Непосредственные вычисления позволяют показать, что детерминант передаточной матрицы порождающего пакета слоев

$$Mp = M_2(\Omega_{p,2},\Omega_{s,2},h_2)M_2^{-1}(\Omega_{p,2},\Omega_{s,},0)M_1(\Omega_{p,1},\Omega_{s,1},h_1)M_1^{-1}(\Omega_{p,1},\Omega_{s,1},0)$$

равен единице, и характеристическое уравнение передаточной матрицы запишется в виде $\chi^2 - 2b_2\chi + 1 = 0, \quad b_2 = \mathrm{spur}Mp/2$. Применяя предложенный метод исследования и используя свойство унимодулярности матрицы Mp [1, 2], получим дисперсионное уравнение для волн в пластине из m порождающих пакетов.

$$Mp^{12}(b_2 - \cos(\pi/m)(b_2 - \cos(2\pi/m)(b_2 - \cos(m\pi/m) = 0. \qquad (6)$$

Как следует из вида (6), в каждой зоне пропускания $-1 \le b_2 \le 1$ локализовано m дисперсионных кривых, периодом колебаний которых будет $2m$ слоев. Эти дисперсионные кривые следует характеризовать набором из трех индексов (*n, l, m*), где $l = 0,1,\ldots m-1$, *n* – номер зоны пропускания... Типы колебаний (*n, l, m*) и (*n, im, il*) эквивалентны. Колебания с индексами (*n, l, m*) и (*n, m, m – l*) будут вырожденными. Как показали численные эксперименты, при четном значении *m* формы колебаний обладают симметрией, которая подчиняется правилу $w\left(\frac{h}{2}m - z\right) = -w(hm - z),\ 0 \le z \le \frac{z}{2}mh$, а также $w(sh) = 0$, где $s = 1, 3, \ldots$. При m нечетном отсутствует симметрия, присущая колебаниям при *m* четном. С ростом значения *m* и *n* формы колебаний на периоде *mh* становятся более сложными.

Список литературы

1 **Баас, Ф. Г.** Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешетками / Ф. Г. Баас, А. А. Булгаков, А. П. Тетервов. – М. : Наука, 1989. – 288 с.

2 **Борн, М.** Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – М. : Наука, 1970. – 886 с.

3 **Левченко, В. В.** О распространении магнитоупругих волн сдвига в регулярно-слоистой среде с металлизированными плоскостями раздела / В. В. Левченко // Прикладная механика. – 2004. – Т. 40. – № 1. – С. 125–131.

4 **Шульга, Н. А.** Основы механики слоистых сред периодической структуры / Н. А. Шульга. – Киев : Наукова думка, 1982. – 200 с.

5 **Левченко, В. В.** О формах колебаний на границах зон пропускания объемных плоскополяризованных волн в регулярно-слоистой среде / В. В. Левченко, Н. А.Шульга, А. Н. Подлипенец // Прикладная механика. – 1985. – Т. 21. – № 1. – С. 16–23.

6 **Шульга, Н. А.** Формы колебаний на границах зон пропускания объемных волн сдвига / Н. А. Шульга, В. В. Левченко, А. Н. Подлипенец // Прикладная механика. – 1984. – Т. 20. – № 11. – С. 38–45.

УДК 539.386

ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ ОБЪЕМНЫЕ ВОЛНЫ СДВИГА В СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКАХ

В. В. ЛЕВЧЕНКО

Институт последипломного образования Национального университета пищевых технологий, г. Киев, Украина

В последние годы существенно возрос интерес к исследованию особенностей распространения волн различной физической природы в периодических структурах с усложненными физико-механическими свойствами. В частности, это касается композиционных материалов, образованных чередованием слоев со свойствами сегнетоэлектрика. Наличие спонтанной поляризации является отличительной особенностью сегнетоэлектриков. В настоящее время разработаны методики формирования в них идеальных периодических структур [1, 2]. Анализ особенностей распространения волн различной природы в таких исскуственных периодических структурах вызывает внимание исследователей благодаря возможности эффективного управления их волноведущими свойствами.

Решение задачи о распространении волн в сегнетоэлектриках основано на методах, развитых в теории волн в периодических структурах [3, 4]. При температурах, которые соответствуют условиям эксплуатации изделий, сегнетоэлектрики имеют пьезоэлектрические свойства, и волновые процессы в них описываются системой уравнений электроупругости [1, 2] для тетрагональной системы.

Распространение упругоэлектрических сдвиговых волн в плоскости xy в линейной теории электроупругости описывается [1, 2] уравнением колебаний относительно механических напряжений $\sigma_{xz}(x,y,t)$, $\sigma_{yz}(x,y,t)$, перемещения $w(x,y,t)$ и уравнением Гаусса относительно компонент вектора электрической индукции

$$\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}=0. \tag{1}$$

Для пьезоэлектрических материалов тетрагональной системы класса 4mm (ось симметрии четвертого порядка направлена вдоль оси z) материальные соотношения имеют вид [1,2]

$$\sigma_{yz}=c_{55}\frac{\partial w}{\partial y}+e_{51}\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \sigma_{xz}=c_{55}\frac{\partial w}{\partial x}+e_{51}\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$
$$D_x=-\varepsilon_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+e_{51}\frac{\partial w}{\partial x}, \quad D_y=-\varepsilon_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+e_{51}\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{2}$$

В зависимостях (2) учтены формулы Коши для деформаций и градиентное представление вектора напряженности электрического поля через электрический потенциал $\varphi(x,y,t)$.

Систему уравнений (1), (2) можно свести к двум уравнениям:

$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=c_{55*}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0, \tag{3}$$

где функция $\psi=\varphi-(e_{51}/\varepsilon_{11})w$ и $c_{55*}=c_{55}+e_{51}^2/\varepsilon_{11}$.

Рассмотрим сегнетоэлектрик класса 4mm, образованный периодическим повторением вдоль оси x пакета из двух слоев равной толщины h, и предположим, что толщина доменных границ равна нулю. Слои пакета имеют антипараллельные направления поляризации, что влечет изменение знака электроупругой связи в соседних слоях $e_q=(-1)^q e_{51}$, где q – номер слоя в пакете, $e_{51}>0$. Остальные физико-механические параметры слоев совпадают.

Решение системы уравнений (3) в каждом из слоев будем искать в виде

$$w=B_{2n+q}^{(1)}\sin\Omega\left(x-x_{n,q}^*\right)+B_{2n+q}^{(2)}\cos\Omega\left(x-x_{n,q}^*\right), \quad \psi=D_{2n+q}^{(1)}\,\mathrm{sh}\,k\left(x-x_{n,q}^*\right)+D_{2n+q}^{(2)}\,\mathrm{ch}\,k\left(x-x_{n,q}^*\right),$$
$$x_{n-1,q}^*<x<x_{n,q}^*, \; n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots,\ q=1,\ 2, \tag{4}$$

где $x_{n,q}^*=2nh+qh$; $\Omega=\left(\tilde{k}^2-k^2\right)^{1/2}$; $\tilde{k}^2=\omega^2/\tilde{c}^2$, $\tilde{c}^2=c_{55*}/\rho$, k – волновое число, ω – круговая частота. Применяя метод решения залач о волновых процессах в регулярно слоистых средах, предложений [3, 4], задачу сведем к исследованию характеристического уравнения

$$\chi^4-(b_0^1+b_0^2)\chi^3+(b_0^1 b_0^2+2+K_0)\chi^2-(b_0^1+b_0^2)\chi+1=0, \tag{5}$$

передаточной матрицы M [3, 4] порождающего пакета слоев.

Такой вид уравнения (5) говорит о существовании в периодической структуре двух зонных спектров со своими блоховскими числами, которые определяются из дисперсионных уравнений:

$$\cos\xi_1 h=-b_1/2, \quad \cos\xi_2 h=-b_2/2, \quad \text{где } b_j=-\frac{b_0^1+b_0^2}{2}-(-1)^j\sqrt{d};$$
$$d=\frac{(b_0^1+b_0^2)^2}{4}-(b_0^1 b_0^2+2+K_0)+2; \quad K_0=\frac{16e_{15}^2 k}{\varepsilon_{11}c_{44}^*\Omega}\sin\theta sh(kh)\left(\cos\theta-ch(kh)\right)^2; \; j=1,2.$$

Зоны пропускания для объемных парциальных волн [3] опреляются из неравенств

$$\left|b_j\right|\le 2, \tag{6}$$

Для существования объемных волн должно выполнятся хотя бы одно из неравенств (6).

Величина K_0 опредяет связанность акустических и электромагнитных процессов. При $\sin(\theta)=0$ или нормальном распространении волны, или отсутствии електромеханической связи уравнение (5) распадается на два уравнения:

$$\left(\chi^2-b_{1,0}\chi+1\right)=0,\left(\chi^2-b_{2,0}\chi+1\right)=0,$$

что означает отсутствие взаимодействия механической и электрической подсистем.

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы. Расчеты показали, что зоны запирания волн локализованы в малой окрестности собственных частот слоя сегнетоэлектрика, где $b_1\geq 2$ и $\theta\to\pi n$. Вблизи этих же областей зарождаются зоны комплексности корней уравнения (5), где $d\leq 0$. Структура зон запирания не имеет аналогов в структурах, состоящих из слоев, которые имеют разные физико-механические параметры. Результаты работы показывают зонный характер распространения волн сдвига в сегнетоэлектрических сверхрешетках. Точки экстремумов $\operatorname{Im} b_1$ расположены близко к центру соответствующей зоны комплексности. Зоны запирания объемных волн зарождаются и локализованы в малой окрестности собственных частот волн сдвига в слое сегнетоэлектрика. Ширина зон запирания зависит от электрических параметров ε_{11}, e_{51} и относительно мала по сравнению с шириной зон пропускания. Как показали расчеты для выбранных данных, не существует решения неравенства $b_1\leq -2$. Это означает отсутствие зон запирания в окрестности решения уравнения $\cos\theta=0$.

Список литературы

1 **Голенищев-Кутузов, А. В.** Индуцированные доменные структуры в электромагнитоупорядоченных веществах / А. В. Голенищев-Кутузов, Р. И. Каллиимуллин. – М. : Физматгиз, 2003. – 136 с.

2 **Смоленский, Т. А.** Сегнетоэлектрики и антисегнетоэлектрики / Т. А. Смоленский, В. А. Боков, Н. Н. Крайник. – М. : Наука, 1971. – 259 с.

3 **Шульга, Н. А.** Основы механики слоистых сред периодической структуры / Н. А. Шульга. – Киев : Наукова, думка, 1981. – 200 с.

4 **Shul'ga, N. A.** Propagation of Coupled Waves Interacting with an Electromagnetic Field in Periodically Inhomogeneous Media / N. A. Shul'ga // Int. Appl. Mech. – 2003. – Vol. 39. – No. 10. – P. 1146–1172.

УДК 539.4.019

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ КРУГОВЫХ ПЛАСТИН В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

Д. В. ЛЕОНЕНКО

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Широкое применение в интенсивно развивающихся отраслях строительства и промышленности находят слоистые элементы конструкций. В связи с этим возникает необходимость разработки новых и уточнения уже существующих методов их расчета.

Здесь рассматриваются малые осесимметричные поперечные колебания несимметричной по толщине упругой трехслойной пластинки круговой формы на упругом инерционном основании при действии температуры.

Постановка задачи и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат r, φ, z. Заполнитель считаем легким, т. е. пренебрегаем его работой в тангенциальном направлении. К наружной поверхности первого несущего слоя подводится тепловой поток интенсивности q_t. К нижней поверхности второго несущего слоя приложена реакция инерционного основания Винклера q_r. На контуре пластинки предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. В дальнейшем перемещения $w(r, t)$, $\psi(r, t)$, $u(r, t)$ считаем искомыми. Температуру в слоях пластины в дальнейшем считаем известной и постоянной во времени.

Систему дифференциальных уравнений движения получим из вариационного принципа Даламбера:

$$L_2(a_1u+a_2\psi-a_3w,_r)=0\,,$$
$$L_2(a_2u+a_4\psi-a_5w,_r)=0\,,$$