Граничные условия (область G ограничена; n_i – компоненты единичного вектора внешней нормали к ∂G, $\partial G = \Pi_u \bigcup \Pi_\sigma$, $\partial G = \Pi_\eta \bigcup \Pi_J$):

$$u_i\big|_{\Pi_u} = U_i, \quad \sigma_{ij} n_j\big|_{\Pi_\sigma} = P_i, \quad \eta^{(q)}\big|_{\Pi_\eta} = N^{(q)}, \quad J_i^{(q)}\big|_{\Pi_J} = I_i^{(q)} \left(\tau > 0,\, q = \overline{1, N}\right). \tag{5}$$

Величины, стоящие в правых частях граничных условий, – поверхностные кинематические U_i, $N^{(q)}$ и динамические P_i, $I_i^{(q)}$ возмущения.

Для построения уравнений изгиба балки переходим к вариационной формулировке задачи (1)–(5). Согласно вариационному принципу Гамильтона соотношения (1)–(5) можно рассматривать как условие стационарности некоторого функционала $H\left(u_i, \eta^{(q)}\right)$, вариация которого имеет вид

$$\delta H = \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta L - \delta E\right) d\tau, \tag{6}$$

где $L\left(u_i, \eta^{(q)}\right)$ – функционал Лагранжа, $E\left(\dot{u}_i, \dot{\eta}^{(q)}\right)$ – кинетическая энергия системы.

Применительно к задаче (1)–(5) вариация (6) записывается так:

$$\delta H = \int_{t_1}^{t_2} d\tau \int_G \left(\ddot{u}_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - F_i \right) \delta u_i dG + \sum_{q=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} d\tau \int_G \left(\dot{\eta}^{(q)} + \frac{\partial J_i^{(q)}}{\partial x_i} - Y^{(q)} \right) \delta \eta^{(q)} dG +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \iint_{\Pi_\sigma} \left(\sigma_{ij} n_j - P_i \right) \delta u_i dS d\tau + \sum_{q=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} \iint_{\Pi_J} \left(J_i^{(q)} - I_i^{(q)} \right) n_i \delta \eta^{(q)} dS d\tau.$$

Далее, для построения уравнений изгиба принимаются, что:

– поперечные прогибы балки малы;

– сечения, перпендикулярные к оси балки до деформации, остаются плоскими и после деформации (гипотеза плоских сечений).

Используя необходимое условие стационарности функционала Гамильтона, получаем модель нестационарного плоского изгиба упругодиффузионной балки Тимошенко. Для решения полученной задачи применяется интегральное преобразование Лапласа по времени и разложение в ряды Фурье.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 17-08-00663 А).

Список литературы

1 **Князева, А. Г.** Задачи теории термоупругой диффузии в процессах поверхностной обработки материалов / А. Г. Князева, Е. С. Ильина, В. Н. Демидов // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 20–24 августа 2015 г. – С. 1818–1820.

2 **Земсков, А. В.** Постановка задачи о нестационарных упругодиффузионных колебаниях балки Эйлера-Бернулли / А. В. Земсков, Д. В. Тарлаковский // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXIV Междунар. симпозиума, посвящ. А. Г. Горшкову. – Т. 2. – М. : ООО «ТРП», 2018. – С. 152–157.

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЯ ВЛИЯНИЯ ПОЛИМЕРНЫХ ЭПОКСИДНО-ПОЛИЭФИРНЫХ ПОКРЫТИЙ НА МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТОНКИХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПЛАСТИН

А. Г. ГЕТМАНОВ

Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация

В работе исследовались объемные значения механических свойства органических покрытий на основе эпоксидной смолы (DGEBA DER 332) и двух диаминов сомономеров (IPD и 3DCM). Покрытия наносились на подложки из алюминиевых и титановых сплавов. Для изучения влияния толщины покрытия на степень реакции подложки из обоих сплавов и сравнения с объемными значениями использовался метод дифференциальной сканирующей калометрии и около инфракрасной спектроскопии. Остаточное напряжение и модуль Юнга покрытий были рассчитаны с использованием одномерного анализа, основанного на теории пучка с введением биаксиального модуля для изотропного напряжения (теория тонких пластин). Был введен коэффициент жесткости, так как деформации в покрытии приводят к деформациям в подложке. Было доказано, что модуль Юнга и внутреннее остаточное напряжение покрытий зависит от толщины покрытия, степени реакции и материала подложки. Во время цикла термической полимеризации наблюдалась потеря отверждающего агента и, таким образом, изменение степени реакции покрытия. Результаты показали, что модуль Юнга и напряжение тонких покрытий сильно отличаются от объемных значений.

УДК 539.4:621.6

ИССЛЕДОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЯЗКОУПРУГОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Е. А. ГОЛУБЕВА, М. Ю. БОКИЙ, Р. А. АЛЬ-АБСИ
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Республика Беларусь

Широкое применение композиционных материалов в строительстве и других отраслях машиностроения привело к необходимости изучения задач оптимального проектирования конструкций из композиционных материалов, обладающих вязкоупругими свойствами. В связи с этим наследственная теория вязкоупругости привлекает к себе всё большее внимание исследователей.

Интегральные преобразования, такие как преобразования Лапласа и другие, помогают значительно упростить решение различных дифференциальных и интегральных уравнений, которые возникают в прикладных задачах разных областей математики и механики. В данной работе применение преобразования Лапласа и методов его обращения рассматриваются на примере решения задачи вязкоупругости – нахождения напряжения и деформации вязкоупругих материалов. Важнейшими характеристиками вязкоупругих тел являются ползучесть и релаксация. Так, под ползучестью понимается свойство материалов деформироваться во времени в зависимости от постоянного напряжения. Релаксация – перераспределение напряжения в теле в зависимости от деформации. Связь ползучести и релаксации принято описывать соотношением Больцмана – Вольтерра, которое является обобщением закона Гука.

Наиболее часто для предварительных расчетов используется экспоненциальное ядро релаксации

$$R(t)=\frac{\lambda}{\tau}\exp(-t/\tau)$$

и ползучести

$$K(t)=\frac{\lambda}{\tau}\exp\left(-\frac{1-\lambda}{\tau}\right).$$

Описание процессов деформирования, релаксации и ползучести получены в источнике [1]:

$$\tilde{R}(\tau)=\int_0^{\tau}R(s)ds=\frac{A^*}{\beta^*}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\beta^*}{\lambda^{\alpha}}\right)^n\frac{\gamma(\alpha n,\lambda\tau)}{\tilde{A}(\alpha n)};$$

$$\tilde{K}(\tau)=\int_0^{\tau}K(s)ds=\frac{A^*}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\beta}{\lambda^{\alpha}}\right)^n\frac{\gamma(\alpha n,\lambda\tau)}{\Gamma(\alpha n)}.$$

В данной работе использовали обобщенные ядра вида [1]

$$R(\tau)=A^*\tau^{\alpha-1}e^{-\lambda\tau}E_{\frac{1}{\alpha}}(\beta^*\tau^{\alpha};\alpha);$$

$$K(\tau)=A^*\tau^{\alpha-1}e^{-\lambda\tau}E_{\frac{1}{\alpha}}(\beta\tau^{\alpha};\alpha),$$

в которые входит функция типа Миттаг-Леффлера $E_{\rho}(x,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\mu+k\rho^{-1})}$, где $\Gamma(x)$ – гамма-функция; μ – произвольный параметр A^*, β, λ, α – реологические параметры.

Значения этих ядер определяются из эксперимента и задаются таблицей чисел, которые соответствуют фиксированным значениям времени. При проведении эксперимента определяются данные для построения кривых ползучести или релаксации. Таблица экспериментальных данных может содержать погрешности измерений [2] (таблица 1).