

Таблица 1 – Значения вязкоупругих компонентов, входящих в формулы для описания явлений ползучести и релаксации построенных на основе экспериментальных данных

t	$K(t)$	$\int_0^t K(t)dt$	$\Gamma(t)$	$\int_0^t \Gamma(t)dt$	$1 + \int_0^t K(t)dt$	$1 - \int_0^t \Gamma(t)dt$
0,001	20,867	0,2272	3,911	0,1855	1,2272	0,8145
0,01	2,7021	0,2819	1,6526	0,2204	1,2819	0,7796
0,1	0,3559	0,3535	0,1955	0,2619	1,3535	0,7381
1,0	0,0463	0,4478	0,0222	0,3103	1,4478	0,6897
5,0	$0,96 \cdot 10^{-2}$	0,5255	$0,41 \cdot 10^{-2}$	0,3456	1,5255	0,6544
10,0	$0,42 \cdot 10^{-2}$	0,5570	$0,17 \cdot 10^{-2}$	0,3587	1,5570	0,6413
18,0	$0,17 \cdot 10^{-2}$	0,5786	$0,65 \cdot 10^{-3}$	0,3672	1,5786	0,6328
30,0	$0,61 \cdot 10^{-3}$	0,5912	$0,22 \cdot 10^{-3}$	0,3719	1,5912	0,6281
70,0	$0,41 \cdot 10^{-4}$	0,5993	$0,14 \cdot 10^{-4}$	0,3748	1,5993	0,6252
100,0	$0,69 \cdot 10^{-5}$	0,5959	$0,22 \cdot 10^{-5}$	0,3750	1,5999	0,6250
200,0	$0,27 \cdot 10^{-7}$	0,6000	$0,79 \cdot 10^{-8}$	0,3750	1,6000	0,6250
300,0	$0,13 \cdot 10^{-9}$	0,6000	$0,36 \cdot 10^{-10}$	0,3750	1,6000	0,6250

На основе свойств резольвентных операторов для ядер интегральных уравнений предложен метод построения решения задач вязкоупругости путем прямого использования экспериментальных данных, заданных таблично. Приведена таблица значений ядер и резольвент, а также интегралов о них, необходимых для построения численных значений решений краевых задач теории вязкоупругости. Также был разработан алгоритм и создана программа в среде Delphi, используя метод минимизации функции без ограничений прямым поиском по Хуку и Дживсу для экспоненциальной функции (рисунок 1). Значения, полученные в программе, сравнивались со значениями таблицы 1. Тестирование программы осуществлялось в сравнении с результатами других исследователей. Предлагаемые подходы могут быть использованы в строительстве, а также машиностроении и других отраслях промышленности.

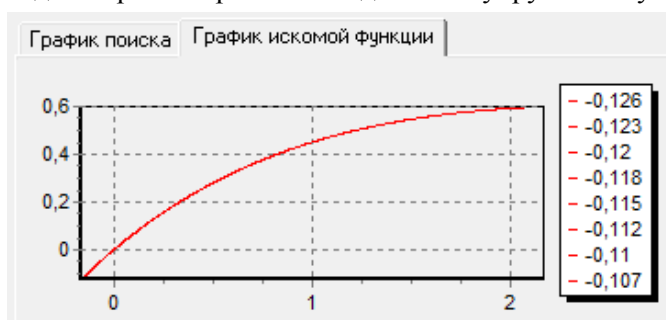


Рисунок 1 – График экспоненциальной функции

Значения, полученные в программе, сравнивались со значениями таблицы 1. Тестирование программы осуществлялось в сравнении с результатами других исследователей. Предлагаемые подходы могут быть использованы в строительстве, а также машиностроении и других отраслях промышленности.

Список литературы

- 1 **Можаровский, В. В.** Прикладная механика слоистых тел из композитов / В. В. Можаровский, В. Е. Старжинский. – Минск, 1988. – 271 с.
- 2 **Кристенсен, Р.** Введение в теорию вязкоупругости / Р. Кристенсен – М. : Мир, 1974. – 338 с.

УДК 539.3

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ С УЧЁТОМ ПЕРЕКРЁСТНОЙ ДИФФУЗИИ ДЛЯ ДВУХКОМПОНЕНТНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

С. А. ДАВЫДОВ, А. В. ЗЕМСКОВ, А. Д. ФЕДОРОВА
 Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация

Существует ряд подходов к созданию математических моделей механики сплошных сред. Одним из перспективных направлений, дающих возможность наиболее точно описать поведение среды, является моделирование связанных полей различной природы. Примером такой связанности является модель термоупругости с учётом поперечной диффузии. Она позволяет описать взаимное влияние поля перемещений и поля температур, учитывая при этом изменение поля концентраций вещества в упругом теле. Большинство имеющихся моделей термоупругости с учётом диффу-

зии представлены в стационарной или квазистационарной постановке и не учитывают перекрестных диффузионных эффектов. Для решения же нестационарных задач используются в основном численные алгоритмы. Однако для моделирования и анализа реальных связанных процессов крайне желателен численно-аналитический подход, использующий простые апробированные и известные численные методы.

В данной работе рассматривается связанная одномерная нестационарная задача термоупругости с учётом перекрёстного массопереноса для изотропного двухкомпонентного полупространства. Математическая постановка задачи в прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ вдоль оси x_1 представляет собой связанную систему уравнений в частных производных, состоящую из уравнений движения, теплопереноса и двух уравнений перекрёстного массопереноса (штрихи обозначают производные по безразмерной пространственной переменной x , а точки – производные по безразмерному времени τ):

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= u'' - b_u \mathcal{G}' - \alpha_1 \eta_1' - \alpha_2 \eta_2'; \\ \dot{\mathcal{G}} + \tau_T \ddot{\mathcal{G}} &= k \mathcal{G}'' - b_T (\dot{u}' + \tau_T \ddot{u}') - \beta_1 (\dot{\eta}_1 + \tau_T \ddot{\eta}_1) - \beta_2 (\dot{\eta}_2 + \tau_T \ddot{\eta}_2); \\ \dot{\eta}_1 + \tau_{\eta_1} \ddot{\eta}_1 &= D_{11} \eta_1'' + D_{12} \eta_2'' - \Lambda_1 u''' - M_1 \mathcal{G}''; \\ \dot{\eta}_2 + \tau_{\eta_2} \ddot{\eta}_2 &= D_{22} \eta_2'' + D_{21} \eta_1'' - \Lambda_2 u''' - M_2 \mathcal{G}'' \end{aligned} \quad (1)$$

На границе полупространства задаётся перемещение, тепловой и диффузионные потоки:

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= f_1(\tau), \quad \mathcal{G}'|_{x=0} = f_2(\tau), \quad (\Lambda_1 u'' - D_{11} \eta_1' - D_{12} \eta_2' + M_1 \mathcal{G}')|_{x=0} = f_3(\tau); \\ (\Lambda_2 u'' - D_{21} \eta_1' - D_{22} \eta_2' + M_2 \mathcal{G}')|_{x=0} &= f_4(\tau). \end{aligned} \quad (2)$$

На бесконечности же принимаются условия ограниченности:

$$\begin{aligned} u &= O(1), \quad \mathcal{G}' = O(1), \quad (\Lambda_1 u'' - D_{11} \eta_1' - D_{12} \eta_2' + M_1 \mathcal{G}') = O(1); \\ (\Lambda_2 u'' - D_{21} \eta_1' - D_{22} \eta_2' + M_2 \mathcal{G}') &= O(1), \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3)$$

Начальные условия приняты нулевыми:

$$u|_{\tau=0} = \dot{u}|_{\tau=0} = \mathcal{G}|_{\tau=0} = \dot{\mathcal{G}}|_{\tau=0} = \eta_1|_{\tau=0} = \dot{\eta}_1|_{\tau=0} = \eta_2|_{\tau=0} = \dot{\eta}_2|_{\tau=0} \equiv 0. \quad (4)$$

В (1)–(4) и далее используются безразмерные величины (при одинаковом начертании размерные величины обозначены звёздочкой):

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1}{L}, \quad u = \frac{u_1}{L}, \quad \tau = \frac{Ct}{L}, \quad C^2 = \frac{C_{1111}}{\rho}, \quad \alpha_q = \frac{\alpha_{11}^{(q)}}{C_{1111}}, \quad D_{ij} = \frac{D_{11}^{(ij)}}{CL}, \quad \tau_T = \frac{Ct_T}{L}, \quad \tau_{\eta_q} = \frac{Ct_{\eta}^{(q)}}{L}, \\ \Lambda_q &= \frac{m^{(q)} n_0^{(q)} D_{11}^{(qq)} \alpha_{11}^{(q)}}{\rho R T_0 C L}, \quad M_q = \frac{n_0^{(q)} D_{11}^{(qq)} \ln[n_0^{(q)} \gamma^{(q)}]}{CL}, \quad \kappa = \frac{\kappa_{11}}{\rho c_0 L C}, \quad \beta_q = \frac{n_0^{(q)} R \ln[n_0^{(q)} \gamma^{(q)}]}{m^{(q)} c_0}, \\ \mathcal{G} &= \frac{\mathcal{G}^*}{T_0}, \quad b_u = \frac{b_{11} T_0}{C_{1111}}, \quad b_T = \frac{b_{11}}{\rho c_0}, \quad f_1(\tau) = \frac{f_1^*(t)}{L}, \quad f_2(\tau) = \frac{L f_2^*(t)}{T_0}, \quad f_{q+2}(\tau) = \frac{f_{q+2}^*(t)}{n_0^{(q)} C}, \end{aligned}$$

где t – время; u_1 – компонента вектора перемещений; L – характерный размер; $q = \overline{1, 2}$ – номер компоненты вещества; $\eta^{(q)} = n^{(q)} - n_0^{(q)}$ – приращение концентрации; $n_0^{(q)}$ и $n^{(q)}$ – начальная и актуальная концентрации (массовые доли); t_T – время тепловой релаксации; $t_{\eta}^{(q)}$ – время диффузионной релаксации; C_{1111} – упругая постоянная; ρ – плотность; b_{11} – температурная постоянная, характеризующая тепловые деформации; $\alpha_{11}^{(q)}$ – коэффициенты, характеризующие объёмное изменение среды за счёт диффузии; $D_{11}^{(ij)}$ – коэффициенты диффузии; $m^{(q)}$ – молярная масса; R – универсальная газовая постоянная; $\mathcal{G}^* = T - T_0$ – приращение температуры; T и T_0 – актуальная и начальная температуры; κ_{11} – коэффициент теплопроводности; $\gamma^{(q)}$ – коэффициент активности; c_0 – удельная теплоёмкость при постоянных концентрации и деформации.

Решение задачи (1)–(4) ищется в интегральной форме, которая представляет собой свёртку по времени функций Грина с правыми частями граничных условий (звёздочка обозначает свёртку по времени):

$$u = \sum_{k=1}^4 G_{1k} * f_k, \quad \vartheta = \sum_{k=1}^4 G_{2k} * f_k, \quad \eta_1 = \sum_{k=1}^4 G_{3k} * f_k, \quad \eta_2 = \sum_{k=1}^4 G_{4k} * f_k.$$

Для нахождения функций Грина используется преобразование Лапласа по времени и синус-, косинус-преобразование Фурье по координате, что сводит задачу в изображениях Фурье-Лапласа к системе линейных алгебраических уравнений. При таком подходе трансформанты искомых функций являются рациональными функциями параметра преобразования Лапласа. Обращение преобразования Лапласа производится с помощью известных теорем операционного исчисления. Обращение преобразований Фурье производится численно с помощью известных методов численного интегрирования.

Представленный алгоритм решения позволяет свести к минимуму использование численных методов и может быть обобщён на случай N – компонентной среды.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №17-08-00663 и №18-31-00437).

Список литературы

- 1 **Князева, А. Г.** Введение в термодинамику необратимых процессов. Лекции о моделях / А. Г. Князева. – Томск : Иван Федоров, 2014. – 172 с.
- 2 **Давыдов, С. А.** Двухкомпонентное упруго диффузионное полупространство под действием нестационарных возмущений / С. А. Давыдов, А. В. Земсков, Д. В. Тарлаковский // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2014. – № 2. – С. 31–38.
- 3 **Давыдов, С. А.** Поверхностные функции Грина в нестационарных задачах термомехано диффузии / С. А. Давыдов, А. В. Земсков, Д. В. Тарлаковский // Проблемы прочности и пластичности. – 2017. – Т. 79. – № 1. – С. 38–47.
- 4 **Давыдов, С. А.** Распространение одномерных связанных термоупругодиффузионных возмущений в изотропном полупространстве с учетом ненулевых времен релаксации / С. А. Давыдов, А. В. Земсков // Труды Крыловского государственного научного центра. – 2018. – Спец. вып. 2. – С. 144–150.
- 5 **Davydov, S. A.** An Elastic Half-Space under the Action of One-Dimensional Time-Dependent Diffusion Perturbations / S. A. Davydov, A. V. Zemskov, D. V. Tarlakovskii // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2015. – Vol. 36. – No. 4. – P. 503–509.
- 6 **Sherief, H. H.** The theory of generalized thermoelastic diffusion / H. H. Sherief, F. A. Hamza, H. A. Saleh // International Journal of Engineering Science. – 2004. – Vol. 42. – P. 591–608.

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ МНОГОСВЯЗНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ЦЕЛЮ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЧНОСТИ НЕСУЩИХ КОНСТРУКЦИЙ АВИАКОСМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

О. В. ЕГОРОВА

Московский авиационный институт (НИИ), Российская Федерация

Рассматривается краевая задача для описания нелинейными дифференциальными уравнениями десятого порядка (модель Тимошенко) при различных вариантах граничных и начальных условий. Рассматриваемые элементы конструкции выполняются как из традиционных конструкционных материалов, так и из современных и перспективных материалов: волокнистые композиты и пластики, многослойные композиционные материалы и т.д. Для решения поставленных задач используется вариационно-разностная формулировка в виде метода конечных разностей, которая позволяет строить модифицированные разностные схемы для случаев многосвязных областей со сложной формой границ. В качестве модельных задач рассматриваются математические модели в виде пластин и оболочек различной формы, составных и подкрепленных аэрокосмических конструкций каркасного и панельного типа на основе моделей типа Тимошенко в интегро-дифференциальной форме.

По результатам исследования ожидаются следующие научные результаты:

- отладка и тестирование прикладных программ для ЭВМ основанных на фундаментальных методах математического моделирования процессов нелинейного деформирования типовых несущих конструкций авиакосмических систем и структур;

- проведение исследования влияния различных физико-механических параметров на особенности деформирования таких типовых элементов авиакосмических систем, как многослойные арки и