x)$ и $J_0(\sqrt{\bar{a}}x)$ – функции Бесселя; C_1, C_3, C_5 – константы интегрирования, определяемые из условий закрепления пластины.

Краевая задача по определению перемещений в круглой пластине на основании Пастернака замыкается присоединением к (3) кинематических граничных условий. В частности, при жёсткой заделке контура пластины должны выполняться требования ($r=R$) $u=\psi=w=w,_r=0$.

При шарнирном опирании контура пластины $u=\psi=w=0$, $M_r=0$.

В случае свободного контура пластины $\psi=0$, $T_r = M_r = M_{r,r} = 0$, где T_r, M_r – внутренние усилия.

Численные результаты получены для пластины, слои которой набраны из материалов Д16Т-фторопласт-Д16Т. Следует отметить, что при применении модели основания Винклера решение аналогичной краевой задачи получено в функциях Кельвина. При использовании модели Пастернака этот случай соответствует решению в функциях Бесселя с коэффициентом сдвига основания $t_f=0$. Были проведены соответствующие сравнительные расчеты по этим обоим решениям: в функциях Кельвина и в функциях Бесселя при $t_f=0$. Полученные численные результаты в обоих случаях совпали с точностью до 12-го знака при различных значениях коэффициента сжатия κ_0. Следовательно, несмотря на то, что аналитические решения для перемещений в пластине на основаниях Винклера и Пастернака имеют различный вид и получены в функциях Кельвина и Бесселя соответственно, совпадение численных результатов при $t_f=0$ подтверждают преемственность моделей.