УДК 539.3

ТЕРМОУПРУГОДИФФУЗИОННЫЙ СЛОЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

С. А. ДАВЫДОВ, А. В. ЗЕМСКОВ

Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация

В работе представлено математическое моделирование распространения динамических термоупругодиффузионных возмущений в N-компонентном слое с учётом релаксации [1–3]. Также учитываются перекрёстные диффузионные эффекты [4]. Одномерные физико-механические процессы, протекающие в условии нестационарных поверхностных механических, тепловых и диффузионных воздействий, описываются с помощью локально-равновесной модели связанной термоупругой диффузии (штрихи обозначают производную по безразмерной пространственной переменной x, а точки – производные по безразмерному времени τ), включающей:

– уравнения движения упругой среды, теплопереноса и массопереноса [5, 6]:

$$\ddot{u} = u'' - b_u \vartheta' - \sum_{q=1}^{N} \alpha_q \eta_q',$$

$$\dot{\vartheta} + \tau_\vartheta \ddot{\vartheta} = \kappa \vartheta'' - b_\vartheta \left(\dot{u}' + \tau_\vartheta \ddot{u}'\right) - \sum_{q=1}^{N} \beta_q \left(\dot{\eta}_q + \tau_\vartheta \ddot{\eta}_q\right),$$

$$\dot{\eta}_q + \tau_{\eta q} \ddot{\eta}_q = \sum_{p=1}^{N} D_{qp} \eta_q'' - \Lambda_q u''' - M_q \vartheta'' \quad \left(q = \overline{1,N}\right);$$

– граничные условия:

$$\left.\left(u' - b_u \vartheta - \sum_{q=1}^{N} \alpha_q \eta_q\right)\right|_{x=0} = f_{11}(\tau), \quad \vartheta\big|_{x=0} = f_{21}(\tau), \quad \eta_q\big|_{x=0} = f_{31}(\tau),$$

$$\left.\left(u' - b_u \vartheta - \sum_{q=1}^{N} \alpha_q \eta_q\right)\right|_{x=1} = f_{12}(\tau), \quad \vartheta\big|_{x=1} = f_{22}(\tau), \quad \eta_q\big|_{x=1} = f_{32}(\tau);$$

– начальные условия:

$$u\big|_{\tau=0} = \dot{u}\big|_{\tau=0} = \vartheta\big|_{\tau=0} = \dot{\vartheta}\big|_{\tau=0} = \eta_q\big|_{\tau=0} = \dot{\eta}_q\big|_{\tau=0} = 0.$$

В постановке и далее используются следующие безразмерные величины (при одинаковом начертании размерные величины обозначены звёздочкой):

$$x = \frac{x_1}{L}, \quad u = \frac{u_1}{L}, \quad \tau = \frac{Ct}{L}, \quad C^2 = \frac{C_{1111}}{\rho}, \quad \alpha_q = \frac{\alpha_{11}^{(q)} n_0^{(q)}}{C_{1111}}, \quad D_{qp} = \frac{D_{11}^{(qp)}}{CL}, \quad b_u = \frac{b_{11} T_0}{C_{1111}},$$

$$\tau_T = \frac{Ct_T}{L}, \quad \tau_{\eta q} = \frac{Ct_\eta^{(q)}}{L}, \quad \vartheta = \frac{T - T}{T_0}, \quad \Lambda_q = \frac{m^{(q)} D_{11}^{(qq)} \alpha_{11}^{(q)}}{\rho R T_0 C L}, \quad b_T = \frac{b_{11}}{\rho c_0},$$

$$M_q = \frac{D_{11}^{(qq)} \ln\left(n_0^{(q)} \gamma^{(q)}\right)}{CL}, \quad \kappa = \frac{\kappa_{11}}{\rho c_0 L C}, \quad \beta_q = \frac{n_0^{(q)} R \ln\left(n_0^{(q)} \gamma^{(q)}\right)}{m^{(q)} c_0},$$

$$f_{1l}(\tau) = \frac{f_{1l}^*(t)}{L}, \quad f_{2l}(\tau) = \frac{L f_{2l}^*(t)}{T_0}, \quad f_{q+2,l}(\tau) = \frac{f_{q+2,l}^*(t)}{n_{0q} C} \quad (l = 1,2).$$

где t – время; x_1 – декартова координата; u_1 – компонента вектора перемещений; L – толщина слоя; q – номер компоненты вещества в составе N-компонентной среды; $\eta^{(q)} = n^{(q)} - n_0^{(q)}$ – приращение концентрации (массовые доли); $n_0^{(q)}$ и $n^{(q)}$ – начальная и актуальная концентрации (массовые доли);

t_ϑ – время тепловой релаксации; $t_\eta^{(q)}$ – время диффузионной релаксации; C_{1111} – упругая постоянная; ρ – плотность среды; b_{11} – температурная постоянная, характеризующая тепловые деформации; $\alpha_{11}^{(q)}$ – коэффициенты, характеризующие объёмное изменение среды за счёт диффузии; $D_{11}^{(qp)}$ – коэффициент диффузии; $m^{(q)}$ – молярная масса; R – универсальная газовая постоянная; T и T_0 – актуальная и начальная температуры; κ_{11} – коэффициент теплопроводности; $\gamma^{(q)}$ – коэффициент активации; c_0 – удельная теплоёмкость при постоянных концентрации и деформации.

Решение задачи ищется в виде свёрток [7, 8]:

$$u(x,\tau)=\sum_{l=1}^{2}\sum_{k=1}^{N+2}\left(G_{1kl}*f_{kl}\right),\quad \vartheta(x,\tau)=\sum_{l=1}^{2}\sum_{k=1}^{N+2}\left(G_{2kl}*f_{kl}\right),\quad \eta_q(x,\tau)=\sum_{l=1}^{2}\sum_{k=1}^{N+2}\left(G_{1kl}*f_{kl}\right),$$

где $G_{ik}=G_{ik}(x,\tau)$ – поверхностные функции Грина. Свёртки имеют вид

$$G_{ikl}*f_{kl}=\int_0^\tau G_{ikl}(x,\tau-t)f_{kl}(t)dt.$$

Для нахождения функций Грина используются преобразование Лапласа по времени и разложение искомых функций в тригонометрические ряды Фурье. Первое уравнение раскладывается по косинусам, а остальные уравнения – по синусам. При использовании такого подхода трансформанты искомых функций представляются рациональными относительно параметра преобразования Лапласа, что, в свою очередь, позволяет находить их оригиналы с помощью известных теорем операционного исчисления [3–7]. Выполнен тестовый расчёт.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-31-00437).

Список литературы

1 **Sherief, H. H.** The theory of generalized thermoelastic diffusion / H. H. Sherief, F. A. Hamza, H. Saleh // International Journal of Engineering Science. – 2004. – Vol. 42. – P. 591–608.

2 **Князева, А. Г.** Введение в термодинамику необратимых процессов. Лекции о моделях. – Томск : Изд-во Иван Федоров, 2014. – 172 с.

3 **Davydov, S. A.** Propagation of one-dimensional thermoelastodiffusive perturbations in a multicomponent layer / S. A. Davydov, A. V. Vestyak, A. V. Zemskov // J. Phys.: Conf. Ser. – 2019. – 1158. – 022034.

4 **Davydov, S. A.** Unsteady one-dimensional perturbations in multicomponent thermoelastic layer with cross-diffusion effect / S. A. Davydov, A. V. Zemskov // J. Phys.: Conf. Ser. – 2018. – 1129, 012009.

5 **Davydov, S. A.** An Elastic Half-Space under the Action of One-Dimensional Time-Dependent Diffusion Perturbations / S. A. Davydov, A. V. Zemskov, D. V. Tarlakovskii // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2015. – Vol. 36, No. 4. – P. 503–509.

6 **Давыдов, С. А.** Поверхностные функции Грина в нестационарных задачах термомеханодиффузии / С. А. Давыдов, А. В. Земсков, Д. В. Тарлаковский // Проблемы прочности и пластичности. – 2017. – Т. 79, № 1. – С. 38–47.

7 Unsteady one-dimensional problem of thermoelastic diffusion for homogeneous multicomponent medium with plane boundaries / A. V. Vestyak [et al.] // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. – 2018. – Vol. 160, No. 1. – P. 183–195 (In Russian).

8 **Davydov, S. A.** Thermoelastic Diffusion Multicomponent Half-Space under the Effect of Surface and Bulk Unsteady Perturbations / S. A. Davydov, A. V. Zemskov, E. R. Akhmetova // Math. Comput. Appl. – 2019. – No. 24(1). – P. 26.

УДК 519.87:539.37

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ И МНОГОСВЯЗНЫХ СРЕД И СИСТЕМ

В. Г. ДМИТРИЕВ, О. В. ЕГОРОВА
Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация

На основе вычислительного эксперимента и оптимальных вычислительных алгоритмов получены определяющие параметры для исследования прочности и надежности сложных, неоднородных машиностроительных и строительных конструкций и систем с учетом нелинейных особенностей их деформирования при нестационарных воздействиях различной физической природы. При этом