

УДК 539.3

А. В. ЯРОВАЯ, доктор физико-математических наук, А. А. ПОДДУБНЫЙ, магистр технических наук, Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

РАСЧЕТ ЧАСТИЧНО ОПЕРТОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛИТЫ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНЫХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ

Рассмотрен цилиндрический изгиб частично опертой трехслойной плиты, входящей в состав сборно-разборной дорожной площадки, под действием распределенных и сосредоточенных нагрузок с учетом нелинейных свойств материалов слоев. По длине плиты выделены три участка, на каждом из которых нагрузки и жесткость упругого основания могут иметь различные величины и закон изменения, а могут и отсутствовать. Получено общее аналитическое решение в итерациях, граничные условия и условия сопряжения участков. Это позволит проводить численный анализ напряженно-деформированного состояния трехслойных плит в зависимости от способов их соединения, прочностных и геометрических параметров слоев, жесткости упругого основания и длин участков опирания.

Введение. Слоистые, в том числе трехслойные, элементы конструкций широко используются в промышленном и гражданском строительстве, транспортном машиностроении, при строительстве и восстановлении искусственных сооружений на железных и автомобильных дорогах. Достаточно часто встречаются плиты, контактирующие с упругим основанием. В процессе их эксплуатации по ряду причин возможно появление зазора между плитой и основанием, из-за чего изменяется расчетная схема конструкции, возрастают параметры ее напряженно-деформированного состояния, что может привести к преждевременному разрушению. При этом материалы проявляют физически нелинейные свойства. Дифференциальные уравнения равновесия становятся нелинейными, и возникает проблема выбора методов их приближенного решения.

Сборно-разборная дорожная площадка. Авторами статьи была разработана конструкция сборно-разборной дорожной площадки, которая может быть использована для устройства проезжей части колеиного или сплошного типа, ремонтных площадок, в качестве скоростной подготовки автомобильных дорог, для преодоления переувлажненной и заболоченной местности и участков сыпучих песков, для перекрытия нешироких канав, траншей и воронок, устройства автомобильного настила на железнодорожных мостах, организации временных вертолетных площадок, покрытий для мобильных погрузо-выгрузочных рамп и т. д.

Дорожная площадка состоит из скрепленных между собой трехслойных плит (рисунок 1). Каждая плита выполнена из двух наружных несущих листов и заполнителя. К верхнему несущему листу плиты приклеены трапециевидные поперечные ребра противоскольжения.

Наружные несущие листы выполнены из строительного стеклопластика с пределом прочности при изгибе в направлении продольной оси плиты не менее 280 МПа, а в направлении, перпендикулярном продольной оси плиты, – не менее 100 МПа. Заполнитель выполнен из достаточно легкого полимерного материала, например, вспененного ПВХ с пределом прочности при изгибе не менее 100 МПа. Для повышения местной устойчивости заполнитель может быть армирован ребрами. По сравнению с конструкциями из древесины плита из композиционных и полимерных материалов

менее подвержена вредному воздействию окружающей среды, не требует дополнительного обслуживания (защитки, пропитки, покраски).

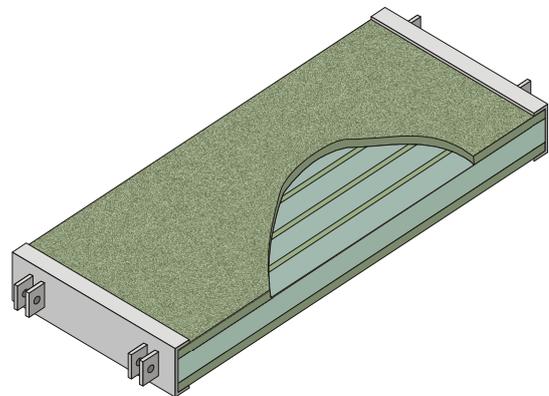


Рисунок 1 – Плита сборно-разборной дорожной площадки

Тонкие прочные несущие листы работают на растяжение и сжатие в своей плоскости; разнесенные с помощью заполнителя на максимальное расстояние по высоте плиты, они хорошо воспринимают изгибающие моменты. Толстый более легкий заполнитель работает на сдвиг и обеспечивает совместную работу и устойчивость несущих листов. Трехслойная плита при работе на изгиб имеет оптимальную форму и, как следствие, оптимальный вес, что повышает ее эксплуатационную надежность.

На торцах плиты с помощью болтов установлены стальные П-образные торцевые усиления, которые обеспечивают местную жесткость конструкции при действии сосредоточенных усилий и предотвращают продольную деформацию плиты, а в местах крепления повышают сопротивление усталости.

Предлагаемая конструкция легче в 2 раза, чем существующая плита СРДП, имеет почти в 4 раза большую грузоподъемность, влагоустойчива, долговечна, может храниться и эксплуатироваться в любых условиях, не требует материальных затрат на обслуживание.

Расчетная схема. Рассматривается прямоугольная трехслойная плита с размерами $l \times b$ и толщиной h (рисунок 2).

Система координат x, y, z связана со срединной плоскостью заполнителя. Ось x направлена вдоль сто-

роны длиной l , ось y – вдоль стороны длиной b , ось z – вниз. Несущий слой, расположенный со стороны положительного направления оси z , считается первым слоем, следующий несущий слой – вторым, а наполнитель – третьим (см. рисунок 2). Номер слоя обозначен индексом k ($k = 1, 2, 3$).

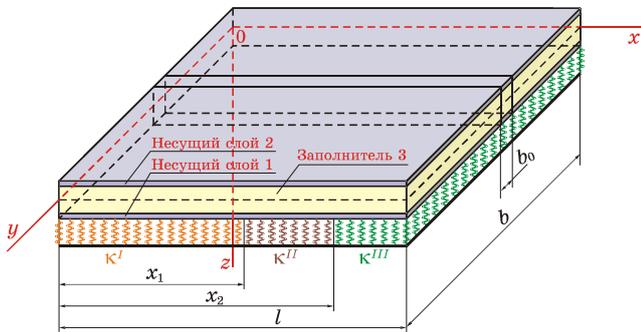


Рисунок 2 – Расчетная схема прямоугольной трехслойной плиты

На верхний внешний слой плиты действуют распределенные поверхностные нагрузки p, q [Па], не изменяющиеся вдоль оси y : $p = p(x), q = q(x)$. Вдоль боковых сторон ($x = 0$ и $x = l$) и линий $x = x_1, x = x_2$ действуют погонные силы и моменты, также не изменяясь вдоль оси y .

Плита либо достаточно длинная в направлении оси y , либо вдоль боковых сторон ($x = 0$ и $x = l$) имеются абсолютно жесткие диафрагмы. Здесь же могут находиться жесткие или шарнирные опорные крепления. Плита опирается на участки упругого основания в виде трех полос различной жесткости (см. рисунок 2), причем на одном или двух из них жесткость основания может быть нулевой (т. е. основание отсутствует). При указанных условиях плита изгибается по цилиндрической поверхности.

Двумя плоскостями вырежем из трехслойной плиты полосу достаточно малой ширины b_0 (см. рисунок 2), которую будем рассматривать как трехслойную балку, испытывающую плоский изгиб относительно оси y (рисунок 3).

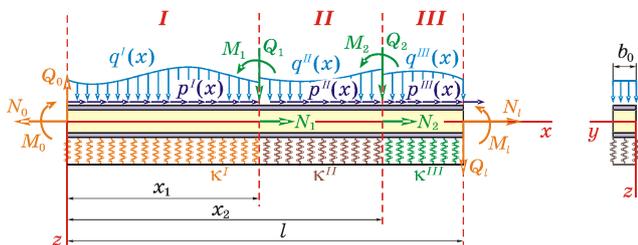


Рисунок 3 – Расчетная схема трехслойной балки

На верхний внешний слой балки действуют распределенные поверхностные нагрузки, не изменяющиеся вдоль оси y . На торцах балки (при $x = 0$ и $x = l$) действуют сосредоточенные силы и моменты N_0, Q_0, M_0 и N_1, Q_1, M_1 . К сечениям 1 ($x = x_1$) и 2 ($x = x_2$) приложены усилия N_1, Q_1, M_1 и N_2, Q_2, M_2 .

По длине балки выделяются три участка: I ($0 \leq x \leq x_1$), II ($x_1 \leq x \leq x_2$), III ($x_2 \leq x \leq l$). Обозначим:

$p^n(x), q^n(x)$ – продольная и поперечная распределенные нагрузки на n -м участке ($n = I, II, III$); h_1^n, h_2^n, c^n – толщины 1-го и 2-го несущих слоев и половина толщины наполнителя на n -м участке. Таким образом, нагрузки на каждом из участков могут иметь различные величины и закон изменения, а могут и отсутствовать. Балка опирается на участки упругого основания различной жесткости, через κ^n обозначен коэффициент жесткости упругого основания на n -м участке. Если на одном или двух участках основание отсутствует, то необходимо принять нулевым соответствующий коэффициент жесткости.

Постановка и решение задачи проводятся в перемещениях. В качестве искоемых величин приняты функции $w^n(x), u^n(x)$ – прогиб и продольное перемещение срединной плоскости наполнителя, а также $\psi^n(x)$ – угол поворота нормали в наполнителе за счет сдвига (угол сдвига) на n -м участке. В точках сопряжения участков должны соблюдаться условия непрерывности перемещений. Для описания действия упругого основания на n -м участке используется модель Винклера, согласно которой реакция основания $q_R^n(x) = \kappa^n w^n(x)$.

Заметим, что принятая расчетная схема может быть использована для трехслойной плиты, испытывающей цилиндрический изгиб.

В слоях балки используются физические уравнения теории малых упругопластических деформаций Ильюшина ($i, j = x, y, z$):

$$s_{ij}^{(k)n} = 2G_k^n f^{(k)n} \varepsilon_{ij}^{(k)n} = 2G_k^n (1 - \omega^{(k)n}) \varepsilon_{ij}^{(k)n};$$

$$\sigma^{(k)n} = 3K_k^n \varepsilon^{(k)n}, \quad (1)$$

где $s_{ij}^{(k)n}, \varepsilon_{ij}^{(k)n}$ – девиаторы тензоров напряжений и деформаций на n -м участке; $\sigma^{(k)n}, \varepsilon^{(k)n}$ – их шаровые части; G_k^n, K_k^n – модули упругости материалов на n -м участке; $f^{(1)n}, f^{(2)n}$ – функции пластичности в несущих слоях; $f^{(3)n}$ – функция нелинейности в наполнителе.

Если интенсивность деформаций $\varepsilon_u^{(k)n}$ не превышает деформационного предела текучести $\varepsilon_\tau^{(k)}$ в несущих слоях (или предела физической нелинейности $\varepsilon_{u0}^{(3)}$ в наполнителе), то функции пластичности и нелинейности $f^{(k)n}$ следует положить равными единице.

Методика решения поставленной задачи. Силовые уравнения равновесия и граничные условия для каждого из трех участков данной балки получены независимо от физических уравнений, поэтому можно воспользоваться ими и в рассматриваемом случае. Если во внутренних усилиях выразить напряжения через деформации – а затем деформации через три линейно независимые функции $u^n(x), \psi^n(x), w^n(x)$, то в результате получим системы нелинейных дифференциальных уравнений для каждого из участков. Для решения этих систем воспользуемся методом «упругих» решений Ильюшина [1], который распространим на исследуемые слоистые системы.

Компоненты тензора напряжений в слоях, используя (1), представим через девиатор и шаровую часть тензора деформаций в виде

$$\sigma_x^{(k)n} = s_x^{(k)n} + \sigma^{(k)n} = 2G_k^n \varepsilon_x^{(k)n} + 3K_k^n \varepsilon^{(k)n} - 2G_k^n \varepsilon_x^{(k)n} \omega^{(k)n};$$

$$\sigma_{xz}^{(3)n} = s_{xz}^{(3)n} = 2G_k^n \varepsilon_{xz}^{(3)n} - 2G_k^n \omega^{(3)n}.$$

Выделим упругие (индекс «e») и неупругие (индекс «o») слагаемые в тензоре напряжений и внутренних усилиях:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(k)n} &= \sigma_x^{(k)ne} - \sigma_x^{(k)no}; & \sigma_{xz}^{(3)n} &= \sigma_{xz}^{(3)ne} - \sigma_{xz}^{(3)no}; \\ N^{(k)n} &= N^{(k)ne} - N^{(k)no}; & M^{(k)n} &= M^{(k)ne} - M^{(k)no}; \\ Q^{(3)n} &= Q^{(3)ne} - Q^{(3)no}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(k)n} &= 2G_k^n \varepsilon_x^{(k)n} + 3K_k^n \varepsilon^{(k)n}; & \sigma_x^{(k)no} &= 2G_k^n \varepsilon_x^{(k)n} \omega^{(k)n}; \\ \sigma_{xz}^{(3)ne} &= 2G_3^n \varepsilon_{xz}^{(3)n}; & \sigma_{xz}^{(3)no} &= 2G_3^n \varepsilon_{xz}^{(3)n} \omega^{(3)n}; \\ N^{(k)ne} &= b_0 \int_{h_k^n} \sigma_x^{(k)ne} dz, & N^{(k)no} &= b_0 \int_{h_k^n} \sigma_x^{(k)no} dz, \\ M^{(k)ne} &= b_0 \int_{h_k^n} \sigma_x^{(k)ne} z dz, & M^{(k)no} &= b_0 \int_{h_k^n} \sigma_x^{(k)no} z dz, \\ Q^{(3)ne} &= b_0 \int_{-c^n}^{c^n} \sigma_{xz}^{(3)ne} dz, & Q^{(3)no} &= b_0 \int_{-c^n}^{c^n} \sigma_{xz}^{(3)no} dz. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнения равновесия. Уравнения равновесия в усилиях на n -м участке имеют вид

$$\begin{aligned} N^{n,x} + b_0 p^n &= 0; & H^{n,x} - Q^n &= 0; \\ M^{n,xx} - b_0 q_R^n + b_0 q^n &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставив внутренние усилия (2) в уравнения равновесия (4), приводим систему к виду

$$\begin{aligned} N^{ne,x} + b_0 p^n &= N^{no,x}; \\ H^{ne,x} - Q^{ne} &= H^{no,x} - Q^{no}; \\ M^{ne,xx} - b_0 q_R^n + b_0 q^n &= M^{no,xx}. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставим выражения усилий через искомые функции перемещений в уравнения (5). Получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений равновесия упругой трехслойной балки в перемещениях. Для n -го участка, связанного с упругим основанием, эта система имеет вид

$$\begin{aligned} a_1^n u^{n,xx} + a_6^n \Psi^{n,xx} - a_7^n w^{n,xxx} &= -p^n + p_\omega^n, \\ a_6^n u^{n,xx} + a_2^n \Psi^{n,xx} - a_3^n w^{n,xxx} - a_5^n \Psi^n &= h_\omega^n, \\ a_7^n u^{n,xxx} + a_3^n \Psi^{n,xxx} - a_4^n w^{n,xxxx} - \kappa^n w^n &= -q^n + q_\omega^n, \end{aligned} \quad (6)$$

где a_i^n – коэффициенты, зависящие от геометрических и жесткостных свойств слоев.

Если n -й участок не связан с упругим основанием, то третье уравнение системы (6) будет следующим:

$$a_7^n u^{n,xxx} + a_3^n \Psi^{n,xxx} - a_4^n w^{n,xxxx} = -q^n + q_\omega^n.$$

Нелинейные составляющие определяются по формулам

$$p_\omega^n = \frac{1}{b_0} N_x^{no}, \quad h_\omega^n = \frac{1}{b_0} (H_x^{no} - Q^{no}), \quad q_\omega^n = \frac{1}{b_0} M_{xx}^{no}. \quad (7)$$

Предположим, что в (6), (7) содержится малый параметр, например все $\omega_k < 1$. Тогда возможен метод

итераций, при котором для любого m -го приближения получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} a_1^n u^{n(m),xx} + a_6^n \Psi^{n(m),xx} - a_7^n w^{n(m),xxx} &= -p^n + p_\omega^{n(m-1)}; \\ a_6^n u^{n(m),xx} + a_2^n \Psi^{n(m),xx} - a_3^n w^{n(m),xxx} - a_5^n \Psi^{n(m)} &= h_\omega^{n(m-1)}; \\ a_7^n u^{n(m),xxx} + a_3^n \Psi^{n(m),xxx} - a_4^n w^{n(m),xxxx} - \kappa^n w^{n(m)} &= \\ &= -q^n + q_\omega^{n(m-1)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Если n -й участок не связан с упругим основанием, то в третьем уравнении отсутствует слагаемое $\kappa^n w^{n(m)}$. Величины $p_\omega^{n(m-1)}$, $h_\omega^{n(m-1)}$, $q_\omega^{n(m-1)}$, соответствующие неупругим составляющим (7), носят название *дополнительных «внешних» нагрузок*. Они служат поправками на пластичность и физическую нелинейность материалов слоев. На первом шаге ($m = 1$) они принимаются равными нулю, в дальнейшем вычисляются с учетом формул (3) по результатам предыдущего приближения:

$$\begin{aligned} p_\omega^{n(m-1)} &= \frac{1}{b_0} N_x^{no(m-1)}; & h_\omega^{n(m-1)} &= \frac{1}{b_0} (H_x^{no(m-1)} - Q^{no(m-1)}); \\ q_\omega^{n(m-1)} &= \frac{1}{b_0} M_{xx}^{no(m-1)}. \end{aligned}$$

Применение метода последовательных приближений позволяет на каждом шаге приближения рассматриваемую задачу сводить к линейной задаче теории упругости с дополнительными «внешними» нагрузками.

Решение уравнений равновесия. Процедура получения решения системы уравнений (8) не отличается от примененной в [2] для соответствующей задачи теории упругости. В результате получаем искомые решения в рекуррентном виде.

Для n -го участка на упругом основании средней жесткости

$$\begin{aligned} w^{n(m)}(x) &= C_1^{n(m)} \operatorname{sh}(\lambda_1^{n(m)} x) + C_2^{n(m)} \operatorname{ch}(\lambda_1^{n(m)} x) + \\ &+ C_3^{n(m)} \operatorname{sh}(\lambda_3^{n(m)} x) + C_4^{n(m)} \operatorname{ch}(\lambda_3^{n(m)} x) + \\ &+ C_5^{n(m)} \operatorname{sh}(\lambda_5^{n(m)} x) + C_6^{n(m)} \operatorname{ch}(\lambda_5^{n(m)} x) + w_p^{n(m)}; \\ \Psi^{n(m)}(x) &= C_1^{n(m)} b_1^{n(m)} \operatorname{ch}(\lambda_1^{n(m)} x) + C_2^{n(m)} b_1^{n(m)} \operatorname{sh}(\lambda_1^{n(m)} x) + \\ &+ C_3^{n(m)} b_7^{n(m)} \operatorname{ch}(\lambda_3^{n(m)} x) + C_4^{n(m)} b_7^{n(m)} \operatorname{sh}(\lambda_3^{n(m)} x) + \\ &+ C_5^{n(m)} b_8^{n(m)} \operatorname{ch}(\lambda_5^{n(m)} x) + C_6^{n(m)} b_8^{n(m)} \operatorname{sh}(\lambda_5^{n(m)} x) + \\ &+ C_7^{n(m)} + f_1^{n(m)}(x); \\ u^{n(m)}(x) &= C_1^{n(m)} b_4^{n(m)} \operatorname{ch}(\lambda_1^{n(m)} x) + C_2^{n(m)} b_4^{n(m)} \operatorname{sh}(\lambda_1^{n(m)} x) + \\ &+ C_3^{n(m)} b_9^{n(m)} \operatorname{ch}(\lambda_3^{n(m)} x) + C_4^{n(m)} b_9^{n(m)} \operatorname{sh}(\lambda_3^{n(m)} x) + \\ &+ C_5^{n(m)} b_{10}^{n(m)} \operatorname{ch}(\lambda_5^{n(m)} x) + C_6^{n(m)} b_{10}^{n(m)} \operatorname{sh}(\lambda_5^{n(m)} x) + C_7^{n(m)} \alpha_{12}^{n(m)} + \\ &+ C_8^{n(m)} x + C_9^{n(m)} + f_2^{n(m)}(x). \end{aligned} \quad (9)$$

Если n -й участок не связан с упругим основанием, то

$$\begin{aligned} \Psi^{n(m)}(x) &= C_1^{n(m)} b_{11}^{n(m)} + C_2^{n(m)} \operatorname{sh}(\beta_3^{n(m)} x) + \\ &+ C_3^{n(m)} \operatorname{ch}(\beta_3^{n(m)} x) + g_1^{n(m)}(x); \end{aligned}$$

$$w^{n(m)}(x) = C_1^{n(m)} (\alpha_{17}^{n(m)} b_{11}^{n(m)} x + \alpha_{18}^{n(m)} x^3 / 6) +$$

$$\begin{aligned}
& + C_2^{n(m)} b_{14}^{n(m)} \operatorname{ch}(\beta_3^{n(m)} x) + C_3^{n(m)} b_{14}^{n(m)} \operatorname{sh}(\beta_3^{n(m)} x) + \\
& + C_4^{n(m)} x^2 / 2 + C_5^{n(m)} x + C_6^{n(m)} + g_2^{n(m)}(x); \\
u^{n(m)}(x) = & C_1^{n(m)} (b_{15}^{n(m)} + b_{16}^{n(m)} x^2) + C_2^{n(m)} b_{17}^{n(m)} \operatorname{sh}(\beta_3^{n(m)} x) + \\
& + C_3^{n(m)} b_{17}^{n(m)} \operatorname{ch}(\beta_3^{n(m)} x) + C_4^{n(m)} \alpha_{13}^{n(m)} x + C_5^{n(m)} \alpha_{13}^{n(m)} + \\
& + C_7^{n(m)} x + C_8^{n(m)} + g_3^{n(m)}(x). \quad (10)
\end{aligned}$$

В выражениях (9)–(10) $C_1^{n(m)}, \dots, C_9^{n(m)}$ – константы интегрирования, $w_p^{n(m)}(x)$ – частное решение, зависящее от вида нагрузки, коэффициенты $\lambda_i^{n(m)}, b_i^{n(m)}, \alpha_i^{n(m)}, \beta_i^{n(m)}$ выражаются через параметры a_i^n , а функции определяются выражениями

$$\begin{aligned}
f_1^{n(m)}(x) = & \alpha_8^n w_p^{n(m)},_{xxx} + \alpha_9^n \int w_p^{n(m)} dx + \alpha_{10}^n \int q^{n(m)} dx + \\
& + \alpha_{11}^n p^{n(m)} + \alpha_{10}^n \int q_\omega^{n(m-1)} dx + \alpha_{11}^n p_\omega^{n(m-1)}; \\
f_2^{n(m)}(x) = & \alpha_8^n \alpha_{12}^n w_p^{n(m)},_{xxx} + \alpha_9^n \alpha_{12}^n \int w_p^{n(m)} dx + \alpha_{13}^n w_p^{n(m)},_x + \\
& + \alpha_{10}^n \alpha_{12}^n \int q^{n(m)} dx + \alpha_{11}^n \alpha_{12}^n p^{n(m)} + \alpha_{14}^n \iint p^{n(m)} dx dx + \\
& + \alpha_{10}^n \alpha_{12}^n \int q_\omega^{n(m-1)} dx + \alpha_{11}^n \alpha_{12}^n p_\omega^{n(m-1)} + \alpha_{14}^n \iint p_\omega^{n(m-1)} dx dx; \\
g_2^{n(m)}(x) = & \alpha_{17}^n \int g_1^{n(m)} dx + \alpha_{18}^n \iiint q^{n(m)} dx dx dx + \\
& + \alpha_{19}^n \iiint p^{n(m)} dx dx dx + \alpha_{18}^n \iiint q_\omega^{n(m-1)} dx dx dx + \\
& + \alpha_{19}^n \iiint p_\omega^{n(m-1)} dx dx dx;
\end{aligned}$$

Получено 05.11.2014

A. V. Yarovaya, A. A. Poddubny. Calculation of partially contacting three-layer plate taking into account nonlinear properties of materials.

The cylindrical bend of partially supported three-layer plate which is a part of a collapsible road platform under the influence of the distributed and concentrated loadings taking into account nonlinear properties of materials of layers is considered. On length of a plate three sites are allocated, on each of which loadings and rigidity of the elastic basis can have various size and the law of change, and can be absent. The common analytical decision in iterations, boundary conditions and conditions of interface of sites is received. It will allow to carry out the numerical analysis of the intense deformed condition of three-layer plates depending on ways of their connection, strength and geometrical parameters of layers, rigidity of the elastic basis and lengths of sites of contact.

$$\begin{aligned}
g_3^{n(m)}(x) = & b_{18}^n g_1^{n(m)}(x) + b_{19}^n g_2^{n(m)}(x) + \\
& + \alpha_{13}^n \alpha_{18}^n \iiint q^{n(m)} dx dx dx + b_{20}^n \iint p^{n(m)} dx dx + \\
& + \alpha_{13}^n \alpha_{18}^n \iiint q_\omega^{n(m-1)} dx dx dx + b_{20}^n \iint p_\omega^{n(m-1)} dx dx.
\end{aligned}$$

Для определения констант интегрирования необходимо учесть граничные условия и условия сопряжения участков друг с другом.

Выводы. Таким образом, получено аналитическое решение в итерациях задачи о деформировании трехслойной плиты, материалы которой проявляют упруго-пластические свойства, при ее частичном контакте с упругим основанием. Это позволит в дальнейшем проводить численный анализ напряженно-деформированного состояния трехслойных плит, соединенных между собой в сборно-разборную дорожную площадку, в зависимости от прочностных и геометрических параметров слоев, способов соединения плит, жесткости упругого основания и длин участков опирания.

Список литературы

- 1 Плескачевский, Ю. М. Деформирование металлополимерных систем / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – Минск : Бел. наука, 2004. – 386 с.
- 2 Яровая, А. В. Теоретическое и экспериментальное исследование прогибов трехслойной балки, частично опертой на упругое основание / А. В. Яровая, А. А. Поддубный // Теоретическая и прикладная механика. – Минск, 2014. – № 29. – С. 141–147.