

ного напряжения (теория тонких пластин). Был введен коэффициент жесткости, так как деформации в покрытии приводят к деформациям в подложке. Было доказано, что модуль Юнга и внутреннее остаточное напряжение покрытий зависит от толщины покрытия, степени реакции и материала подложки. Во время цикла термической полимеризации наблюдалась потеря отверждающего агента и, таким образом, изменение степени реакции покрытия. Результаты показали, что модуль Юнга и напряжение тонких покрытий сильно отличаются от объемных значений.

УДК 539.4:621.6

ИССЛЕДОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЯЗКОУПРУГОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Е. А. ГОЛУБЕВА, М. Ю. БОКИЙ, Р. А. АЛЬ-АБСИ

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Республика Беларусь

Широкое применение композиционных материалов в строительстве и других отраслях машиностроения привело к необходимости изучения задач оптимального проектирования конструкций из композиционных материалов, обладающих вязкоупругими свойствами. В связи с этим наследственная теория вязкоупругости привлекает к себе всё большее внимание исследователей.

Интегральные преобразования, такие как преобразования Лапласа и другие, помогают значительно упростить решение различных дифференциальных и интегральных уравнений, которые возникают в прикладных задачах разных областей математики и механики. В данной работе применение преобразования Лапласа и методов его обращения рассматриваются на примере решения задачи вязкоупругости – нахождения напряжения и деформации вязкоупругих материалов. Важнейшими характеристиками вязкоупругих тел являются ползучесть и релаксация. Так, под ползучестью понимается свойство материалов деформироваться во времени в зависимости от постоянного напряжения. Релаксация – перераспределение напряжения в теле в зависимости от деформации. Связь ползучести и релаксации принято описывать соотношением Больцмана – Вольтерра, которое является обобщением закона Гука.

Наиболее часто для предварительных расчетов используется экспоненциальное ядро релаксации

$$R(t) = \frac{\lambda}{\tau} \exp(-t / \tau)$$

и ползучести

$$K(t) = \frac{\lambda}{\tau} \exp\left(-\frac{1-\lambda}{\tau} t\right).$$

Описание процессов деформирования, релаксации и ползучести получены в источнике [1]:

$$\tilde{R}(\tau) = \int_0^{\tau} R(s) ds = \frac{A^*}{\beta^*} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\beta^*}{\lambda^{\alpha}}\right)^n \frac{\gamma(\alpha n, \lambda \tau)}{\tilde{A}(\alpha n)};$$

$$\tilde{K}(\tau) = \int_0^{\tau} K(s) ds = \frac{A^*}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\beta}{\lambda^{\alpha}}\right)^n \frac{\gamma(\alpha n, \lambda \tau)}{\Gamma(\alpha n)}.$$

В данной работе использовали обобщенные ядра вида [1]

$$R(\tau) = A^* \tau^{\alpha-1} e^{-\lambda \tau} E_{\frac{1}{\alpha}}(\beta^* \tau^{\alpha}; \alpha);$$

$$K(\tau) = A^* \tau^{\alpha-1} e^{-\lambda \tau} E_{\frac{1}{\alpha}}(\beta \tau^{\alpha}; \alpha),$$

в которые входит функция типа Миттаг-Леффлера $E_{\rho}(x, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\mu + k\rho^{-1})}$, где $\Gamma(x)$ – гамма-функция; μ – произвольный параметр A^* , β , λ , α – реологические параметры.

Значения этих ядер определяются из эксперимента и задаются таблицей чисел, которые соответствуют фиксированным значениям времени. При проведении эксперимента определяются данные для построения кривых ползучести или релаксации. Таблица экспериментальных данных может содержать погрешности измерений [2] (таблица 1).

Таблица 1 – Значения вязкоупругих компонентов, входящих в формулы для описания явлений ползучести и релаксации построенных на основе экспериментальных данных

t	$K(t)$	$\int_0^t K(t)dt$	$\Gamma(t)$	$\int_0^t \Gamma(t)dt$	$1 + \int_0^t K(t)dt$	$1 - \int_0^t \Gamma(t)dt$
0,001	20,867	0,2272	3,911	0,1855	1,2272	0,8145
0,01	2,7021	0,2819	1,6526	0,2204	1,2819	0,7796
0,1	0,3559	0,3535	0,1955	0,2619	1,3535	0,7381
1,0	0,0463	0,4478	0,0222	0,3103	1,4478	0,6897
5,0	$0,96 \cdot 10^{-2}$	0,5255	$0,41 \cdot 10^{-2}$	0,3456	1,5255	0,6544
10,0	$0,42 \cdot 10^{-2}$	0,5570	$0,17 \cdot 10^{-2}$	0,3587	1,5570	0,6413
18,0	$0,17 \cdot 10^{-2}$	0,5786	$0,65 \cdot 10^{-3}$	0,3672	1,5786	0,6328
30,0	$0,61 \cdot 10^{-3}$	0,5912	$0,22 \cdot 10^{-3}$	0,3719	1,5912	0,6281
70,0	$0,41 \cdot 10^{-4}$	0,5993	$0,14 \cdot 10^{-4}$	0,3748	1,5993	0,6252
100,0	$0,69 \cdot 10^{-5}$	0,5959	$0,22 \cdot 10^{-5}$	0,3750	1,5999	0,6250
200,0	$0,27 \cdot 10^{-7}$	0,6000	$0,79 \cdot 10^{-8}$	0,3750	1,6000	0,6250
300,0	$0,13 \cdot 10^{-9}$	0,6000	$0,36 \cdot 10^{-10}$	0,3750	1,6000	0,6250

На основе свойств резольвентных операторов для ядер интегральных уравнений предложен метод построения решения задач вязкоупругости путем прямого использования экспериментальных данных, заданных таблично. Приведена таблица значений ядер и резольвент, а также интегралов о них, необходимых для построения численных значений решений краевых задач теории вязкоупругости. Также был разработан алгоритм и создана программа в среде Delphi, используя метод минимизации функции без ограничений прямым поиском по Хуку и Дживсу для экспоненциальной функции (рисунок 1). Значения, полученные в программе, сравнивались со значениями таблицы 1. Тестирование программы осуществлялось в сравнении с результатами других исследователей. Предлагаемые подходы могут быть использованы в строительстве, а также машиностроении и других отраслях промышленности.



Рисунок 1 – График экспоненциальной функции

Значения, полученные в программе, сравнивались со значениями таблицы 1. Тестирование программы осуществлялось в сравнении с результатами других исследователей. Предлагаемые подходы могут быть использованы в строительстве, а также машиностроении и других отраслях промышленности.

Список литературы

- 1 **Можаровский, В. В.** Прикладная механика слоистых тел из композитов / В. В. Можаровский, В. Е. Старжинский. – Минск, 1988. – 271 с.
- 2 **Кристенсен, Р.** Введение в теорию вязкоупругости / Р. Кристенсен – М. : Мир, 1974. – 338 с.

УДК 539.3

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ С УЧЁТОМ ПЕРЕКРЁСТНОЙ ДИФфуЗИИ ДЛЯ ДВУХКОМПОНЕНТНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

С. А. ДАВЫДОВ, А. В. ЗЕМСКОВ, А. Д. ФЕДОРОВА
 Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация

Существует ряд подходов к созданию математических моделей механики сплошных сред. Одним из перспективных направлений, дающих возможность наиболее точно описать поведение среды, является моделирование связанных полей различной природы. Примером такой связанности является модель термоупругости с учётом поперечной диффузии. Она позволяет описать взаимное влияние поля перемещений и поля температур, учитывая при этом изменение поля концентраций вещества в упругом теле. Большинство имеющихся моделей термоупругости с учётом диффу-