корней характеристического уравнения комплексные потенциалы совпадают по форме с (1), а для неравных корней – с [2]. Безусловно, входящие в эти формулы коэффициенты определяются через известные величины различными соотношениями. Если сравнить представления напряжений и перемещений через комплексные потенциалы для динамических задач (1) в случае неравных корней и с [2] в случае равных корней с соответствующими [3, 4] представлениями для статических задач, то из этого сравнения следует, что напряжения $\tilde{Q}_{22}$, $\tilde{Q}_{21}$, $\tilde{Q}_{11}$ и перемещения u_1 и u_2 выражаются через комплексные потенциалы одинаковыми формулами, отличаются лишь выражения для определения напряжения $\tilde{Q}_{12}$ (безусловно, входящие в эти формулы коэффициенты определяются через известные величины различными соотношениями).

Для динамических задач комплексные потенциалы использованы в контактных задачах для полуплоскости с начальными напряжениями с учетом трения и без него, а также в задачах определения реакции на движущуюся нагрузку двухслойного упругого предварительно напряженного полупространства.

И в заключение отметим, что введенные комплексные потенциалы для динамических задач содержат в себе ряд ранее известных результатов, которые являются следствием предельных переходов. Так, полагая в выражениях комплексных потенциалов в случае равных корней для динамических задач начальные напряжения равными нулю, получаем комплексные потенциалы в форме Л. А. Галина. Если дополнительно положить равной нулю скорость движения штампа, то приходим к известным комплексным потенциалам Колосова-Мусхелишвили для статических задач классической теории упругости для изотропных несжимаемых тел. Если в динамических комплексных потенциалах для неравных корней определяющего уравнения положить скорость движения штампа и начальные напряжения равными нулю, то приходим к известным представлениям С. Г. Лехницкого для статических задач классической теории упругости ортотропных несжимаемых тел.

Список литературы

1 **Гузь, А. Н.** Статика и динамика упругих оснований с начальными (остаточными) напряжениями / А. Н. Гузь, С. Ю. Бабич, Ю. П. Глухов. – Кременчуг : Press-line, 2007. – 795 с.

2 **Гузь, О.** М. Контактна взаємодія пружних тіл з початковими напруженнями / О. М. Гузь, С. Ю. Бабич, В. Б. Рудницький. – Кипв : Вища школа, 1995. – 304 с.

3 **Гузь, А. Н.** Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряженими / А. Н. Гузь, С. Ю. Бабич, Ю. П. Глухов. – Германия, 2015. – Saarbrьcken : LAP LAMBERT Academic Publishing. – 468 с.

4 **Guz, A. N.** Contact problems for elastic bodies with initial stresses Focus on Ukrainian research / A. N. Guz, S.Yu. Babich, V. B. Rudnitsky // Applied Mechanics Reviews. – Vol. 51. – No. 5. – 1998. – P. 343–371.

УДК 539.3

О КРИТЕРИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ КВАЗИЛЭМБОВСКИХ МОД В СИСТЕМЕ «УПРУГИЙ СЛОЙ – ПОЛУПРОСТРАНСТВО ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ»

А. М. БАГНО, Г. И. ЩУРУК
Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев

Задача о распространении волн Лэмба в упругом слое, взаимодействующем с жидким полупространством, принадлежит к классическим задачам механики. Вместе с тем, являясь задачей, зависящей от многих параметров, она остается изученной недостаточно полно. Обзор работ и анализ результатов, полученных в рамках классической теории упругости и модели идеальной сжимаемой жидкости, а также с привлечением более общих моделей твердых и жидких сред, приведены в статье [1]. Значительное прикладное использование акустических волн в строительстве, сейсмологии, сейсморазведке и других областях ставит задачу изучения их частотного спектра и дисперсионных свойств для различных гидроупругих систем. При этом наиболее важным для практики является исследование волновых процессов в широком диапазоне частот, охватывающем как длинноволновую, так и коротковолновую части спектра для толщин упругого слоя соизмеримых с длиной волны. В настоящей работе для анализа частотного спектра квазилэмбовских мод в системе упругий слой – жидкое полупространство используются трехмерные линеаризованные уравнения Эйлера для жидкости и линейные уравнения классической теории упругости для твердого тела. При этом предполагается, что жидкость находится в состоянии покоя. В качестве подхода выбраны постановки задач и метод, основанные на применении представлений общих решений уравнений движения идеальной сжимаемой жидкости и упругого тела, полученные в работах [2–4].

В рамках принятых моделей основные соотношения для системы упругое тело – идеальная сжимаемая жидкость будут иметь вид

$$\mu\Delta\mathbf{u}+(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})-\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}=0;\ \sigma_{ij}=\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial u_j}+\frac{\partial u_j}{\partial u_i}\right)+\lambda\delta_{ij}\nabla\cdot\mathbf{u},\ z_k\in V_1; \quad (1)$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}\nabla p=0;\ \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\rho^*}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{v}=0;\ \frac{\partial p}{\partial\rho^*}=a_0^2;\ P_{ij}=-\delta_{ij}p;\ a_0=\mathrm{const},\ z_k\in V_2. \quad (2)$$

Здесь введены следующие обозначения: u_i – компоненты вектора смещений упругого тела $\boldsymbol{u}$; ρ – плотность материала упругого слоя; λ и μ – константы Ляме материала упругого тела; v_i – составляющие вектора возмущений скорости жидкости $\boldsymbol{v}$; ρ^* и p – возмущения плотности и давления в жидкости; ρ_0 и a_0 – плотность и скорость звука в жидкости в состоянии покоя; P_{ij} и σ_{ij} – составляющие напряжений, соответственно в жидкости и упругом теле; V_1 и V_2 – объемы занимаемые, соответственно упругим телом и жидкостью.

Равенства (1) описывают поведение изотропного упругого тела. Малые колебания идеальной сжимаемой жидкости относительно состояния покоя описывают соотношения (2).

Указанная задача сводится к решению системы уравнений (1), (2) при следующих граничных условиях:

$$\sigma_{12}\big|_{z_2=h}=0;\ \sigma_{22}\big|_{z_2=h}=0;\ \sigma_{12}\big|_{z_2=0}=0;\ \sigma_{22}\big|_{z_2=0}=P_{22}\big|_{z_2=0};\ v_2\big|_{z_2=0}=\frac{\partial u_2}{\partial t}\Big|_{z_2=0}. \quad (3)$$

В дальнейшем для решения задачи гидроупругости использовались представления общих решений для упругих тел и идеальной сжимаемой жидкости, предложенные в работах [2–4].

Для анализа распространения возмущений, гармонически изменяющихся во времени, решения системы уравнений определялись в классе бегущих волн. При этом решались две задачи Штурма – Лиувилля на собственные значения для уравнений движения жидкости и упругого тела, а также определялись соответствующие собственные функции. После подстановки решений в граничные условия (3) была получена система линейных однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных. Исходя из условия существования нетривиального решения этой системы, получено дисперсионное уравнение, которое в дальнейшем решалось численно. При этом расчеты проводились для двух гидроупругих систем. Первая состояла из эластичной резины и воды. Ее механические параметры выбирались следующими: упругий слой – $\rho=1200$ кг/м^3, $\lambda=6\cdot10^9$ Па, $\mu=1,2\cdot10^6$ Па; полупространство жидкости – $\rho_0=1000$ кг/м^3, $a_0=1459,5$ м/с, $\bar{a}_0=a_0/c_s=$ $=46,153442$, $c_s^2=\mu/\rho$. Этот гидроупругий волновод характеризуется тем, что материал упругого слоя (резина) является податливым и мягким. Вторая представляла собой волновод из стали и воды. При этом параметры выбирались такими: упругий слой – $\rho=7800$ кг/м^3, $\lambda=9,26\cdot10^{10}$ Па, $\mu=7,75\cdot10^{10}$ Па; жидкость – $\rho_0=1000$ кг/м^3, $a_0=1459,5$ м/с, $\bar{a}_0=a_0/c_s=0,463021$. Этот волновод отличается тем, что материал упругого слоя (сталь) относится к разряду жестких.

Критерий существования квазилэмбовских мод в гидроупругих волноводах. Проведенные отдельно расчеты [5] и анализ результатов, полученных в настоящей работе, показал, что соотношение между скоростями волны звука в жидкости и волны Рэлея в твердом теле может служить критерием, позволяющим устанавливать возможность существования квазилэмбовских мод высокого порядка в упругом слое, взаимодействующем с полупространством идеальной сжимаемой жидкости.

В случае упругого слоя из податливого материала механические параметры компонентов системы таковы, что скорость волны звука в жидкости больше скорости квазиповерхностной волны Рэлея в твердом слое ($\bar{a}_0=46,153442>\bar{c}_R=0,955318$). При таком соотношении, как показано в работе [5], жидкость не препятствует обмену волновой энергии между поверхностями упругого слоя.

Это способствует взаимодействию продольной и сдвиговой волн на поверхностях упругого слоя и возникновению в нем полного набора незатухающих квазилэмбовских мод высокого порядка, дисперсионная картина и частотный спектр которых, несмотря на ряд различий, подобен волновому процессу в упругом слое, невзаимодействующем с жидкостью.

При взаимодействии упругого слоя из жесткого материала с идеальным сжимаемым жидким полупространством скорость волны звука в жидкости меньше скорости квазиповерхностной волны Рэлея в твердом слое ($\bar{a}_0 = 0,463021 < \bar{c}_R = 0,923008$). В работе [5] установлено, что при таком соотношении между механическими параметрами компонентов системы жидкость препятствует обмену волновой энергии между поверхностями упругого слоя. В этом случае в упругом слое не формируются квазилэмбовские моды высокого порядка. В гидроупругом волноводе возникает лишь одна квазиповерхностная волна, которая, распространяясь вдоль границы раздела сред, локализуется в приконтактной области жидкости.

Таким образом, показано, что основным критерием существования нормальных квазилэмбовских волн высокого порядка и распределения низших мод в средах является соотношение между величинами скоростей волны звука в полупространстве идеальной сжимаемой жидкости и квазирэлеевской волны, распространяющейся вдоль свободной поверхности упругого слоя.

Список литературы

1 **Guz, A. N.** Dynamics of elastic bodies, solid particles, and fluid parcels in a compressible viscous fluid (review) / A. N. Guz, A. P. Zhuk, A. M. Bagno // Int. Appl. Mech. – 2016. – Vol. 52 – No. 5. – P. 449–507.

2 **Гузь, А. Н.** Динамика сжимаемой вязкой жидкости / А. Н. Гузь // Киев : А.С.К., 1998. – 350 с.

3 **Гузь, А. Н.** Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в двух частях. Ч. 1. Общие вопросы. Волны в бесконечных телах и поверхностные волны / А. Н. Гузь // Saarbrucken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 501 с.

4 **Гузь, А. Н.** Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями : в 2 ч. Ч. 2. Волны в частичноограниченных телах / А. Н. Гузь // Saarbrucken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 505 с.

5 **Bagno, A. M.** Dispersion properties of Lamb waves in an elastic layer-ideal liquid half-space system / A. M. Bagno // Int. Appl. Mech. – 2017. – Vol. 53. – No. 6. – P. 609–616.

УДК 62.752, 621:534;833; 888.6, 629.4.015;02

ВОЗМОЖНЫЕ ПОДХОДЫ В ОСОБЕННОСТЯХ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ В РЕЖИМАХ СОВМЕСТНОГО ДЕЙСТВИЯ ВНЕШНИХ СИЛ

Р. С. БОЛЬШАКОВ

Иркутский государственный университет путей сообщения, Российская Федерация

Введение. Механические колебательные системы являются наиболее распространёнными схемами технических объектов. В большинстве случаев для анализа их динамического состояния используются типовые параметры оценки, к которым можно отнести скорость, ускорение и смещение относительно положения статического равновесия. Однако для оценки динамического состояния также могут использоваться реакции связей, возникающие между элементами механических колебательных систем [1–3].

Рассмотрение особенностей параметров механических колебательных систем во многом определяется с учётом детализации представлений о действующих силах. Колебания механических систем при действии одиночного силового или кинематического возмущения достаточно хорошо изучены [4]. Менее проработанными остаются вопросы совместного действия двух возмущений, однако в этом направлении имеется некоторый задел [5]. Наличие двух возмущений в системе приводит к изменению параметров её динамического состояния, в том числе изменения динамической жёскости (введение понятия), приведённых масс и т. д. Основным итогом исследований в названных направлениях стало развитие метода определения динамических реакций. Более детализированно представлено в [6].

В предлагаемом докладе рассматривается влияние совместного действия внешних возмущений на изменение динамических реакций связей на системе с двумя степенями свободы.