Предложена технология оценки аналитических свойств системы и влияния настроечных параметров на возможности изменения структуры вибрационного поля.

Исследованы особенности динамических свойств механических колебательных систем с несколькими степенями свободы, включающих в свой состав, кроме обычных элементарных типовых звеньев, устройства для преобразования движения и рычажные механизмы, при учете особенностей, проявления свойств в различных системах координат при одновременном действии нескольких внешних воздействий.

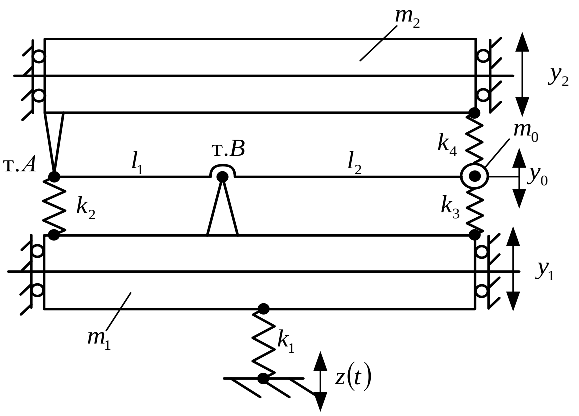

Рисунок 4 – Принципиальная схема виброзащитной системы технического объекта с устройством для преобразования движения

Разработаны методологические основы для решения задач изменения динамических состояний технических систем с расчетными схемами в виде линейных механических колебательных структур, с использованием дополнительных связей, реализуемых с помощью устройств для преобразования движения и рычажных механизмов.

Список литературы

1 Dynamics of mechanical systems with additional ties / S. V. Eliseev [et al.]. – Irkutsk : Publishing of Irkutsk State University. – 2006. – 315 p.

2 **Елисеев, С. В.** Динамическое гашение колебаний: концепция обратной связи и структурные методы математического моделирования / С. В. Елисеев, А. П. Хоменко. – Новосибирск : Наука, 2014. – 357 с.

3 **Елисеев, С. В.** Мехатронные подходы в динамике механических колебательных систем / С. В. Елисеев, Ю. Н. Резник, А. П. Хоменко. – Новосибирск : Наука, 2011. – 384 с.

4 Патент RU 157103 U1, МПК F16F 15/00. Динамический гаситель колебаний / А. П. Хоменко, С. В. Елисеев, Е. В. Каимов, Р. С. Большаков, Д. Х. Нгуен. – № 2015110669/05 ; заявл. 25.03.2015 ; опубл. 20.11.2015. Бюл. № 32.

5 Патент RU 2624757 C1, МПК F16F 15/00. Способ управления структурой вибрационного поля вибрационной технологической машины на основе использования эффектов динамического гашения и устройство для его осуществления / С. В. Елисеев, А. В. Елисеев, Е. В. Каимов, Д. Х. Нгуен, К. Ч. Выонг. – № 2016102236 ; заявл. 25.01.2016 ; опубл. 06.07.2017. Бюл. № 19.

УДК 539.3

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЕ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Ю. В. ЗАХАРЧУК
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Широкое применение в интенсивно развивающихся отраслях строительства и промышленности в наше время находят трехслойные элементы конструкций. Разработке математических моделей и методов их расчета на различные виды и типы нагрузок уделяется большое внимание, так как во многих случаях слоистые, в том числе трехслойные, элементы конструкций являются составляющими сложных и ответственных сооружений.

Следует отметить, что исследования, посвященные изучению деформирования и колебаний трехслойных элементов конструкций, ранее проводились только в случаях несжимаемого заполнителя. Это не позволяет адекватно описать деформирование трехслойных элементов и объективно оценить их поведение под действием нагрузки.

Поэтому здесь рассматривается упругая круговая трехслойная пластина со сжимаемым жестким заполнителем. Ранее была решена задача в случае легкого сжимаемого заполнителя.

Постановку задачи и ее решение проведем в цилиндрической системе координат r, ц, z. Систему координат свяжем со срединной плоскостью заполнителя. В тонких несущих слоях с толщинами $h_1 \neq h_2$ справедливы гипотезы Кирхгофа: нормаль остается несжимаемой, прямолинейной и перпендикулярной к деформированной срединной поверхности. В жестком заполнителе, воспринимающем нагрузку в тангенциальном и вертикальном направлениях, нормаль остается прямолинейной, поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r)$, обжатие по толщине принимается линейным. Деформации считаем малыми.

На внешний слой стержня действует осесимметричная распределенная изгибающая нагрузка $q = q(r)$. На контуре пластинки предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев и обжатию заполнителя (ш = 0, $v = 0$ при $r = r_0$). Через $w(r)$ и $u(r)$ обозначены прогиб и продольное перемещение срединной плоскости заполнителя, $v(r)$ – функция, характеризующая сжимаемость заполнителя. Обозначим через h_k толщину k-го слоя (k = 1, 2, 3 – номер слоя), при этом $h_3 = 2c$.

Продольные и поперечные перемещения в слоях $u^{(k)}(r, z)$ и $w^{(k)}(r, z)$ можно выразить через четыре искомые функции: $w(r)$, $u(r)$, $\psi(r)$ и $v(r)$. Используя вариационный принцип Лагранжа, получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения искомых функций:

$$
\begin{gathered}
\mathrm{L}_2(a_1u + a_2\psi - a_3w,_r - a_4v,_r) + K_3^- v,_r = 0;\\
\mathrm{L}_2(a_2u + a_5\psi - a_6w,_r - a_7v,_r) - 2cG_3\psi = 0;\\
\mathrm{L}_3(a_3u + a_6\psi - a_8w,_r - a_9v,_r) = -q;\\
\mathrm{L}_3(a_4u + a_7\psi - a_9w,_r - a_{10}v,_r) + \frac{c}{6}\left(2K_3 - \frac{1}{3}G_3\right)\left(v,_{rr} + \frac{v,_r}{r}\right) - K_3^-\left(u,_r + \frac{u}{r}\right) - \frac{1}{2c}K_3^+ v = -q.
\end{gathered} \tag{1}
$$

Здесь коэффициенты a_i выражаются через геометрические и упругие параметры материалов слоев:

$$
a_1 = \sum_{k=1}^{3} h_k K_k^+,\quad a_2 = c(h_1K_1^+ - h_2K_2^+),\quad a_3 = h_1\left(c + \frac{h_1}{2}\right)K_1^+ - h_2\left(c + \frac{h_2}{2}\right)K_2^+,\quad a_4 = h_1\left(c + \frac{h_1}{2}\right)K_1^+ + \frac{c^2}{3}K_3^+;
$$

$$
a_5 = c^2\left(h_1K_1^+ + h_2K_2^+\right) + \frac{2}{3}c^3K_3^+,\quad a_6 = c\left[h_1\left(c + \frac{h_1}{2}\right)K_1^+ + h_2\left(c + \frac{h_2}{2}\right)K_2^+ + \frac{2}{3}c^2K_3^+\right];
$$

$$
a_7 = c\left[h_1\left(c + \frac{h_1}{2}\right)K_1^+ + \frac{c^2}{3}K_3^+\right],\quad a_8 = h_1\left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3}\right)K_1^+ + h_2\left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3}\right)K_2^+ + \frac{2}{3}c^3K_3^+;
$$

$$
a_9 = h_1\left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3}\right)K_1^+ + \frac{c^3}{3}K_3^+,\quad a_{10} = h_1\left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3}\right)K_1^+ + \frac{4}{15}c^3K_3^+,
$$

где введены обозначения

$$
K_k^+ = K_k + \frac{4}{3}G_k,\ K_k^- = K_k - \frac{2}{3}G_k.
$$

Дифференциальные операторы L_2 (*оператор Бесселя*), L_3 определены соотношениями

$$
\mathrm{L}_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg),_r\right),_r \equiv g,_{rr} + \frac{g,_r}{r} - \frac{g}{r^2},\quad \mathrm{L}_3(g) \equiv \frac{1}{r}\left(rL_2(g)\right),_r \equiv g,_{rrr} + \frac{2g,_{rr}}{r} - \frac{g,_r}{r^2} + \frac{g}{r^3}.
$$

Следует отметить, что если в полученной системе (1) положить функцию сжимаемости $v(r) \equiv 0$, то первые три уравнения совпадут с известной системой уравнений равновесия для круговой пластины с жестким несжимаемым заполнителем.

Краевая задача замыкается добавлением к (1) кинематических граничных условий. При жесткой заделке контура пластины должны выполняться условия

$$
u = \psi = w = v = w,_r = 0 \ \text{при}\ r = r_0.
$$

При шарнирном опирании контура пластины

$$
u = \psi = w = v = M_r = 0 \ \text{при}\ r = r_0.
$$

Точное решение системы дифференциальных уравнений равновесия несимметричной по толщине трехслойной пластины со сжимаемым жестким заполнителем получить не удалось, поэтому рассмотрим один из методов последовательных приближений, основанный на методе малого параметра. Для этого перепишем систему в следующем итерационном виде:

$$
\begin{gathered}
\mathrm{L}_2(a_1u^{(n)} + a_2\psi^{(n)} - a_3w^{(n)},_r) = a_4\mathrm{L}_2(v^{(n-1)},_r) - K_3^- v^{(n-1)},_r;\\
\mathrm{L}_2(a_2u^{(n)} + a_5\psi^{(n)} - a_6w^{(n)},_r) - 2cG_3\psi^{(n)} = a_7\,\mathrm{L}_2(v^{(n-1)},_r);\\
\mathrm{L}_3(a_3u^{(n)} + a_6\psi^{(n)} - a_8w^{(n)},_r) = -q + a_9\,\mathrm{L}_3(v^{(n-1)},_r);\\
-a_{10}\,\mathrm{L}_3(v^{(n)},_r) + \frac{c}{6}\left(2K_3 - \frac{1}{3}G_3\right)\left(v^{(n)},_{rr} + \frac{v^{(n)},_r}{r}\right) - \frac{1}{2c}K_3^+ v^{(n)} =\\
= -q - \mathrm{L}_3(a_4u^{(n)} + a_7\psi^{(n)} - a_9w^{(n)},_r) + K_3^-\left(u^{(n)},_r + \frac{u^{(n)}}{r}\right).
\end{gathered} \tag{2}
$$

Четвертое уравнение в (2) разделим на коэффициент $-a_{10}$ и в правых частях уравнений этой системы введем обозначения

$$p^{(n-1)} = a_4 \mathrm{L}_2(v^{(n-1)},_r) - K_3^- v,_r; \; h^{(n-1)} = a_7 \mathrm{L}_2(v^{(n-1)},_r); \; q^{(n-1)} = a_9 \mathrm{L}_3(v^{(n-1)},_r);$$

$$g^{(n)} = \frac{1}{a_{10}}\left[q + \mathrm{L}_3(a_4 u^{(n)} + a_7 \psi^{(n)} - a_9 w^{(n)},_r) - K_3^-\left(u^{(n)},_r + \frac{u^{(n)}}{r}\right)\right]. \qquad (3)$$

Итерационная система (2) с учетом обозначений (3) принимает вид

$$\mathrm{L}_2(a_1 u^{(n)} + a_2 \psi^{(n)} - a_3 w^{(n)},_r) = p^{(n-1)},$$

$$\mathrm{L}_2(a_2 u^{(n)} + a_5 \psi^{(n)} - a_6 w^{(n)},_r) - 2cG_3 \psi^{(n)} = h^{(n-1)},$$

$$\mathrm{L}_3(a_3 u^{(n)} + a_6 \psi^{(n)} - a_8 w^{(n)},_r) = -q + q^{(n-1)},$$

$$\mathrm{L}_3(v^{(n)},_r) - \frac{c}{6a_{10}}\left(2K_3 - \frac{1}{3}G_3\right)\left(v^{(n)},_{rr} + \frac{v^{(n)},_r}{r}\right) + \frac{1}{2ca_{10}} K_3^+ v^{(n)} = g^{(n)}.$$

Дальнейшее решение предполагается получать методом последовательных приближений.

УДК 539.3

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ ТЕРМОУПРУГОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

А. С. ЗЕЛЕНАЯ
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Трехслойные конструкции имеют достаточно широкое распространение в различных отраслях промышленности, строительства, поэтому существует необходимость разработки математических моделей и уточнения методов их расчета.

В монографии [1] рассмотрены постановки и методы решения краевых задач трехслойных стержней в терморадиационных полях. В статье [2] рассмотрен цилиндрический изгиб трехслойных пластин в температурном поле. Ранее в работе [3] уже было получено решение задачи об изгибе упругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем.

Здесь выполнена постановка задачи о статическом деформировании термоупругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем. Рассматривается несимметричная по толщине упругая трехслойная прямоугольная пластина. Трехслойная конструкция представляет собой систему, состоящую из двух несущих слоев и сжимаемого заполнителя. Несущие слои сравнительно тонкие, поэтому они выполняются из материалов высокой прочности и жесткости. Они предназначены для восприятия основной части механической нагрузки. Заполнитель служит для образования монолитной конструкции, обеспечивает перераспределение усилий между несущими слоями, гарантируя тем самым совместную работу слоев пластины.

Для изотропных несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа. В жестком заполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты z. На границах контакта перемещения непрерывны. Материалы несущих слоев несжимаемы в поперечном и продольном направлениях, в заполнителе учитывается обжатие. Деформации малые. Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью заполнителя. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев.

Предположим, что в начальный момент времени на трехслойную пластину со сжимаемым заполнителем, находящуюся в естественном состоянии, начинают действовать внешняя распределенная нагрузка q и тепловой поток с интенсивностью q_t.

Используем соотношения закона Гука в девиаторно-шаровой форме, которые в температурном поле принимают вид