МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра «Прикладная математика»

А. А. ГАВРИЛЮК, А. Н. СТАРОВОЙТОВ

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебно-методическое пособие для студентов строительных специальностей

Гомель 2010

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра «Прикладная математика»

А. А. ГАВРИЛЮК, А. Н. СТАРОВОЙТОВ

МЕТОДЫ
ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебно-методическое пособие для студентов
строительных специальностей

Одобрено методическими комиссиями строительного факультета и факультета промышленного и гражданского строительства

Гомель 2010

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171
Г12

Р е ц е н з е н т ы : зав. кафедрой «Экономическая кибернетика и теория вероятностей» доктор физ.-мат. наук, профессор *Ю. В. Малинковский* (УО «ГГУ им. Ф. Скорины»); зав. кафедрой «Высшая математика» кандидат физ.-мат. наук, доцент *С. П. Новиков* (УО «БелГУТ»).

Гаврилюк, А. А.

Г12 Методы теории вероятностей : учеб.-метод. пособие для студентов строительных специальностей / А. А. Гаврилюк, А. Н. Старовойтов ; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2010. – 185 с.

ISBN 978-985-468-752-0

Содержит теоретические сведения по основным разделам теории вероятностей, предусмотренным учебной программой по специальностям 1-70 01 01 «Производство строительных изделий и конструкций», 1-70 02 02 «Экспертиза и управление недвижимостью», 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство», 1-70 03 01 «Автомобильные дороги», 1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов», 1-37 02 05 «Строительство железных дорог и путевое хозяйство». Включает в себя вопросы для самоконтроля, задачи для самостоятельного решения, задания и методику выполнения расчетно-графических работ, рабочую программу, необходимые справочные таблицы.

Предназначено для студентов всех специальностей строительного факультета и факультета ПГС. Может быть использовано при курсовом и дипломном проектировании студентами технических специальностей.

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171

ISBN 978-985-468-752-0

ВВЕДЕНИЕ

Вместе с развитием промышленности, сельского хозяйства, торговли, сферы услуг и транспорта увеличивается и объём разнообразных статистических данных, которые нуждаются в систематизации и анализе. На любой показатель деятельности предприятия, так или иначе, оказывают влияние элементы случайности. Это приводит к необходимости построения моделей случайных явлений. Первые задачи такого рода возникли при распространении азартных игр. По своей сути азартные игры являются простейшими экспериментами с несколькими случайными исходами. Проблемы страхового дела, статистики и азартных игр, а позднее и проблемы природоведческих наук ориентировали учёных на изучение случайных явлений.

Первые существенные шаги в данном направлении были сделаны в работах Д. Кардано, Б. Паскаля, П. Ферма и Х. Гюйгенса. Высказанные этими учёными идеи оказались весьма плодотворными и послужили основой для нового раздела математики – теории вероятностей.

Дальнейший вклад в развитие науки о случайных явлениях внесли Я. Бернулли, А. Муавр, Т. Байес, П. Лаплас, К. Гаусс, С. Пуассон и др. Создателем и руководителем русской школы теории вероятностей был выдающийся математик П.Л. Чебышев. Огромный вклад в становление и развитие теории вероятностей внесли А.А. Марков, А.М. Ляпунов, С.Н. Бернштейн, А.Я. Хинчин, А.Н. Колмогоров, Б.В. Гнеденко, Н.В. Смирнов, Ю.В. Прохоров. Созданная Колмогоровым в 30-е годы XX века аксиоматика теории вероятностей поставила эту науку в один ряд с современными математическими дисциплинами.

Теория вероятностей изучает не все случайные эксперименты, а только те из них, которые могут быть проведены в неизменных условиях сколь угодно большое количество раз. Таким образом, **теория вероятностей** – это математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений. Можно сказать, что теория вероятностей занимается построением моделей случайных экспериментов. Теория исходит из того, что каждому событию, которое может произойти при данной совокупности условий, можно поставить в соответствие число от нуля до единицы – вероятность данного события, которая характеризует объективную возможность его наступления.

Основная задача теории вероятностей состоит в разработке методов вычисления вероятностей событий исходя из вероятностей более простых событий. Вопрос об определении исходных вероятностей решается теорией только в самом общем виде. Чаще всего исходные вероятности ставятся в соответствие событиям на основании статистических данных.

Идеи и методы теории вероятностей имеют исключительное значение для развития многих разделов современной науки: теории информации, теории игр, теории надёжности, математической статистики, теории массового обслуживания, теории финансов, биологии, языковедения и пр.

1 СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1.1 Основные понятия

Любая наука базируется на некотором количестве понятий, через которые определяются все остальные понятия. В геометрии, например, такими понятиями являются точка, прямая, плоскость. К первичным (не определяемым через другие) понятиям теории вероятностей относятся такие понятия, как вероятностный эксперимент и пространство элементарных исходов.

Под вероятностным экспериментом будем понимать некоторое испытание, результат которого невозможно однозначно предсказать.

Рассмотрим примеры вероятностных экспериментов.

Пример 1.1 Подбрасывание монеты – вероятностный эксперимент. Действительно, результат этого испытания заранее предсказать невозможно, поскольку может выпасть как герб, так и решка.

Пример 1.2 Произведение выстрела по мишени – вероятностный эксперимент. Действительно, исход эксперимента (промах или попадание) заранее предсказать невозможно, поскольку он зависит от слишком большого числа факторов (мастерство стрелка, его физическое и моральное состояние в момент выстрела, техническое состояние оружия, сила и направление ветра).

Пример 1.3 Автомобиль движется с постоянной скоростью, равной 60 км/ч. Какое расстояние он преодолеет за 20 минут? Эксперимент, заключающийся в измерении этого расстояния, не является вероятностным, поскольку его исход заранее предопределён.

В дальнейшем будем рассматривать только вероятностные эксперименты, поэтому прилагательное «вероятностный» будет нами опускаться. Обозначать эксперимент (опыт, испытание) будем прописной буквой латинского алфавита E.

Под случайным событием будем понимать любой факт, который в результате проведения эксперимента может произойти или же не произойти. Обозначают события, как правило, прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, ….

Пример 1.4 E: извлечение наудачу одной карты из колоды карт. A = {будет извлечена карта пиковой масти}, B = {будет извлечён туз}.

Пример 1.5 E: определение времени безотказной работы мобильного телефона. A = {мобильный телефон проработает безотказно в течение гарантийного срока}, B = {мобильный телефон проработает безотказно в течение года}.

Итак, в результате проведения эксперимента некоторое событие может произойти или не произойти. Однако при любом исследовании необходимо знать, какие вообще возможны исходы в результате проведения испытания. Как правило, определить эти исходы не слишком сложно. Например, при подбрасывании монеты возможных исхода только два: выпадет герб, выпадет решка. При подбрасывании игральной кости возможных исходов уже шесть: выпадет одно очко, выпадет два очка и т.д. Впрочем, можно утверждать, что исхода только два: выпадет чётное число очков, выпадет нечётное число очков.

Элементарным исходом ω называется любой мысленно возможный исход эксперимента.

Исход эксперимента, который нельзя разбить хотя бы на два более простых, называется **неразложимым**. Так, при подбрасывании игральной кости, неразложимым, например, является исход «выпадет одно очко». Исход «выпадет чётное число очков» можно разложить на три более простых исхода: выпадет два очка, выпадет четыре очка, выпадет шесть очков, следовательно, неразложимым данный исход не является.

Пространством элементарных исходов эксперимента называют множество Ω всех возможных взаимоисключающих элементарных исходов ω эксперимента. Как правило, к элементам Ω предъявляют также требование «неразложимости», однако следует отметить, что это требование не является обязательным.

Пример 1.6 E: подбрасывание монеты.

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, где ω_1 = {выпадет герб}, ω_2 = {выпадет решка}.

Обычно это записывают короче: Ω = {г, р}. Эти обозначения мы будем использовать и в дальнейшем.

Пример 1.7 E: подбрасывание игральной кости.

В качестве пространства элементарных исходов можно рассмотреть множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, где ω_i = {выпадет i очков}, $i = \overline{1, 6}$ (в дальнейшем будем обозначать такое пространство элементарных исходов Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}). Ω не является единственно возможным пространством элементарных исходов.

Можно рассмотреть Ω_2 = {(выпадет чётное число очков), (выпадет нечётное число очков)} или множество Ω_3 = {(выпадет чётное число очков), 1, 3, 5}.

А вот множество Ω_4 = {(выпадет чётное число очков), 1, (выпадет нечётное число очков)} пространством элементарных исходов не является, поскольку второй и третий исходы не являются взаимоисключающими.

Выбор пространства элементарных исходов производят в зависимости от того, какие именно случайные события хотят исследовать и какие методы при этом использовать.

Пример 1.8 E: подбрасывание двух монет.

Ω = {(г, г), (г, р), (р, г), (р, р)}.

Пример 1.9 E: подбрасывание двух игральных костей, окрашенных в красный и синий цвета соответственно.

В качестве элементарного исхода рассмотрим $\omega = (i, j)$, где i – число очков, выпавших на красной кости, j – число очков, выпавших на синей кости, $i, j = \overline{1, 6}$.

Отметим, что различный цвет костей, разумеется, на итоговый результат не влияет. Он выбран для того, чтобы подчеркнуть тот факт, что исходы, например, (5, 6) и (6, 5) являются различными.

Пространство элементарных исходов будет выглядеть следующим образом:

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6), \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6), \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6) \end{Bmatrix}.$$

Как видим, количество всех возможных элементарных исходов равно 36. Такое пространство элементарных исходов можно записать в более компактном виде: $\Omega = \{\omega = (i, j) : i, j = \overline{1, 6}\}$.

Пример 1.10 *E*: стрельба по мишени до первого попадания. В качестве элементарного исхода можно рассмотреть $\omega = i$ – количество произведённых выстрелов. Очевидно, что минимальное количество выстрелов равно одному (стрелок с первого выстрела попал по мишени), максимальное же число выстрелов не ограничено. В данном случае $\Omega = \{\omega = i : i = 1, 2, ...\}$.

Пример 1.11 *E*: на отрезке $[a; b]$ случайным образом выбирается точка. $\Omega = \{\omega = x : a \le x \le b\}$, где x – координата точки.

Отметим, что пространства элементарных исходов, рассматриваемые в примерах 1.6–1.9, содержат конечное число элементов, а пространства элементарных исходов, определённые в примерах 1.10 и 1.11, содержат бесконечное количество элементов. При этом в примере 1.10 пространство элементарных исходов является счётным (напомним, что множество называется счётным, если можно установить взаимнооднозначное соответствие между этим множеством и множеством натуральных чисел, т.е. множество является счётным, если его элементы можно занумеровать), а в примере 1.11 – несчётным.

Пространство элементарных исходов, которое содержит конечное или счётное число элементов, называется **дискретным**. Пространство элементарных исходов, которое содержит несчётное количество элементов, называется **непрерывным**. Таким образом, в примерах 1.6–1.10 пространство элементарных исходов является дискретным, а в примере 1.11 – непрерывным.

После того, как пространство элементарных исходов нами определено, можно дать строгое определение понятия «событие».

Случайным событием (событием) называется любое подмножество *A* пространства элементарных исходов Ω. Элементарные исходы, принадлежащие множеству *A*, называются **элементарными исходами, благоприятствующими наступлению события *A***. Если в результате проведения эксперимента наступил элементарный исход, благоприятствующий наступлению события *A*, то говорят, что **событие *A* наступило (произошло, осуществилось)**.

Пространство Ω является подмножеством самого себя, следовательно, оно тоже будет являться событием. Такое событие называют **достоверным**, оно обязательно наступит в результате проведения эксперимента, поскольку ему благоприятствует любой из элементарных исходов. Достоверное событие, так же как и пространство элементарных исходов, обозначают Ω. Аналогично, пустое множество (множество, не содержащее ни одного элемента) также является подмножеством пространства элементарных исходов и, следовательно, является событием. Такое событие называют **невозможным** и обозначают Ø, оно никогда не наступит в результате проведения эксперимента, т.к. ему не благоприятствует ни один элементарный исход.

Пример 1.12 *E*: подбрасывание игральной кости. Пространство элементарных исходов данного эксперимента $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Рассмотрим следующие события:

A = {выпадет чётное число очков},

B = {выпадет число очков, кратное 3},

C = {выпадет число очков больше 2},

D = {выпадет 10 очков},

F = {число выпавших очков будет меньше 7}.

Выпишем элементарные исходы, благоприятствующие указанным событиям:

$A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 6\}$, $C = \{3, 4, 5, 6\}$.

Событие D является невозможным событием (наступлению этого события не благоприятствует ни один из элементарных исходов), а событие F – достоверным (его наступлению благоприятствуют все элементарные исходы).

Таким образом,

$D = \varnothing$, $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$.

Вопросы для самоконтроля

1 Что понимают под вероятностным экспериментом? Приведите примеры.

2 Что называют элементарным исходом эксперимента?

3 Эксперимент заключается в определении сигнала светофора в некоторый момент времени t_0. Постройте пространство элементарных исходов. Какое число элементарных исходов оно содержит?

4 Какое пространство элементарных исходов называется дискретным? непрерывным?

5 Что называют случайным событием? Приведите примеры.

6 E: подбрасывают две различные игральные кости, A = {сумма выпавших очков равна 10}. Назовите элементарные исходы, благоприятствующие наступлению события A.

7 Какое событие называют достоверным? невозможным?

1.2 Операции над событиями

Рассмотрим некоторый эксперимент E с пространством элементарных исходов Ω. Поскольку события, которые могут произойти в результате проведения данного эксперимента, по определению являются подмножествами Ω, операции над событиями вводятся точно таким же образом, как и операции над множествами.

Суммой событий *A* и *B* называется событие $A \cup B$, которое состоит из всех элементарных исходов, благоприятствующих наступлению хотя бы одного из событий A или B. Иными словами, событие $A \cup B$ наступит тогда и только тогда, когда наступит или событие A, или событие B, или события A и B вместе. Сумму событий A и B также обозначают $A + B$.

Определим понятие суммы для любого конечного (счётного) числа событий.

Суммой конечного (счётного) числа событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($A_1, A_2, \ldots$) называется событие $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ ($A_1 \cup A_2 \cup \ldots$), которое состоит из всех элементарных исходов, благоприятствующих наступлению хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($A_1, A_2, \ldots$). Обычно сумму конечного или счётного числа событий обозначают соответственно $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ и $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Произведением событий *A* и *B* называется событие $A \cap B$, которое состоит из всех элементарных исходов, благоприятствующих наступлению событий A и B. Иными словами, событие $A \cap B$ наступает тогда и только тогда, когда в результате проведения эксперимента наступает и событие A, и событие B. Произведение событий A и B также обозначают AB.

Аналогично операции суммирования вводится и операция умножения для любого конечного или счётного множества событий. **Произведением конечного (счётного) числа событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($A_1, A_2, \ldots$)** называется событие $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ ($A_1 \cap A_2 \cap \ldots$), которое состоит из элементарных исходов, благоприятствующих наступлению всех событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($A_1, A_2, \ldots$). Обычно произведение конечного или счётного числа событий обозначают соответственно $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ и $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

Разностью событий *A* и *B* называется событие $A \setminus B$, которое состоит из всех элементарных исходов, благоприятствующих наступлению события A, но не благоприятствующих наступлению события B. Иными словами, событие $A \setminus B$ наступает тогда и только тогда, когда наступает событие A, а событие B при этом не наступает. Разность событий A и B также обозначают $A - B$.

Событие $\overline{A} = \Omega \setminus A$ называется **противоположным** к событию A. Событие $\overline{A}$ происходит тогда и только тогда, когда событие A не происходит, и наоборот: событие A происходит тогда и только тогда, когда событие $\overline{A}$ не происходит. Противоположные события являются взаимоисключающими: одно и только одно из них может наступить в результате проведения эксперимента.

Пример 1.13 E: определение времени твердения бетона. $\Omega = \{\omega = t : t \in [0; +\infty)\}$. Определим событие A = {бетон затвердеет за время, не превосходящее T}. $A = \{\omega = t : t \in [0; T]\}$. Тогда противоположным событием к событию A будет являться событие $\overline{A}$ = {бетон затвердеет за время, большее T}. $\overline{A} = \{\omega = t : t \in (T; +\infty)\}$.

Пример 1.14 Существенный вклад в развитие современной теории вероятностей внесли советские математики. Известные учёные А.Я. Хинчин и Б.В. Гнеденко некоторую часть своих трудов по теории вероятностей публиковали без соавторов, а некоторую – в соавторстве. Рассмотрим эксперимент E: наугад выбирается научная публикация, посвящённая теории вероятностей. В качестве пространства элементарных исходов рассмотрим множество всех публикаций по теории вероятностей $\Omega = \{\omega_i : i = \overline{1, n}\}$. Определим событие A = {автором публикации будет являться А.Я. Хинчин}, а также событие B = {автором публикации будет являться Б.В. Гнеденко}.

$A \cup B$ = {будет выбрана научная публикации по теории вероятностей, одним из авторов которой является либо А.Я. Хинчин, либо Б.В. Гнеденко, либо они оба};

$A \cap B$ = {будет выбрана научная публикация по теории вероятностей, написанная А.Я. Хинчиным и Б.В. Гнеденко в соавторстве};

$A \setminus B$ = {будет выбрана научная публикация по теории вероятностей, написанная А.Я. Хинчиным без участия Б.В. Гнеденко (без соавторов либо совместно с другими авторами)};

$B \setminus A$ = {будет выбрана научная публикация по теории вероятностей, написанная Б.В. Гнеденко без участия А.Я. Хинчина};

$\overline{A}$ = {будет выбрана научная публикация по теории вероятностей, автором которой не является А.Я. Хинчин};

$\overline{B}$ = {будет выбрана научная публикация по теории вероятностей, автором которой не является Б.В. Гнеденко}.

Хинчин Александр Яковлевич (1894–1959) – советский математик, один из наиболее значимых людей в советской школе теории вероятностей. Заведовал кафедрой математического анализа мехмата МГУ до 1957 года. Член-корреспондент АН СССР (1939). Действительный член Академии педагогических наук, один из ее основателей (1943).

Гнеденко Борис Владимирович (1912–1995) – советский математик, специалист по теории вероятностей, математической статистике, вероятностным и статистическим методам, член-корреспондент (1945) и академик (1948) АН УССР.

Говорят, что **событие *A* влечёт событие *B***, если все элементарные исходы, благоприятствующие наступлению события A, в то же время благоприятствуют и наступлению события B, т.е. если наступает событие A, то обязательно наступает и событие B. На языке множеств это означает, что A является подмножеством B ($A \subseteq B$). Отметим, что поскольку любое событие является подмножеством пространства элементарных исходов Ω, то можно сказать, что любое событие влечёт за собой Ω.

Пример 1.15 E: случайным образом выбирается билет лотереи «Суперлото». Определим события

A = {билет выиграет в первом туре},

B = {билет выиграет во втором туре},

C = {билет выиграет в третьем туре},

D = {билет окажется выигрышным}.

Каждое из событий A, B и C влечёт событие D.

События A и B называются **несовместными**, если они не могут произойти в результате проведения одного и того же эксперимента, т.е. наступление одного из них полностью исключает возможность наступления другого. Другими словами, события A и B называются **несовместными**, если

$$A \cap B = \varnothing.$$

Напротив, события, которые могут наступить одновременно в результате проведения одного и того же эксперимента, называются **совместными (**$A \cap B \neq \varnothing$**)**. Заметим, что утверждение «события A и B совместны» вовсе не означает, что наступление события A равносильно наступлению события B. Оно указывает лишь на тот факт, что *некоторые* элементарные исходы, благоприятные наступлению события A, благоприятствуют также и наступлению события B. И наоборот.

Пример 1.16 E: подбрасывание трёх монет. Пространство элементарных исходов будет содержать восемь элементов:

$$\Omega = \{(ггг), (ггр), (грг), (ргг), (грр), (ргр), (ррг), (ррр)\}.$$

Рассмотрим три события:

A = {выпадет хотя бы один герб},

B = {выпадет хотя бы одна решка},

C = {на всех монетах выпадет герб}.

Выпишем исходы, благоприятствующие наступлению этих событий:

A = {(ггг), (ггр), (грг), (ргг), (грр), (ргр), (ррг)},

B = {(ггр), (грг), (ргг), (грр), (ргр), (ррг), (ррр)}, C = {(ггг)}.

Совместными являются события A и B, так как

$$A \cap B = \{(ггр), (грг), (ргг), (грр), (ргр), (ррг)\} \neq \varnothing,$$

а также события A и C, так как

$$A \cap C = \{(\text{ггг})\} \neq \varnothing.$$

События B и C являются несовместными, так как

$$B \cap C = \varnothing.$$

Пример 1.17 E: подбрасывание игральной кости. Пространство элементарных исходов $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Рассмотрим следующие события:

A = {выпадет 2 очка},

B = {выпадет 4 очка или 6 очков},

C = {выпадет чётное число очков},

D = {число выпавших очков будет не менее 3},

F = {число выпавших очков будет не более 3},

G = {выпадет нечётное число очков},

I = {выпадет 3 очка}.

Выпишите элементарные исходы, благоприятствующие этим событиям. В чём состоят события $A \cup B$, $C \setminus B$, $F \cap G$, $\overline{C}$? Являются ли события C и D совместными?

Решение. $A = \{2\}$, $B = \{4, 6\}$, $C = \{2, 4, 6\}$, $D = \{3, 4, 5, 6\}$, $F = \{1, 2, 3\}$, $G = \{1, 3, 5\}$, $I = \{3\}$.

$A \cup B = \{2\} \cup \{4, 6\} = \{2, 4, 6\} = C$.

$C \setminus B = \{2, 4, 6\} \setminus \{4, 6\} = \{2\} = A$.

$F \cap G = \{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 5\} = \{3\} = I$.

$\overline{C} = \Omega \setminus C = \{1, 3, 5\} = G$.

$C \cap D = \{2, 4, 6\} \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{4, 6\} \neq \varnothing \Rightarrow$ события C и D являются совместными.

Укажем некоторые свойства, которыми обладают операции над событиями.

1° (переместительное) $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.

2° (распределительное) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

3° (сочетательное) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

4° $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

5° $A \cup A = A$; $A \cap A = A$.

6° $A \cup \Omega = \Omega$; $A \cap \Omega = A$.

7° $A \cup \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$.

8° $A \cup \overline{A} = \Omega$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

9° $\overline{\Omega} = \varnothing$; $\overline{\varnothing} = \Omega$; $\overline{\overline{A}} = A$.

10° $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

11° (законы де Моргана) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Для более наглядной демонстрации операций над множествами хорошо подходят круги Эйлера, а также частный случай кругов Эйлера – диаграммы Эйлера-Венна.

Случай двух множеств изображён на рисунке 1.1, трёх – на рисунке 1.2.

Первым идею изображения множеств с помощью кругов использовал немецкий математик и философ **Готфрид Вильгельм Лейбниц** (1646–1716). **Леонард Эйлер** (1707–1783) развил эту идею и применил её для решения целого ряда задач. Методом кругов Эйлера пользовались многие математики, но особенного расцвета графические методы достигли в сочинениях английского логика **Джона Венна** (1843–1923), подробно изложившего их в книге «Символическая логика», (Лондон, 1881). Поэтому такие схемы часто называют диаграммами Эйлера-Венна.

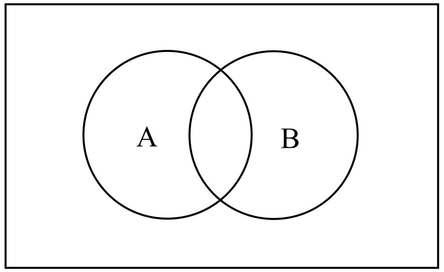


Рисунок 1.1 – Диаграмма Эйлера-Венна для случая двух множеств

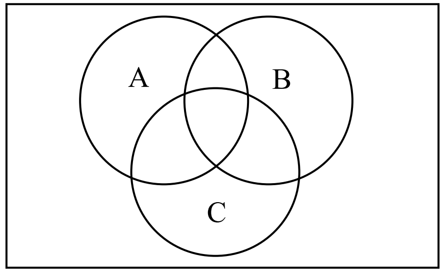


Рисунок 1.2 – Диаграмма Эйлера-Венна для случая трех множеств

Рассмотрим вероятностную интерпретацию диаграмм Эйлера-Венна. Пусть эксперимент E заключается в следующем: из прямоугольной области случайным образом выбирается точка. Пространством элементарных исходов Ω данного эксперимента является рассматриваемый прямоугольник. Определим события A = {выбранная точка принадлежит кругу A}, B = {выбранная точка принадлежит кругу B}, C = {выбранная точка принадлежит кругу C}.

На рисунке 1.3 заштрихована область, содержащая исходы, которые благоприятствуют наступлению события $A \cup B$. По определению операции сложения, этой области принадлежат все элементарные исходы, благоприятствующие наступлению события A, а также все элементарные исходы, благоприятствующие наступлению события B. Область, содержащая исходы, которые благоприятствуют наступлению события $A \cap B$, заштрихована на рисунке 1.4.

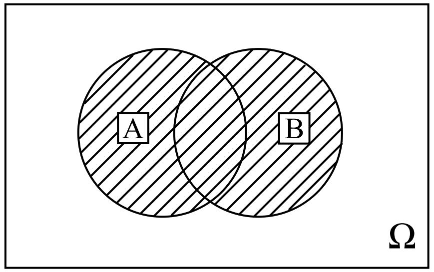


Рисунок 1.3 – $A \cup B$

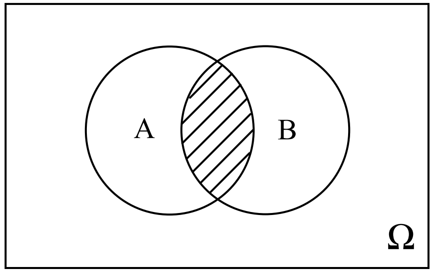


Рисунок 1.4 – $A \cap B$

На рисунке 1.5 заштрихована область, содержащая исходы, которые благоприятствуют событию $A \setminus B$. По определению, этой области принадлежат все элементарные исходы, благоприятствующие наступлению события A, но не благоприятствующие наступлению события B.

На рисунке 1.6 заштрихована область, содержащая исходы, которые благоприятствуют наступлению события $B \setminus A$.

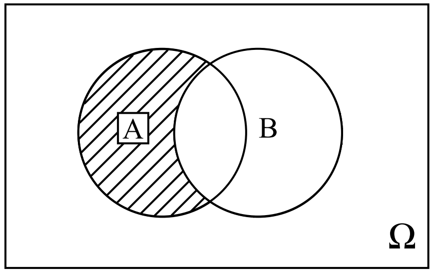


Рисунок 1.5 – $A \setminus B$

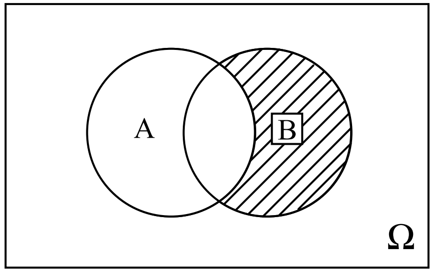


Рисунок 1.6 – $B \setminus A$

На рисунке 1.7 заштрихована область, содержащая исходы, которые благоприятствуют наступлению события $\overline{A}$.

Пусть событие A влечёт за собой событие B (рисунок 1.8). По определению, все элементарные исходы, благоприятствующие наступлению события A, являются благоприятствующими наступлению события B. Однако существуют такие элементарные исходы, которые благоприятны наступлению события B, но не благоприятны наступлению события A.

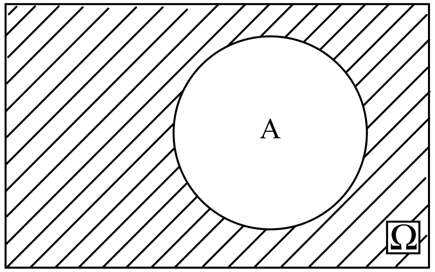


Рисунок 1.7 – $\overline{A}$

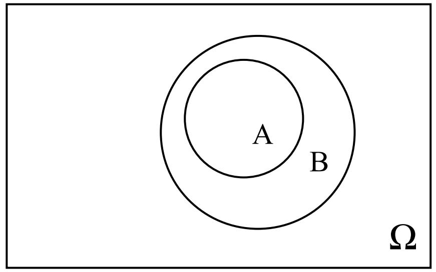


Рисунок 1.8 – $A \subseteq B$

Изобразим области, которые содержат исходы, благоприятствующие наступлению следующих событий:

а) $\overline{A} \cap (B \cup C)$ (рисунок 1.9);

б) $(A \cap B) \setminus C$ (рисунок 1.10);

в) $\overline{A \cup (B \cap C)}$ (рисунок 1.11);

г) $\overline{A} \cap B \cap C$ (рисунок 1.12).

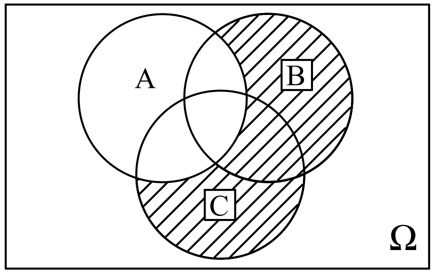


Рисунок 1.9 – $\overline{A} \cap (B \cup C)$

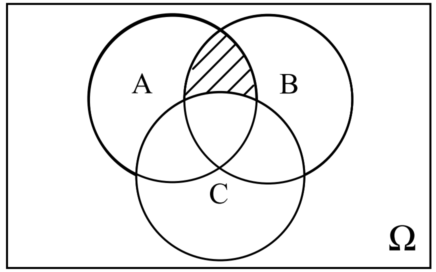


Рисунок 1.10 – $(A \cap B) \setminus C$

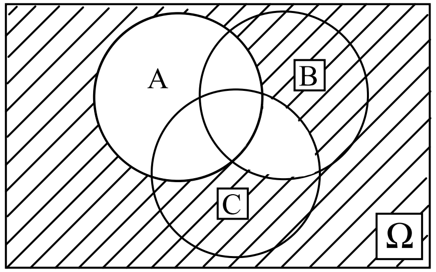


Рисунок 1.11 – $\overline{A \cup (B \cap C)}$

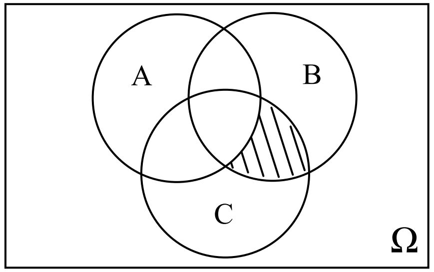


Рисунок 1.12 – $\overline{A} \cap B \cap C$

Говорят, что конечный (счётный) набор событий H_1, H_2, …, H_n (H_1, H_2, …) образует **полную группу**, если они попарно несовместны (т.е. $H_i \cap H_j = \varnothing$, $\forall\, i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots$), а их сумма есть достоверное событие $\left(\bigcup\limits_i H_i = \Omega \right)$.

Пример 1.18 *E:* подбрасывание монеты. Ω = {г, р}.

Определим события

H_1 = {выпадет герб} = {г},

H_2 = {выпадет решка} = {р}.

События H_1 и H_2 образуют полную группу. Действительно, оба эти события не могут произойти в результате проведения одного эксперимента, $H_1 \cap H_2 = \varnothing$. С другой стороны, $H_1 \cup H_2 = \Omega$, поскольку Ω содержит только два элементарных исхода: «выпадет герб» и «выпадет решка».

Иными словами, события образуют полную группу, если в результате проведения эксперимента наступит одно и только одно из них. События, образующие полную группу, часто называют **гипотезами**.

События A и $\overline{A}$ образуют полную группу.

Вопросы для самоконтроля

1 Что называют суммой двух событий? суммой трех событий?

2 В каком случае наступает событие $A \cap B$?

3 Могут ли в результате проведения одного и того же эксперимента произойти события $A \setminus B$ и B? $A \setminus B$ и A? $A \setminus B$ и $\overline{A}$?

4 Какие события называются несовместными? Являются ли несовместными противоположные события? Приведите примеры несовместных событий.

5 Докажите тождество $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ при помощи диаграмм Эйлера-Венна.

6 Какие события образуют полную группу? Образуют ли полную группу несовместные события? Образуют ли полную группу противоположные события?

1.3 Элементы комбинаторики

Комбинаторика – раздел математики, который изучает задачи выбора элементов из некоторого множества и расположения этих элементов в группы по заданным правилам. Как будет показано ниже, для описания эксперимента с конечным пространством элементарных исходов необходимо уметь решать задачи о подсчёте числа комбинаций выбора элементов из заданного множества. При помощи комбинаторики задачи такого плана решаются достаточно просто.

Сформулируем **основное правило комбинаторики**.

Пусть множество A содержит m элементов a_1, a_2, …, a_m, а множество B – n элементов b_1, b_2, …, b_n. Тогда можно составить ровно $m \cdot n$ упорядоченных пар вида (a_i, b_j), $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, содержащих по одному элементу из каждого множества.

Пример 1.19 У некоторого молодого человека в гардеробе содержится 7 рубашек и 5 галстуков. Сколькими способами он может выбрать рубашку и галстук для похода в театр? Ответ на этот вопрос легко дать, используя основное правило комбинаторики: первое множество (множество рубашек) содержит 7 объектов, второе множество (множество галстуков) содержит 5 объектов. Согласно правилу, общее количество комбинаций равно $7 \cdot 5 = 35$.

Пример 1.20 В соревнованиях по футболу принимают участие 16 команд. Они разыгрывают три комплекта наград: золотые, серебряные и бронзовые. Сколькими способами команды могут расположиться на пьедестале?

Следует учитывать, что если команда заняла первое место, то она не может в этом же сезоне оказаться на втором. Поэтому, выбрав победителя из шестнадцати команд, серебряного призёра мы выбираем уже из пятнадцати, а бронзового – из четырнадцати. Таким образом, количество всех возможных комбинаций будет равно $16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360$.

Основное правило комбинаторики распространяется на случай трёх и более множеств.

Пусть имеется конечное множество различных элементов $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, из которого последовательно выбирается k элементов. Запишем их в порядке появления $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\}$ и будем называть **выборкой объёма *k* из *n* элементов**.

В зависимости от постановки задачи такой выбор может осуществляться двумя различными способами. При первом способе выбранный элемент не возвращают обратно, т.е. в процессе дальнейшего выбора он не участвует. При таком способе полученная выборка называется **выборкой без возвращения**. Очевидно, что в этом случае выборка не будет содержать одинаковых элементов. При втором способе факт выбора элемента фиксируется, а сам элемент возвращается в множество и участвует в дальнейшем выборе. Полученная выборка называется **выборкой с возвращением**. В этом случае выборка может содержать одинаковые элементы (хотя это и не обязательно). Поясним отличие этих способов друг от друга на примере.

Пример 1.21 Для определения победителя в лотерее «Ваше лото» из множества, содержащего 90 занумерованных шаров, случайным образом последовательно извлекаются 85 шаров, которые обратно не возвращаются. Это выборка без возвращения объёма 85 из 90 элементов. Примером выборки с возвращением является кодовый шифр ячейки автоматической камеры хранения. На дверце ячейки имеются четыре диска, содержащие цифры от 0 до 9. Поворачивая диски, абонент набирает код, цифры в котором, вообще говоря, могут повторяться. Таким образом, при наборе очередной цифры кода пользователь выбирает её из первоначального множества, вне зависимости от того, какие цифры уже были использованы. Полученная в результате выборка будет являться выборкой с возвращением объёма 4 из 10 элементов.

Выборка объема k из n элементов называется **упорядоченной**, если она считается отличной от выборки с таким же составом элементов, расположенных, однако, в другом порядке. Если же такие выборки отождествляются, то они называются **неупорядоченными**.

Пример 1.22 Если для участия в игре «Брейн-ринг» из студентов факультета ПГС отбирается шесть человек, то порядок их выбора значения не имеет – все они будут членами одной команды. Команды, состоящие из одних и тех же студентов, но выбранных в различном порядке, отождествляются. Таким образом, в данном случае речь идет о неупорядоченной выборке. А вот в номере телефона, в номерном знаке автомобиля, в пароле, открывающем доступ к профилю пользователя, и т.п. порядок следования элементов (цифр, символов, …) играет существенную роль – ведь телефонные номера 755-55-55 и 557-55-55 различны, хоть и состоят из одних и тех же цифр. Следовательно, эти выборки будут являться упорядоченными.

Таким образом, возможны четыре типа выборок объёма k из n элементов: упорядоченная с возвращением, упорядоченная без возвращения, неупорядоченная с возвращением, неупорядоченная без возвращения. Приведём формулы для определения количества всех возможных выборок для каждого из четырёх типов.

Начнём с упорядоченной выборки с возвращением. Число таких выборок объема k из n элементов обозначают через $\overline{A}_n^k$. Из основного правила комбинаторики следует, что число упорядоченных выборок с возвращением объёма k из n элементов равно произведению k сомножителей, каждый из которых равен n:

$$\overline{A}_n^k = n^k. \tag{1.1}$$

Пример 1.23 Сколько различных символов можно зашифровать при помощи азбуки Морзе, если разрешается использовать только те комбинации из точек и тире, которые включают в себя ровно четыре элемента?

Решение. Ответить на поставленный вопрос достаточно просто, если заметить, что речь идёт об упорядоченных выборках с возвращением. Множество, из которого производится выбор, состоит из двух элементов ($n = 2$), объём каждой выборки равен четырём ($k = 4$). По формуле (1.1) искомая величина равна $\overline{A}_2^4 = 2^4 = 16$.

Пусть n – натуральное число. Произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно называют **факториалом числа *n*** и обозначают n! Для удобства записи факториал нуля считают равным единице:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n, \; 0! = 1.$$

Пример 1.24 Факториал семи равен $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$.

Число упорядоченных выборок без возвращения объёма k из n элементов $(0 \le k \le n)$ обозначают A_n^k. Для того чтобы определить, чему равно A_n^k, будем рассуждать следующим образом. Поскольку множество содержит n элементов, то на первое место в выборке мы можем поместить n различных элементов. После того как первое место заполнено, на второе место остаётся $n-1$ кандидат, на третье остаётся $n-2$ кандидата и т.д. На последнее, k-е место выборки будут «претендовать» $n-k+1$ элемент. Применяя основное правило комбинаторики, получим

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1).$$

Как правило, эту формулу записывают в виде

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (1.2)$$

Упорядоченную выборку без возвращения объема n из n элементов называют **перестановкой** n элементов. Число всех возможных перестановок n элементов обозначают P_n.

По формуле (1.2) получаем

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n! \qquad (1.3)$$

Пример 1.25 Семеро друзей каждое воскресенье обедали в одном и том же ресторане. Хозяин ресторана, желая привлечь постоянных посетителей, сделал им следующее предложение. Каждый раз друзья должны рассаживаться по-разному, и, как только все варианты размещения будут испробованы, все обеды будут оплачиваться за счёт заведения. Через какое время друзья смогут воспользоваться щедрым предложением хозяина?

Решение. На самом деле хозяин ничем не рискует. Согласно формуле (1.3) число различных перестановок из семи элементов равно

факториалу семи. В примере 1.24 вычислено, что $7! = 5040$. Учитывая, что в году 52 недели, друзья смогут разместиться всеми возможными способами, посещая ресторан на протяжении почти 97 лет.

Число неупорядоченных выборок без возвращения объёма k из n элементов $(0 \le k \le n)$ обозначают C_n^k и вычисляют по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (1.4)$$

Впервые формулу для определения числа неупорядоченных выборок без возвращения получил известный средневековый еврейский учёный-универсал, философ, математик, астроном **Леви Бен Гершом**, более известный под именем Герсонид или Ралбаг (1288–1344). В честь Леви бен Гершома назван кратер «Рабби Леви» на Луне. К сожалению, его работа, содержащая формулу для числа неупорядоченных выборок без возвращения, была написана на малодоступном большинству учёных древнееврейском языке и поэтому осталась почти незамеченной. В начале XVII века формулу вновь вывел французский математик Пьер Эригон.

Пример 1.26 Сколькими способами можно выбрать три цветка из вазы, в которой находится 7 цветков?

Решение. В данном примере речь идёт о неупорядоченных выборках без возвращения (выбранный один раз цветок обратно в вазу уже не возвращают). Объём выборки равен трём ($k = 3$); множество, из которого производится выбор, содержит семь элементов ($n = 7$). По формуле (1.4) имеем

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!\,4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{6} = 35.$$

Число неупорядоченных выборок с возвращением объёма k из n элементов обозначают $\overline{C}_n^k$. Для определения $\overline{C}_n^k$ пользуются формулой

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}. \qquad (1.5)$$

Пример 1.27 Сколькими способами можно составить букет из пяти цветов, если в наличии есть цветы трех сортов?

Решение. Здесь мы имеем дело с неупорядоченными выборками (порядок извлечения цветов неважен) с возвращением (из условия задачи следует, что букет будет содержать как минимум два цветка одного сорта). Объём выборки равен пяти ($k = 5$); множество, из которого производится выбор, содержит три элемента (n = 3). По формуле (1.5) имеем

$$\overline{C}_3^5 = \frac{7!}{5!(3-1)!} = \frac{7!}{5!\,2!} = \frac{6\cdot 7}{2} = 21.$$

Приведём некоторые свойства числа неупорядоченных выборок без возвращения:

1° $C_n^0 = C_n^n = 1$.

2° $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.

3° $C_n^k = C_n^{n-k}$.

4° $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

Свойство 4° позволяет последовательно вычислять значения C_n^k. Делается это следующим образом. В первой строке записывается значение $C_0^0 = 1$. Во второй строке записываются значения $C_1^0 = 1$ и $C_1^1 = 1$ таким образом, чтобы значение C_0^0 оказалось ровно посередине между этими двумя числами. В третьей строке по краям запишем числа C_2^0 и C_2^2 (согласно свойству 1° оба значения равны единице). Между ними нужно записать значение C_2^1. Согласно свойству 4° $C_2^1 = C_1^0 + C_1^1$. Заметим, что именно значения C_1^0 и C_1^1 находятся в предыдущей строке слева и справа от C_2^1. Таким образом, $C_2^1 = 1 + 1 = 2$. Строка под номером n заполняются по тому же принципу: по краям записываются значения $C_n^0 = C_n^n = 1$, а все промежуточные значения равны сумме чисел, записанных в строке n – 1 слева и справа от вычисляемого значения. В конечном итоге получим числовой треугольник (рисунок 1.13), который называют **треугольником Паскаля** (сам Паскаль называл такой треугольник «арифметическим»).

Блез Паскаль (1623–1662) – французский математик, физик, литератор и философ. Описание и свойства арифметического треугольника он поместил в свой «Трактат об арифметическом треугольнике» (более точный перевод названия трактата – «Трактат об арифметическом треугольнике, включающий ещё несколько других небольших трактатов на ту же тему»), написанный в 1654 году. Издан трактат был только в 1665 году, уже после смерти учёного.

$$\begin{array}{l|ccccccccc|ccccccccc}
n=0 & & & & & 1 & & & & & & & & & C_0^0 & & & & \\
n=1 & & & & 1 & & 1 & & & & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\
n=2 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
n=3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\
n=4 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4
\end{array}$$

Рисунок 1.13 – Треугольник Паскаля

Представим уже известные нам формулы (1.1), (1.2), (1.4), (1.5) в виде таблицы 1.1.

Т а б л и ц а 1.1 – **Подсчёт количества выборок объёма *k* из *n* элементов**

Выборки	Упорядоченные	Неупорядоченные
С возвращением	$\overline{A}_n^k = n^k$	$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$
Без возвращения	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Пример 1.28 Укажем все возможные выборки объема 2 из множества {1, 2, 3}. Представим их в виде таблицы 1.2.

Т а б л и ц а 1.2 – **Выборки объёма 2 из множества {1, 2, 3}**

Выборки	Упорядоченные	Неупорядоченные
С возвращением	(1, 1), (1, 2), (1, 3) (2, 1), (2, 2), (2, 3) (3, 1), (3, 2), (3, 3)	(1, 1), (1, 2), (1, 3) (2, 2), (2, 3) (3, 3)
Без возвращения	(1, 2), (1, 3) (2, 1), (2, 3) (3, 1), (3, 2)	(1, 2), (1, 3) (2, 3)

Отметим также, что числа C_n^k являются коэффициентами в разложении

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^n a^0 b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k. \quad (1.6)$$

Формулу (1.6) называют **биномом Ньютона**, а C_n^k называют **биномиальными коэффициентами**.

Если в формуле (1.6) положить $a = 1$, $b = 1$, то получим еще одно свойство биномиальных коэффициентов:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Вопросы для самоконтроля

1 Что изучает комбинаторика?

2 Сформулируйте основное правило комбинаторики.

3 Какой способ выбора элементов называется выбором без возвращения? Какой способ выбора элементов называется выбором с возвращением?

4 Какая выборка называется неупорядоченной?

5 Сравните 20! и 20^{19}.

6 Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, если:

а) цифры могут повторяться;

б) цифры не могут повторяться?

1.4 Вероятность. Методы определения вероятности

До сих пор, говоря о событиях, мы лишь указывали на тот факт, что каждое из них может наступить, а может и не наступить в результате проведения эксперимента. До проведения эксперимента известно, что достоверное событие обязательно произойдёт, а невозможное событие – не произойдёт. Относительно остальных событий мы не можем однозначно сказать, произойдут они или нет. Однако интуитивно понятно, что одни события наступают чаще, а другие – реже. Если из полной колоды карт будет наугад извлекаться одна карта, то событие A = {извлечённая карта окажется пиковой масти} будет наступать чаще, чем событие B = {извлечённая карта окажется трефовым тузом}. Таким образом, можно выделить «чаще наступающие» и «реже наступающие» события. Как же оценить частоту наступления событий? Вероятность и есть мера частоты появления события. Точное определение этого понятия будет дано нами ниже.

1.4.1 Относительная частота события. Свойства относительной частоты

Рассмотрим некоторый случайный эксперимент E и его пространство элементарных исходов Ω. Определим некоторое событие A и проведём N раз эксперимент E, всякий раз отмечая, наступило данное событие или нет. Обозначим через $N(A)$ число тех экспериментов, в которых событие A наступило, и назовём его **частотой события *A***. Число

$$W_N(A) = \frac{N(A)}{N} \quad (1.7)$$

называется **относительной частотой события *A***.

Таким образом, относительная частота события показывает, насколько часто событие происходило *ранее*. Относительная частота не является постоянной величиной, она меняется с изменением числа N. Чтобы это подчеркнуть, в обозначении относительной частоты присутствует индекс N. Однако для достаточно большого класса явлений справедливо, что при увеличении числа N относительная частота стремится к некоторому числу $P(A)$, иными словами, её значения стабилизируются. Это свойство называют **свойством статистической устойчивости.** Подчеркнём, что теория вероятностей изучает только те массовые случайные явления, которые обладают свойством устойчивости относительной частоты.

Пример 1.29 E: подбрасывание монеты. Ж.Бюффон провёл серию из N = 4040 таких экспериментов, фиксируя при этом наступление события A = {появление герба}. Для этой серии испытаний оказалось, что $N(A)$= 2048, т.е. монета упала гербом вверх ровно 2048 раз. Согласно формуле (1.7), относительная частота события A равна 0,5069. При повторении эксперимента 12000 и 24000 раз (эту серию испытаний провёл и описал К.Пирсон) относительная частота оказалась равной 0,5015 и 0,5005 соответственно. Как видим, с ростом числа испытаний относительная частота события A всё меньше и меньше отличается от числа 0,5, которое логично будет принять за вероятность события A.

Жорж-Луи Леклер, граф де Бюффон (1707–1788) – французский натуралист, биолог, математик, естествоиспытатель и писатель. В 1733 г. Был назначен членом академии наук. В 1739 г. был назначен интендантом королевского ботанического сада, с этого времени деятельность Бюффона была посвящена в основном естественным наукам. Считается, что работы Бюффона послужили толчком для развития геометрического метода определения вероятности.

Карл Пирсон (1857–1936) – английский философ-позитивист, статистик. Выступал сторонником евгеники как науки об улучшении человеческой породы. Сделал существенный вклад в распространение методов статистического анализа в области биологии и психологии. Провел объемный математический анализ различных жизненно важных проблем (туберкулез, алкоголизм, задержки психического развития).

Приведём и докажем основные свойства относительной частоты.

1° Относительная частота произвольного события больше либо равна нулю $W_N(A) \geq 0$.

Действительно, согласно формуле (1.7) относительная частота события равна отношению частоты события (неотрицательное число) к количеству экспериментов (положительное число).

2° Относительная частота достоверного события равна единице $W_N(\Omega) = 1$.

Поскольку событие является достоверным, то оно происходит в каждом испытании, т.е. $N(\Omega) = N$:

$$W_N(\Omega) = \frac{N}{N} = 1.$$

3° Относительная частота суммы несовместных событий равна сумме относительных частот этих событий.

Так как события являются несовместными, то в одном эксперименте они произойти не могут. Следовательно, частота суммы событий равна сумме частот каждого из них, т.е. $N(A \cap B) = N(A) + N(B)$. Применив формулу (1.7), получим

$$W_N(A \cup B) = \frac{N(A \cup B)}{N} = \frac{N(A) + N(B)}{N} =$$

$$= \frac{N(A)}{N} + \frac{N(B)}{N} = W_N(A) + W_N(B).$$

Все прочие свойства относительной частоты вытекают из свойств $1^{\circ} - 3^{\circ}$. В этом смысле набор свойств $1^{\circ} - 3^{\circ}$ можно назвать *фундаментальным*.

1.4.2 Аксиоматика теории вероятностей. Свойства вероятности

Длительное время основные понятия теории вероятностей были недостаточно точно определены, что нередко приводило к парадоксальным выводам и вызывало острую критику противников теории вероятностей как математической науки. Проблема аксиоматизации теории вероятностей к началу XX века представлялась настолько актуальной, что была включена Д. Гильбертом в его знаменитый список 23 нерешённых проблем математики (1900), послуживший направляющим указателем приложения усилий математиков (эта задача стала частью формулировки его 6-й проблемы «Математическое изложение основ физики»).

Давид Гильберт (1862–1943) – выдающийся немецкий математик-универсал, внёс значительный вклад в развитие многих разделов математики. В 1910–1920-е годы (после смерти Анри Пуанкаре) был признанным мировым лидером математиков.

Попытки аксиоматизировать теорию вероятностей предпринимали Г. Больман (1908), С.Н. Бернштейн (1917), Р. Мизес (1919 и 1928), а также А. Ломницкий (1923) на базе идей Э. Бореля о связи понятий вероятности и меры. Однако наибольшее развитие получила аксиоматика А.Н. Колмогорова (1929, окончательно – 1933), который под влиянием идей теории множеств, меры, интегрирования, функций смог сформулировать простую систему аксиом. Эта система позволила описать уже существовавшие к тому времени классические разделы теории вероятностей и послужила толчком для развития её новых разделов (например, теории случайных процессов). Аксиоматика Колмогорова является общепринятой в современной теории вероятностей.

Андрей Николаевич Колмогоров (1903–1987) – выдающийся советский математик, доктор физико-математических наук, профессор Московского государственного университета (1931), академик Академии наук СССР (1939). Один из основоположников современной теории вероятностей. Получил фундаментальные результаты в топологии, математической логике, теории турбулентности и ряде других областей математики и её приложений. Многие ученики Колмогорова стали крупными учеными в разных областях науки (М.Д. Миллионщиков, В.И. Арнольд, И.М. Гельфанд, А.С. Монин, С.М. Никольский, А.М. Обухов, Ю.В. Прохоров, А.Н. Ширяев).

Будем говорить, что совокупность F подмножеств множества Ω называется **алгеброй**, если выполнены следующие условия:

1) $\Omega \in F, \varnothing \in F$;

2) если $A \in F$, то $\overline{A} \in F$;

3) если $A \in F$ и $B \in F$, то $A \cup B \in F$ и $A \cap B \in F$.

Если же помимо перечисленных трёх условий выполняется ещё и четвёртое условие:

4) если $A_i \in F, i = 1, 2, \ldots$, то $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in F$, $\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \in F$,

то F называют **σ-алгеброй** (сигма-алгеброй).

Приведём несколько примеров.

Пример 1.30 Совокупность из двух подмножеств $\{\varnothing, \Omega\}$ множества Ω является σ-алгеброй (такая σ-алгебра называется тривиальной).

Пример 1.31 Совокупность, состоящая из всех подмножеств конечного или счётного множества Ω, является σ-алгеброй. Например, если $\Omega = \{1, 2\}$, то $F = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ – σ-алгебра.

Пример 1.32 Совокупность, состоящая из четырёх подмножеств $\{\varnothing, \Omega, A, \overline{A}\}$, где $A \subset \Omega$, является σ-алгеброй (такая σ-алгебра называется σ-алгеброй, порождённой множеством A).

Пример 1.33 Пусть $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Рассмотрим совокупность, содержащую шесть подмножеств множества Ω:

$$F = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}.$$

Такая совокупность не является σ-алгеброй (и даже просто алгеброй), поскольку, например, $\varnothing \notin F$.

Пусть Ω – пространство элементарных исходов некоторого эксперимента E и F – σ-алгебра подмножеств Ω. В дальнейшем в качестве событий будем рассматривать только элементы σ-алгебры F.

Вероятностью называется функция $P(A)$, определённая на всей σ-алгебре событий F, принимающая действительные значения и удовлетворяющая следующим трём аксиомам Колмогорова:

***А*1**. *Аксиома неотрицательности.* Вероятность любого события неотрицательна $P(A) \geq 0$.

***А*2.** *Аксиома нормированности.* Вероятность достоверного события равна единице $P(\Omega) = 1$.

***А*3.** *Аксиома счётной аддитивности.* Если события A_1, A_2, … (счётное число событий) попарно несовместны, то вероятность суммы этих событий равна сумме их вероятностей $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Отметим, что система аксиом Колмогорова непротиворечива, поскольку, как будет показано ниже, существуют реальные объекты, которые всем этим трём аксиомам удовлетворяют.

(Ω, F, P) называется **вероятностным пространством** эксперимента. Вероятностное пространство является *математической моделью* вероятностного эксперимента.

Пример 1.34 E: подбрасывание монеты.

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, где ω_1 = {выпадет герб}, ω_2 = {выпадет решка}.

$F = \{\omega_1, \omega_2, \Omega, \varnothing\}$.

$P = \{ P(\omega_1) = 0{,}5, P(\omega_2) = 0{,}5, P(\Omega) = 1, P(\varnothing) = 0\}$

(Ω, F, P) – вероятностное пространство эксперимента E.

Приведём и докажем некоторые свойства вероятности, являющиеся следствием аксиом Колмогорова:

1° $P(\varnothing) = 0$.

Заметим, что $\Omega = \Omega \cup \varnothing$. Так как события Ω и Ø являются несовместными, то, согласно A3, $P(\Omega) = P(\Omega) + P(\varnothing)$. Применяя A2, получим, что $1 = 1 + P(\varnothing)$. Следовательно, $P(\varnothing) = 0$.

2° Если $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$.

Так как $B = A \cup (B \setminus A)$ и события A и $B \setminus A$ являются несовместными, то, по аксиоме A3, $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$.

Так как $P(B) \geq 0$, $P(A) \geq 0$, $P(B \setminus A) \geq 0$ (аксиома A1), то $P(A) \leq P(B)$.

3° $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

События A и $\overline{A}$ являются несовместными, кроме того, $A \cup \overline{A} = \Omega$. Согласно аксиомам A2 и A3 $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

4° $0 \leq P(A) \leq 1$.

По аксиоме A1 $P(A) \geq 0$. Так как $A \subseteq \Omega$, то, по свойству 2° вероятности, $P(A) \leq 1$. Следовательно, $0 \leq P(A) \leq 1$.

5° Если $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу, то $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$.

Так как события H_i образуют полную группу, то, по определению, они попарно несовместны, и при этом $\bigcup_i H_i = \Omega$. Применив аксиомы $A2$ и $A3$, получим, что $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$.

1.4.3 Конечное пространство элементарных исходов. Классический метод определения вероятности

Пусть производится некоторый эксперимент E, который имеет конечное пространство элементарных исходов $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Множество F, состоящее из всех подмножеств множества Ω, будет являться σ-алгеброй событий.

Поставим теперь каждому элементарному исходу $\omega_i \in \Omega$ в соответствие число $p(\omega_i)$, которое назовем **вероятностью элементарного исхода**, таким образом, чтобы выполнялись условия неотрицательности $p(\omega_i) \geq 0$ и условие нормированности $\sum_{i=1}^{n} p(\omega_i) = 1$.

Вероятность $P(A)$ для любого события A определим следующим образом:

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i). \tag{1.8}$$

Введённая таким образом вероятность удовлетворяет аксиомам Колмогорова $A1$–$A3$. Этот метод называется **конструктивно-аксиоматическим методом определения вероятности.** Он может быть применен и в случае счётного пространства элементарных исходов.

Рассмотрим теперь частный случай. Пусть все исходы $\omega_1, \ldots, \omega_n$ эксперимента равновозможны, т.е. $p(\omega_i) = p(\omega_j)$ для любых i и j. Поскольку, в силу условия нормированности, сумма их вероятностей равна единице, то вероятность каждого из них равна $\frac{1}{n}$. Рассмотрим некоторое событие A, наступлению которого благоприятствуют ров-

но m элементарных исходов. В этом случае формула (1.8) приобретает вид

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{m\ раз} = \frac{m}{n}. \tag{1.9}$$

Таким образом, приходим к так называемому **классическому методу определения вероятности**. Пусть проводится эксперимент с конечным числом равновозможных исходов. **Вероятностью события A** называется отношение числа m элементарных исходов, благоприятствующих наступлению события A, к общему числу элементарных исходов n:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1.10}$$

Первым классическое определение вероятности, хотя и в несовершенной форме, в трактате «Искусство предположений» (вышедшем уже после смерти учёного, в 1713 году) ввёл **Якоб Бернулли** (1654–1705) – швейцарский математик, профессор математики Базельского университета (с 1687 года).

Пример 1.35 E: подбрасывание игральной кости. Какова вероятность того, что выпадет чётное число очков?

Решение. Пространство элементарных исходов содержит шесть элементов: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, т.е. число всех возможных исходов конечно $n = 6$. Рассмотрим событие A = {выпадет чётное число очков}.

Все исходы равновозможны, ни один из исходов не имеет преимущества перед другими. Поскольку все требования классического метода определения вероятности выполняются, можем воспользоваться формулой (1.10). Число элементарных исходов, благоприятствующих наступлению события A, равно трём:

$$A = \{2, 4, 6\},\ m = 3.$$

По формуле (1.10) $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Пример 1.36 E: подбрасывание двух игральных костей: красной и синей. Какова наиболее вероятная сумма выпавших очков?

Решение. Пространство элементарных исходов данного эксперимента уже нами выписывалось в примере 1.9. Оно насчитывает 36 элементов (конечное число), все они равновозможны. Таким образом, мы имеем право использовать классический метод определения вероятности.

Для того, чтобы ответить на поставленный вопрос, необходимо найти вероятности событий A_i = {сумма выпавших очков равна i}, где i = 2, 3, …, 12. Очевидно, что каждый из 36 элементарных исходов соответствует только одному из одиннадцати интересующих нас событий. Занесём эти исходы в соответствующие строки таблицы 1.3 и подсчитаем их количество. Согласно формуле (1.10) искомые вероятности будут равны отношению числа элементарных исходов, благоприятствующих наступлению данного события, к общему числу исходов (очевидно, что для каждого эксперимента оно неизменно и равно 36).

Таблица 1.3 – **Поиск наиболее вероятного события (пример 1.36)**

Сумма очков A_i	Благоприятствующие исходы	Количество благоприятствующих исходов m_i	Вероятность события $P(A_i)$
2	(1, 1)	1	1/36
3	(1, 2), (2, 1)	2	2/36 = 1/18
4	(1, 3), (2, 2), (3, 1)	3	3/36 = 1/12
5	(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)	4	4/36 = 1/9
6	(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)	5	5/36
7	**(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)**	**6**	**6/36 = 1/6**
8	(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)	5	5/36
9	(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)	4	4/36 = 1/9
10	(4, 6), (5, 5), (6, 4)	3	3/36 = 1/12
11	(5, 6), (6, 5)	2	2/36 =1/18
12	(6, 6)	1	1/36

Отметим, что $\sum_{i=2}^{12} P(A_i) = 1$.

Таким образом, наиболее вероятная сумма выпавших очков равна семи. В среднем 7 очков выпадают в одном случае из шести.

Пример 1.37 В коробке находятся 10 лампочек, 4 из которых – энергосберегающие. Какова вероятность того, что из пяти выбранных наугад лампочек энергосберегающими окажутся ровно три.

Решение. E: выбор наудачу 5 лампочек из 10. Занумеруем лампочки числами от 1 до 10, при этом для определенности будем считать, что первые 4 числа будут соответствовать энергосберегающим лампочкам. Таким образом, эксперимент сводится к выбору 5 чисел из 10.

В качестве элементарного исхода рассмотрим $\omega = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ – неупорядоченную выборку без возвращения объёма 5 из множества чисел {1, 2, 3, …, 10}. Тогда пространство элементарных исходов будет иметь вид

$$\Omega = \{\omega_k\}_{k=1}^{n}.$$

Количество всех элементарных исходов

$$n = C_{10}^{5}.$$

Рассмотрим событие A = {из пяти выбранных лампочек три – энергосберегающие}.

Посчитаем количество элементарных исходов, благоприятствующих наступлению события A. Три энергосберегающих лампочки из четырёх можно выбрать C_4^3 способами. Остальные две лампочки должны быть обычными (т.е. выбраны из лампочек с номерами 5, 6, …,10), их можно выбрать C_6^2 способами. Согласно основному правилу комбинаторики количество исходов, благоприятствующих событию A,

$$m = C_4^3\, C_6^2.$$

Используя формулу (1.10), получим:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_4^3 C_6^2}{C_{10}^5} = \frac{\dfrac{4!}{3!\,1!}\cdot\dfrac{6!}{2!\,4!}}{\dfrac{10!}{5!\,5!}} = \frac{4\cdot\dfrac{5\cdot 6}{2}}{\dfrac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}} = \frac{10}{42} = \frac{5}{21} \approx 0{,}238.$$

1.4.4 Геометрический метод определения вероятности

К сожалению, классический метод определения вероятности имеет достаточно сильные ограничения. Во-первых, он «работает» только для конечного пространства элементарных исходов. Во-вторых, зачастую нет оснований считать все элементарные исходы равновозможными. В рассмотренных нами случаях с подбрасыванием монеты или игральной кости о равновозможности исходов говорят из соображений симметрии. Однако на практике такие задачи встречаются достаточно редко.

Ограничение на количество элементов пространства элементарных исходов снимает **геометрический метод определения вероятности**, который применяется в случае, когда пространство элементарных исходов – несчётное множество. Требование о том, что исходы эксперимента должны быть равновозможными, сохраняется.

Рассмотрим на числовой оси отрезок [a; b] и вложенный в него отрезок [c; d] (рисунок 1.14).

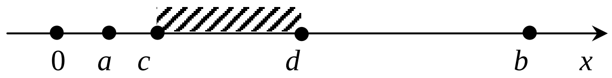


Рисунок 1.14 – Геометрический метод определения вероятности (одномерный случай)

На отрезок [a; b] наугад бросается точка (т.е. из всего несчётного множества точек отрезка [a; b] случайным образом выбирается одна). Пространство элементарных исходов

$$\Omega = \{\omega = x : x \in [a;\, b]\} = [a;\, b].$$

Рассмотрим событие A = {будет выбрана точка из отрезка [c; d]}.

$$A = \{\omega = x : x \in [c;\, d]\} = [c;\, d].$$

Вероятностью события *A* называется отношение длины отрезка [c; d] к длине отрезка [a; b], т.е.

$$P(A) = \frac{d-c}{b-a}. \qquad (1.11)$$

Рассмотрим теперь некоторую ограниченную область D плоскости и область A, лежащую внутри области D (рисунок 1.15).

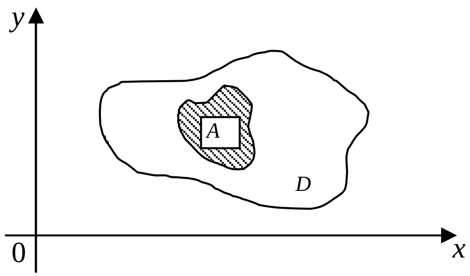


Рисунок 1.15 – Геометрический метод определения вероятности (двумерный случай)

Точка случайным образом бросается в область D. Тогда

$$\Omega = \{\omega = (x, y) : (x, y) \in D\} = D.$$

Какова вероятность того, что точка попадет в область A? Данная вероятность будет равняться отношению площади области A к площади области D, т.е.

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}. \qquad (1.12)$$

В случае если Ω – область трёхмерного пространства, формула примет вид

$$P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)}, \qquad (1.13)$$

где $V(A)$, $V(\Omega)$ – объёмы областей A и Ω соответственно.

Формулы (1.11)–(1.13) можно записать в виде

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)}, \qquad (1.14)$$

где через *mes* обозначена мера области.

Пример 1.38 (задача о встрече). Два студента договорились о встрече между 13 и 14 часами. Пришедший первым ждёт в течение 20 минут и уходит (в том случае, если они не встретились). Предполагая, что каждый из них выбирает момент своего прихода «наудачу», найти вероятность встречи.

Решение. Пусть первый студент пришёл в 13 часов x минут, а второй – в 13 часов y минут. Таким образом, пространство элементарных исходов $\Omega = \{\omega = (x, y) : 0 \le x \le 60,\, 0 \le y \le 60\}$ (рисунок 1.16). Очевидно, что Ω – несчётное множество равновозможных исходов.

Запишем теперь событие A, которое заключается в том, что студенты встретятся: $A = \{\omega = (x, y) : |x - y| \le 20,\, 0 \le x \le 60,\, 0 \le y \le 60\}$. Область, содержащая исходы, благоприятствующие наступлению события A, заштрихована на рисунке 1.16.

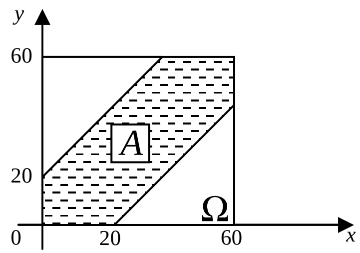


Рисунок 1.16 – Геометрическая интерпретация задачи о встрече

Для нахождения вероятности события A применим геометрический метод определения вероятности, а именно формулу (1.12). Площадь заштрихованной фигуры найдём, отняв от площади квадрата площади двух незаштрихованных треугольников. Вероятность события A

$$P(A)=\frac{60^2-\frac{1}{2}\cdot 40\cdot 40-\frac{1}{2}\cdot 40\cdot 40}{60^2}=\frac{2000}{3600}=\frac{5}{9}\approx 0{,}556\,.$$

На этом примере можно объяснить выражение «обычно люди ждут 17 минут». Если студент будет ждать приблизительно 17 минут, то вероятность того, что встреча состоится, будет равна 0,5. С помощью несложных вычислений можно точно найти время ожидания $t_{\text{ож}}$, при котором указанная вероятность будет равна 0,5:

$$P(A)=\frac{60^2-(60-t_{\text{ож}})^2}{60^2}=\frac{1}{2},\ 1-\frac{(60-t_{\text{ож}})^2}{60^2}=\frac{1}{2},\ \frac{(60-t_{\text{ож}})^2}{60^2}=\frac{1}{2},$$

$$60-t_{\text{ож}}=\frac{60}{\sqrt{2}},\ t_{\text{ож}}=60-\frac{60}{\sqrt{2}}=60-30\sqrt{2}\approx 17{,}57\text{ минут.}$$

1.4.5 Статистический метод определения вероятности

Пусть Ω – пространство элементарных исходов некоторого эксперимента E. Проведем эксперимент E при одном и том же комплексе условий N раз. И пусть A – некоторое событие, которое может наступить в результате эксперимента E. **Статистический метод определения вероятности** заключается в том, что в качестве вероятности события A принимают относительную частоту этого события

$$P(A)=\frac{N(A)}{N}. \qquad (1.15)$$

Недостатком статистического метода определения вероятности является его неоднозначность. Так, в примере 1.29 в качестве вероятности события A можно принять не только число 0,5069, но и 0,5015, и 0,5005. Кроме того, проведение большого числа опытов зачастую затруднительно. Впрочем, у статистической вероятности были и сторонники. Р.Мизес предлагал считать определением вероятности именно равенство (1.15). Он утверждал, что ограниченным является классическое определение вероятности, а данное им апостериорное

эмпирическое определение способно обеспечить в полной мере интересы математики, естествознания и философии.

Рихард Эдлер фон Мизес (1883–1953) – математик и механик австрийского происхождения; работал в механике жидкостей, аэродинамике, аэронавтике, статистике и теории вероятностей. В теории вероятностей предложил и отстаивал частотную концепцию понятия вероятности, ввел в общее употребление интегралы Стильтеса и первым разъяснил роль теории марковских цепей в физике.

Однако в этой концепции вероятность перестаёт быть объективной числовой характеристикой многих реальных явлений. Тем не менее, статистический метод определения вероятности в некоторых экспериментах является практически единственно возможным. Более того, большинство методов математической статистики, так или иначе, основываются на статистическом методе определения вероятности.

Вопросы для самоконтроля

1 Пусть проводится N экспериментов, в каждом из которых может наступить событие A. Что называют частотой события A?

2 Может ли частота события быть равной относительной частоте этого же события?

3 Назовите свойства относительной частоты.

4 В каком случае совокупность подмножеств F множества Ω называется алгеброй? σ-алгеброй?

5 Что называют вероятностью?

6 Что называют вероятностным пространством эксперимента?

7 Укажите свойства вероятности.

8 В чем заключается классический метод определения вероятности?

9 При каких условиях можно применять классический метод определения вероятности?

10 В чем заключается геометрический метод определения вероятности?

1.5 Вычисление вероятностей сложных событий

После того, как мы определили операции над событиями, логично было бы указать и способы вычисления вероятностей событий, образующихся в результате выполнения этих операций. Пусть вероятности наступления событий A и B известны. Какова будет вероятность наступления события $A\cup B$? Какова будет вероятность наступления события $A\cap B$? Ответы на эти и другие вопросы содержатся в данном подразделе.

1.5.1 Теорема сложения

Академик Б.В. Гнеденко говорил, что самым простым и в то же время самым важным общим правилом, употребляемым при расчёте вероятностей, является правило сложения.

Пример 1.39 В 144 предварительно напряжённых арматурных стержнях определены контролируемые напряжения. Оказалось, что для 12 стержней контролируемые напряжения находятся в интервале 300–350 МПа, для 35 стержней – в интервале 350–400 МПа, для 50 стержней – в интервале 400–450 МПа и для 50 стержней – в интервале 450–500 МПа. Наугад выбирается один арматурный стержень. Какова вероятность того, его контролируемое напряжение находится в интервале 350–450 МПа?

Решение. E: из 144 арматурных стержней наугад выбирается один стержень. $\Omega = \{\omega = i : i = \overline{1,144}\}$. Определим события:

A = {наугад выбранный стержень имеет контролируемое напряжение от 350 до 400 МПа},

B = {наугад выбранный стержень имеет контролируемое напряжение от 400 до 450 МПа},

C = {наугад выбранный стержень имеет контролируемое напряжение от 350 до 450 МПа}.

I способ. E – эксперимент с конечным числом $n = 144$ равновозможных исходов. Следовательно, для определения вероятности события C можно воспользоваться формулой (1.10). Число элементарных исходов, благоприятствующих наступлению события C,

$$m_C = 35 + 50 = 85.$$

По классическому методу определения вероятности

$$P(C) = \frac{m_C}{n} = \frac{35+50}{144} = \frac{85}{144} \approx 0{,}59.$$

II способ. Событие C можно представить следующим образом: $C = A \cup B$. Поскольку события A и B несовместны, для определения вероятности события C можно воспользоваться аксиомой Колмогорова $A3$ (аксиомой счётной аддитивности).

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

По условию, число элементарных исходов, благоприятствующих наступлению события A, $m_A = 35$, число элементарных исходов, благоприятствующих наступлению события B, $m_B = 50$.

Согласно классическому методу определения вероятности

$$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{35}{144},$$

$$P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{50}{144}.$$

Таким образом,

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{35}{144} + \frac{50}{144} = \frac{85}{144} \approx 0{,}59.$$

Теорема (сложения). *Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность того, что оба эти события произойдут одновременно:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \qquad (1.16)$$

Вероятность суммы трёх событий определяется по формуле

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) -$$
$$- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C). \qquad (1.17)$$

Вероятность суммы двух и более попарно несовместных событий определяется по аксиоме Колмогорова $A3$.

Пусть события A и B несовместны. Тогда

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \qquad (1.18)$$

Пусть события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несовместны. Тогда

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n). \qquad (1.19)$$

Пусть события $A_1, A_2, \ldots$ (счётное число событий) попарно несовместны. Тогда

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots \qquad (1.20)$$

Пример 1.40 Завод выпускает 30 % продукции высшего сорта, 46 % продукции первого сорта и 23,5 % продукции второго сорта (оставшиеся 0,5 % продукции составляет брак). Наугад извлекается одно изделие. Какова вероятность того, что его качество не ниже, чем первый сорт?

Решение. E: наугад выбирается одно изделие. Определим события:

A = {наугад выбранное изделие высшего сорта},

B = {наугад выбранное изделие первого сорта},

C = {наугад выбранное изделие является изделием не ниже первого сорта}.

По условию $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}46$. Заметим, что $C = A \cup B$.

События A и B несовместны (изделие не может быть одновременно и высшего, и первого сорта), поэтому используем формулу (1.18):

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}3 + 0{,}46 = 0{,}76.$$

Пример 1.41 Найти вероятность того, что наугад выбранное двузначное натуральное число делится на два или на три.

Решение. E: наугад выбирается двузначное натуральное число. Пространство элементарных исходов $\Omega = \{\omega = i : i = \overline{10, 99}\}$. Обозначим события:

A = {наугад выбранное двузначное натуральное число делится на два},

B = {наугад выбранное двузначное натуральное число делится на три},

C = {наугад выбранное двузначное натуральное число делится на два или на три}.

Событие C представим в виде $C = A \cup B$. Применяя формулу (1.16), имеем

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Выпишем исходы, благоприятствующие наступлению событий A, B и $A \cap B$ = {наугад выбранное двузначное натуральное число делится на шесть}:

$A = \{10, 12, \ldots, 98\}$, $m_A = 45$,

$B = \{12, 15, \ldots, 99\}$, $m_B = 30$,

$A \cap B = \{12, 18, \ldots, 96\}$, $m_{A \cap B} = 15$.

Общее количество элементарных исходов $n = 90$.

По классическому методу определения вероятности

$$P(A) = \frac{45}{90} = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3},\ P(A \cap B) = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}.$$

$$P(C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

Интуитивные понятия о принципах сложения и умножения можно проследить с первых шагов теории вероятностей как математической науки. В той или иной степени правилом сложения пользовались Кардано, Паскаль, Ферма, Я.Бернулли. Однако первая чёткая и окончательная формулировка теоремы сложения находится в работе **Томаса Байеса** (1702–1761) – английского математика и пресвитерианского священника. Эта работа была зачитана на заседании Лондонского королевского общества 27 декабря 1763 года, через два года после смерти автора. Помимо собственно теоремы работа включала в себя и другой важнейший результат, речь о котором пойдёт ниже.

1.5.2 Условная вероятность. Независимость событий. Теорема умножения

Вероятность некоторых событий может изменяться в зависимости от того, произошли другие события или нет. Поясним это на примере.

Пример 1.42 E: из колоды карт (36 листов) наугад последовательно выбирают две карты (выбранная карта в колоду не возвращается). Рассмотрим события:

A = {первая карта окажется тузом},

B = {вторая карта окажется тузом}.

В случае, если событие A не произошло, вероятность наступления события B равна 4/35, т.к. количество карт уменьшается. Если же событие A наступило, то вероятность наступления события B уменьшается (количество тузов в колоде уменьшилось, а следовательно, уменьшилось число элементарных исходов, благоприятствующих наступлению события B). В этом случае вероятность наступления события B будет равна 3/35.

Пусть (Ω, F, P) – вероятностное пространство некоторого эксперимента E. Рассмотрим произвольные события A и B, причем $P(B) \neq 0$. **Условной вероятностью события *A* в предположении, что событие *B* наступило,** называется число

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{1.21}$$

Аналогично, **условной вероятностью события *B* в предположении, что событие *A* наступило,** называется число

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},\ P(A) \neq 0.$$

Существует и другой способ определения условной вероятности: имея информацию о том, что событие B произошло, мы можем уточнить модель эксперимента, а именно: рассмотреть новое вероятностное пространство (Ω^*, F^*, P^*), где $\Omega^* = B$ – состоит из исходов, благоприятствующих наступлению события B, F^* состоит из пересечения всех событий из F с событием B, а P^* – вероятность на F^*, которая может быть задана любым выше описанным методом. Однако при решении задач этот способ является достаточно громоздким, его следует рассмотреть лишь для более ясного понимания понятия условной вероятности.

Из формулы (1.21) вытекает следующая теорема.

Теорема (умножения). *Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B) \qquad (1.22)$$

Теорема умножения длительный период формировалась на рассмотрении частных примеров. Чёткую формулировку теоремы умножения впервые предложил в своём научном труде «Доктрина шансов: метод подсчёта вероятностей событий в игре» (1718) **Абрахам Муавр** (1667–1754) – английский математик французского происхождения, член Лондонского королевского общества (1697), Берлинской (1735) и Парижской (1754) академий. Понятие независимости случайных событий Муавр определил во введении к данному труду.

Пример 1.43 В урне находятся 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Из урны последовательно извлекают два шара. Какова вероятность того, что оба они будут черного цвета?

Решение. E: из урны последовательно извлекаются два шара. Определим события:

A = {первый шар окажется черного цвета},

B = {второй шар окажется черного цвета},

C = {оба шара окажутся черного цвета}.

Заметим, что $C = A \cap B$. Следовательно, по формуле (1.22)

$$P(C) = \mathrm{P}(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A).$$

Вероятность наступления события A найдём по классическому методу определения вероятностей:

$$P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

После того как событие A наступило, в ящике осталось 9 шаров, из них 3 чёрных. Таким образом, $P(B \mid A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

$$P(C) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}.$$

Говорят, что **событие *A* не зависит от события *B***, если выполняется равенство

$$P(A|B) = P(A). \qquad (1.23)$$

В противном случае говорят, что событие A зависит от события B.

Учитывая (1.22), можно дать другое (эквивалентное) определение независимости событий.

События A и B называются **независимыми**, если выполняется равенство

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \qquad (1.24)$$

Пример 1.44 E: из колоды карт (36 листов) наугад последовательно достают две карты (выбранную карту возвращают в колоду). Рассмотрим события:

A = {первая карта окажется тузом},

B = {вторая карта окажется тузом}.

Вне зависимости от того, наступит событие A или нет, вероятность наступления события B не изменяется (поскольку первая выбранная карта возвращается в колоду)

$$P(B|A) = P(B) = 4/36 = 1/9.$$

Следовательно, события A и B являются независимыми.

В примере 1.44 описано одно из наиболее распространённых «заблуждений игрока». Некоторые игроки убеждены в том, что если, например, при игре в рулетку два раза подряд выпало красное поле, то вероятность выпадения чёрного поля в следующий раз существенным образом увеличивается. На самом деле, шарик, разумеется, не помнит, на какое поле он попадал во время предыдущих испытаний.

Приведём некоторые свойства независимых событий:

1° События A и $\varnothing$ являются независимыми.

2° События A и Ω являются независимыми.

3° Пусть события A и B являются независимыми. Тогда независимыми будут являться события A и $\overline{B}$, события $\overline{A}$ и B, события $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ **называются независимыми в совокупности**, если выполняются следующие системы равенств:

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j),\ i, j = \overline{1, n},\ i \neq j; \quad (*)$$

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i) \cdot P(A_j) \cdot P(A_k),\ i, j, k = \overline{1, n},\ i \neq j, i \neq k,\ j \neq k;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n). \qquad (**) \qquad (1.25)$$

Система равенств (*) из (1.25) требует **попарную независимость**. Таким образом, если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ являются независимыми в совокупности, то они являются попарно независимыми. Однако из попарной независимости событий не следует независимость в совокупности.

Пример 1.45 E: двое студентов независимо друг от друга сдают экзамен. Вероятность сдачи экзамена каждым из студентов равна 0,5. Определим события:

A = {первый студент сдаст экзамен},

B = {второй студент сдаст экзамен},

C = {экзамен сдаст только один из студентов}.

Являются ли события A, B и C попарно независимыми? Являются ли события A, B и C независимыми в совокупности?

Решение. События A и B независимы по условию. Докажем независимость событий A и C, B и C.

Событие $A \cap C$ равносильно событию «первый студент сдал экзамен, а второй студент – нет», а событие $B \cap C$ равносильно событию «второй студент сдал экзамен, а первый студент – нет», т.е. в данном случае $A \cap C = A \cap \overline{B}$, $B \cap C = \overline{A} \cap B$. Используя свойство 3° независимых событий, получим

$$P(A \cap C) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B}) = 0{,}25,$$

$$P(B \cap C) = P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \cdot P(B) = 0{,}25.$$

Найдём вероятность события C.

Заметим, что $C = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$. Получаем

$$P(C) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = 0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}5.$$

Таким образом,

$$P(A \cap C) = 0{,}25 = P(A) \cdot P(C),$$

$$P(B \cap C) = 0{,}25 = P(B) \cdot P(C).$$

По определению независимости двух событий (1.24) события A и C, B и C являются независимыми.

Следовательно, события A, B и C являются попарно независимыми.

С другой стороны заметим, что $A \cap B \cap C = \varnothing$, и

$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C),$$

$$0 \neq 0{,}125,$$

т.е. события A, B, C не являются независимыми в совокупности.

Покажем, кроме того, что равенство (**) из (1.25) также не гарантирует независимости в совокупности.

Пример 1.46 E: подбрасывание игрального кубика. Пространство элементарных исходов $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Обозначим события

$A = \{1, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 4\}$, $C = \{1, 2, 5, 6\}$.

По классическому методу определения вероятностей легко вычислить вероятности этих событий:

$$P(A) = \frac{3}{6},\ P(B) = \frac{3}{6},\ P(C) = \frac{4}{6}.$$

Следовательно, $P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{6}$, а $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{6}$, так как $A \cap B \cap C = \{1\}$. Таким образом, равенство (**) из (1.25) действительно выполняется.

Заметим, что $A \cap B = \{1\}$ и, следовательно, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Однако, $P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{6}$, т.е. события A, B и C не являются независимыми в совокупности.

По аналогии с теоремой умножения для двух событий можно определить теорему умножения для конечного числа событий.

Теорема (умножения для конечного числа событий). *Вероятность произведения конечного числа событий определяется по формуле*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) =$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}). \quad (1.26)$$

В случае если события независимы в совокупности, теорема умножения примет следующий вид:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n), \quad (1.27)$$

в предположении, что $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \neq 0$.

Пример 1.47 Студент подготовил 45 вопросов из 50. В экзаменационном билете содержится три вопроса. Какова вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого нужно ответить а) на все три вопроса; б) хотя бы на два вопроса; в) хотя бы на один вопрос?

Решение. Определим события:

A_i = {студент ответит на i-й вопрос}, i = 1, 2, 3,

B_1 = {студент ответит на все три вопроса},

B_2 = {студент ответит на два вопроса},

B_3 = {студент ответит хотя бы на один вопрос}.

а) Вероятность события $B_1 = A_1 \cap A_2 \cap A_3$ определим по формуле (1.26):

$$P(B_1) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 A_2) =$$

$$= \frac{45}{50} \cdot \frac{44}{49} \cdot \frac{43}{48} \approx 0{,}724.$$

б) Событие B_2 можно выразить следующим образом:

$$B_2 = (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) \cup (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Применяя сначала теорему сложения для несовместных событий (1.19), а затем теорему умножения для зависимых событий (1.26), получим

$$P(B_2) = P((A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) \cup (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3)) =$$

$$= P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) + P(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) + P(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) =$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(\overline{A}_3 | A_1 \cap A_2) + P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap \overline{A}_2) +$$

$$+ P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2 | \overline{A}_1) \cdot P(A_3 | \overline{A}_1 \cap A_2) = \frac{45}{50} \cdot \frac{44}{49} \cdot \frac{5}{48} + \frac{45}{50} \cdot \frac{5}{49} \cdot \frac{44}{48} +$$

$$+ \frac{5}{50} \cdot \frac{45}{49} \cdot \frac{44}{48} \approx 0{,}253.$$

в) Для вычисления вероятности события B_3 удобно рассмотреть событие $\overline{B}_3$ = {студент не ответит ни на один вопрос}.

Событие $\overline{B}_3$ можно выразить следующим образом:

$$\overline{B}_3 = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3.$$

$$P(\overline{B}_3) = P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) = P(\overline{A}_1) P(\overline{A}_2 \mid \overline{A}_1) P(\overline{A}_3 \mid \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) =$$

$$= \frac{5}{50} \cdot \frac{4}{49} \cdot \frac{3}{48} \approx 0{,}0005.$$

Согласно свойству 3˚ вероятности

$$P(B_3) = 1 - P(\overline{B}_3) \approx 1 - 0{,}0005 = 0{,}9995.$$

1.5.3 Формула полной вероятности. Формула Байеса

Важным следствием теорем сложения и умножения являются формула полной вероятности и формула Байеса.

Рассмотрим события H_1, H_2, …, H_n, которые образуют полную группу (напомним, что такие события называют *гипотезами*), т.е. $H_i \cap H_j$ = Ø, $\forall\, i \neq j$ и $\bigcup_i H_i = \Omega$, а также событие A, которое может происходить совместно с одной из гипотез. Проиллюстрируем ситуацию на рисунке 1.17.

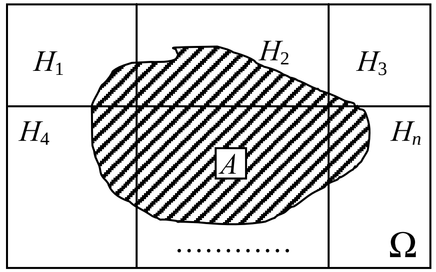


Рисунок 1.17 – Геометрическая интерпретация формулы полной вероятности

Событие A можно представить в виде

$$A = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \ldots \cup (A \cap H_n).$$

Вероятность наступления каждого из событий $A \cap H_i$, $i = \overline{1, n}$, равна $P(A \cap H_i) = P(H_i)P(A|H_i)$ (используем (1.22) – теорему умножения для двух событий). Таким образом, по формуле сложения для несовместных событий (1.19) получаем

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A|H_i). \tag{1.28}$$

Формула (1.28) носит название **формулы полной вероятности**.

Таким образом, формула полной вероятности применяется, когда событие A может произойти вследствие ряда взаимно исключающих причин. Эти причины и рассматриваются в качестве гипотез. Формула полной вероятности играет большую роль при решении различных практических задач.

Пример 1.48 Имеется две партии телевизоров: телевизоры модели A и телевизоры модели B. Известно, что 94 % телевизоров модели

А и 82 % телевизоров модели В безотказно работают в течение гарантийного срока. Гипермаркет закупает 25 телевизоров модели А и 75 телевизоров модели В. Какова вероятность того, что случайным образом выбранный телевизор выдержит гарантийный срок?

Решение. Событие A = {случайным образом выбранный телевизор выдержит гарантийный срок}. Поскольку неизвестно, телевизором какой модели он является, выдвигаем две гипотезы:

H_1 = {будет выбран телевизор модели А},

H_2 = {будет выбран телевизор модели В}.

События H_1 и H_2 образуют полную группу, следовательно, вероятность события A можно найти по формуле полной вероятности (1.28).

Вероятности гипотез определим по классическому методу:

$$P(H_1) = \frac{25}{25+75} = 0{,}25, \quad P(H_2) = \frac{75}{25+75} = 0{,}75.$$

Условные вероятности наступления события A в предположении, что наступила гипотеза H_1 или H_2, даны нам по условию:

$$P(A \mid H_1) = 0{,}94, \quad P(A \mid H_2) = 0{,}82.$$

По формуле полной вероятности получаем

$$P(A) = \sum_{i=1}^{2} P(H_i)P(A|H_i) = 0{,}25 \cdot 0{,}94 + 0{,}75 \cdot 0{,}82 = 0{,}235 + 0{,}615 = 0{,}85.$$

Отметим также, что формула (1.28) справедлива и для случая счётного числа гипотез.

На практике встречаются задачи, когда известно, что в результате проведения эксперимента событие A наступило, и необходимо определить вероятность $P(H_j \mid A)$. Такие вероятности гипотез называются **апостериорными**. Вероятности гипотез $P(H_j)$ называются **априорными**.

Выведем формулу для вычисления $P(H_j \mid A)$, $j = \overline{1, n}$, $P(A) \neq 0$. По формуле (1.21) имеем

$$P(H_j \mid A) = \frac{P(A \cap H_j)}{P(A)}.$$

Применим теорему умножения вероятностей (1.22) в числителе данной дроби и формулу полной вероятности (1.28) в знаменателе. Получим **формулу Байеса**

$$P(H_j \mid A) = \frac{P(H_j)P(A \mid H_j)}{P(A)} = \frac{P(H_j)P(A \mid H_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A \mid H_i)}, \quad j = \overline{1, n} \quad (1.29)$$

Несмотря на то, что результаты (1.28) и (1.29) традиционно приписываются Байесу, современную формулировку они впервые получили у Лапласа в его «Опыте философии теории вероятностей» (1814).

Пьер Симон Лаплас (1749 – 1827) – французский математик и астроном. Известен работами в области небесной механики, дифференциальных уравнений, является одним из создателей теории вероятностей. Состоял членом шести академий и королевских обществ, в том числе Петербургской (1802). Его имя внесено в список 72 величайших учёных Франции, помещённый на первом этаже Эйфелевой башни.

Пример 1.48 (*продолжение*) Выбранный наугад телевизор проработал в течение гарантийного срока. Какова вероятность того, что был выбран телевизор модели В?

Решение. Вероятности гипотез, равно как и условные вероятности, остаются прежними:

$$P(H_1) = \frac{25}{25+75} = 0{,}25, \quad P(H_2) = \frac{75}{25+75} = 0{,}75,$$

$$P(A \mid H_1) = 0{,}94, \quad P(A \mid H_2) = 0{,}82, \quad P(A) = 0{,}85.$$

Для определения вероятности $P(H_2 \mid A)$ воспользуемся формулой Байеса (1.29)

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(H_2)P(A \mid H_2)}{P(A)} = \frac{P(H_2)P(A \mid H_2)}{\sum_{i=1}^{2} P(H_i)P(A \mid H_i)} = \frac{0{,}615}{0{,}85} \approx 0{,}724.$$

Вопросы для самоконтроля

1 Сформулируйте теорему сложения для двух событий.
2 Сформулируйте теорему сложения для трех событий.
3 Сформулируйте теорему сложения для двух несовместных событий.
4 Что называют вероятностью события A при условии, что событие B наступило?
5 Сформулируйте теорему умножения для двух событий; для трех событий.
6 В каком случае события A и B называются независимыми?
7 В каком случае события A_1, A_2, …, A_n называются независимыми в совокупности?
8 Запишите формулу полной вероятности.
9 Запишите формулу Байеса. В каком случае она применяется?

1.6 Испытания Бернулли

1.6.1 Формула Бернулли

Конечное число испытаний называются **независимыми**, если их исходы представляют собой события, независимые в совокупности. Иными словами, вероятность наступления некоторого события в каждом из испытаний не зависит от исходов других испытаний.

Пример 1.49 Монета подбрасывается 10 раз. Поскольку в каждом из испытаний вероятность выпадения герба или решки не зависит от того, какой стороной падала монета в других испытаниях, эти испытания являются независимыми.

Пример 1.50 Стрелок 5 раз стреляет по мишени, не делая при этом поправок на ранее допущенную ошибку при новом выстреле. Каждый выстрел представляет собой испытание, все выстрелы в совокупности – серия независимых испытаний.

Последовательность из конечного числа испытаний называется **испытаниями Бернулли**, если

1) эти испытания независимы;

2) в каждом из этих испытаний может наступить некоторое событие A, называемое «успехом», с одной и той же вероятностью $p = P(A)$, $0 < p < 1$.

Событие $\overline{A}$ называют «неудачей», оно наступает с вероятностью $q = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - p$.

Пример 1.51 Игральный кубик подбрасывается 11 раз. В качестве «успеха» рассмотрим событие A = {выпадет шесть очков}. Тогда «неудачей» будет являться событие $\overline{A}$ = {выпадет меньше шести очков}, $p = P(A) = \dfrac{1}{6}$, $q = 1 - p = \dfrac{5}{6}$. Эти 11 испытаний являются испытаниями Бернулли.

Отметим, что «успехом» необязательно нужно считать событие, которое «успешно» в общепринятом смысле этого слова. Под «успехом» понимается наступление интересующего нас события, которое необязательно является благополучным. Например, «изделие не выдержало гарантийный срок», «электрическая лампочка перегорела» и т.д.

Пусть необходимо определить вероятность того, что в n испытаниях Бернулли событие A наступит ровно k раз. Как правило, эту вероятность обозначают $P_n(k)$.

Теорема. *Если производится n испытаний Бернулли, то вероятность того, что событие A произойдет ровно k раз, определяется по* ***формуле Бернулли***

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \; k = 0, 1, 2, \dots, n, \; q = 1 - p. \qquad (1.30)$$

Доказательство. Вероятность наступления события, состоящего в том, что событие A в n независимых опытах появится k раз в первых k опытах и не появится $(n - k)$ раз в остальных опытах, по теореме умножения равна

$$\underbrace{p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{k\ раз} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{(n-k)\ раз} = p^k q^{n-k}.$$

Вероятность появления события A снова k раз, но уже в другом порядке, например, появление в первых $(k - 1)$ опытах и в $(k + 1)$-м опыте, будет той же самой, т.е. $p^k q^{n-k}$.

Число таких событий – в n опытах k раз наступило событие A в различном порядке – равно числу неупорядоченных выборок объёма k из n элементов, т.е. C_n^k. Так как все эти события несовместны, то по теореме сложения

$$P_n(k) = \underbrace{p^k q^{n-k} + p^k q^{n-k} + \ldots + p^k q^{n-k}}_{C_n^k} = C_n^k p^k q^{n-k}, \; k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Отметим, что

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1, \;\; P_n(0) = C_n^0 p^0 q^n = q^n, \;\; P_n(n) = C_n^n p^n q^0 = p^n.$$

Пример 1.52 Вероятность того, что после года эксплуатации арматура будет повреждена химической коррозией равна 0,8. Для проверки случайным образом отобрали 4 арматуры. Какова вероятность того, что 3 из них повреждены?

Решение. Осмотр арматур представляет собой серию из $n = 4$ независимых испытаний. В качестве «успеха» рассмотрим событие

A = {арматура окажется повреждённой}.

$p = P(A) = 0{,}8$, $q = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Для вычисления события B = {3 арматуры будут повреждены} воспользуемся формулой Бернулли ($k = 3$):

$$P(B) = P_4(3) = C_4^3 \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^{4-3} = 4 \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^1 = 0{,}4096.$$

Вероятность того, что событие A произойдет в n испытаниях Бернулли хотя бы один раз, можно найти по формуле

$$P_n(\geq 1) = \sum_{k=1}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = 1 - P_n(0) = 1 - q^n.$$

Вероятность того, что событие A произойдет от k_1 до k_2 раз, $0 \leq k_1 < k_2 \leq n$, можно найти по формуле

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = P_n(k_1) + P_n(k_1 + 1) + \ldots + P_n(k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Пример 1.53 Исследуются плоские образцы с механически обработанными поверхностями. Известно, что 30 % из них имеют предельное отклонение толщины от 0,01 до 0,05 мм. Определите вероятность того, что из четырёх наудачу взятых образцов

а) предельное отклонение толщины от 0,01 до 0,05 мм будут иметь не более двух образцов;

б) предельное отклонение толщины от 0,01 до 0,05 мм будет иметь хотя бы один образец.

Решение. Измерение толщины образцов можно рассмотреть как серию из $n = 4$ независимых испытаний, в каждом из которых вероятность события A = {образец имеет предельное отклонение толщины от 0,01 до 0,05 мм} одинакова и равна 0,3: $p = P(A) = 0{,}3$, $q = 0{,}7$.

а) Найдем вероятность события B = {предельное отклонение толщины от 0,01 до 0,05 мм будут иметь не более двух образцов}:

$$P(B) = P_4(0 \leq k \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} P_4(k) = P_4(0) + P_4(1) + P_4(2).$$

Применяя формулу Бернулли для каждого слагаемого, получим:

$$P(B) = 0{,}7^4 + 4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^3 + 6 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^2 = 0{,}9163.$$

б) Вероятность события C = {предельное отклонение толщины от 0,01 до 0,05 мм будет иметь хотя бы один образец} найдем следующим образом:

$$P(C) = P_4(\geq 1) = 1 - P_4(0) = 1 - 0{,}7^4 = 1 - 0{,}2401 = 0{,}7599.$$

Определим наиболее вероятное число наступлений события A в n испытаниях Бернулли, т.е. такое число успехов k^*, $0 \leq k^* \leq n$, для которого $P_n(k^*)$ будет наибольшей. Для этого используется система неравенств

$$np - q \leq k^* \leq np + p. \tag{1.31}$$

Так как k^* – целое число, а $p + q = 1$, то для испытаний Бернулли существует одно или два наиболее вероятных числа успехов.

Пример 1.54 При отсутствии приборов заводского изготовления для замера линейных деформаций допускается использование прогибомера. Производится 8 замеров. Найти наиболее вероятное число замеров с погрешностью, не превышающей 1 мм, если известно, что данный прогибомер допускает такую погрешность в 30 % случаев.

Решение. Замеры линейных деформаций представляют собой серию из $n = 8$ независимых испытаний. В качестве «успеха» рассмотрим событие A = {погрешность не превысит 1 мм}, $p = 0{,}3$, $q = 0{,}7$.

Для определения наиболее вероятного числа наступлений события A используем систему неравенств (1.31):

$$8 \cdot 0{,}3 - 0{,}7 \leq k^* \leq 8 \cdot 0{,}3 + 0{,}3;$$

$$1{,}7 \leq k^* \leq 2{,}7;\ k^* = 2.$$

Рассмотрим обобщение испытаний Бернулли на случай, когда в каждом испытании исследователя интересует не два исхода, а несколько.

Рассмотрим серию из n независимых испытаний, в каждом из которых может произойти ровно одно из m событий $A_1, A_2, \ldots, A_m$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_m$ соответственно, $\sum_i p_i = 1$. Вероятность того, что в этих испытаниях событие A_1 появится ровно k_1 раз, …, событие A_m – ровно k_m раз, рассчитывается по формуле

$$P_n(k_1;\ \ldots;\ k_m)=\frac{n!}{k_1!\ldots k_m!}p_1^{k_1}\ldots p_m^{k_m}\ ,\ \sum_{i=1}^{m}k_i=n,\ k_i\ge 0, i=\overline{1,m}. \quad (1.32)$$

Формулу (1.32) называют **полиномиальной формулой.**

Пример 1.55 Кирпичный завод производит 30 % кирпичей низких марок (до М50), 20 % кирпичей марок от М50 до М100 и 50 % кирпичей марок М100 и выше. ОТК случайным образом отбирает 5 кирпичей. Какова вероятность того, что среди них будет 1 кирпич низкой марки, 1 кирпич марки от М50 до М100 и 3 кирпича марки М100 и выше?

Решение. Рассмотрим серию из n = 5 испытаний.

Введем события:

A_1 = {будет отобран кирпич марки до М50}, $p_1 = P(A_1) = 0{,}3$;

A_2 = {будет отобран кирпич марки от М50 до М100}, $p_2 = P(A_2) = 0{,}2$;

A_3 = {будет отобран кирпич марки М100 и выше}, $p_3 = P(A_3) = 0{,}5$.

Применяя формулу (1.32) для $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, $k_3 = 3$, получим

$$P_5(1;1;3)=\frac{5!}{1!1!3!}0{,}3^1\cdot 0{,}2^1\cdot 0{,}5^3=20\cdot 0{,}0075=0{,}15.$$

1.6.2 Предельные теоремы в испытаниях Бернулли

При большом количестве испытаний пользоваться формулой Бернулли затруднительно. В этом случае обычно пользуются приближёнными формулами, которые при увеличении числа испытаний будут давать приближённый ответ с достаточно высокой степенью точности.

Теорема (Пуассона). *Если число испытаний Бернулли* $n\to\infty$ *и вероятность «успеха» в каждом испытании* $p\to 0$, *так, что при этом* $np = \lambda$ = const, *то*

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \lambda=\text{const}}}P_n(k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\ k = 0, 1, 2, \ldots \quad (1.33)$$

Доказательство. Так как $np=\lambda$, то $p=\frac{\lambda}{n}$. Воспользуемся формулой Бернулли и получим

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \lambda=\text{const}}}P_n(k)=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \lambda=\text{const}}}\left[\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\right]=$$

$$=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \lambda=\text{const}}}\left[\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\right]=$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\lim_{\substack{n\to\infty\\ \lambda=\text{const}}}\left[\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\right]=$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\lim_{\substack{n\to\infty\\ \lambda=\text{const}}}\left[1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\right].$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n=e^{-\lambda}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^b=1$, где a и b – некоторые константы, то

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \lambda=\text{const}}}P_n(k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Следствие. *Если в испытаниях Бернулли n велико, а вероятность «успеха» p мала, то*

$$P_n(k)\approx\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\ k = 0, 1, 2, \ldots , n. \quad (1.34)$$

Обычно формулой (1.34) пользуются, когда $p < 0{,}1$ и $np < 10$.

Формулу (1.34) также можно использовать, когда $0{,}9 < p < 1$. В таком случае следует поменять местами «успех» и «неудачу».

Пример 1.56 Каждый из частотомеров, имеющихся на складе завода-изготовителя, выходит из строя до истечения гарантийного срока с вероятностью 0,01. Посредник закупает на заводе 100 частотомеров с целью дальнейшей перепродажи. Какова вероятность того, что в течение гарантийного срока из числа приобретённых посредником частотомеров выйдут из строя ровно 4?

Решение. Рассмотрим серию из n = 100 испытаний Бернулли.

A = {частотомер выйдет из строя до истечения гарантийного срока}, $p = P(A)$ = 0,01.

Поскольку n велико, а вероятность «успеха» p мала (< 0,1) и np < 10, то вероятность события B = {из 100 частотомеров 4 выйдут из строя до истечения гарантийного срока} найдем приближенно по формуле Пуассона (1.34). В данном случае: n = 100, k = 4, p = 0,01, $\lambda = np = 1$.

$$P(B) = P_{100}(4) \approx \frac{1^4 e^{-1}}{4!} = \frac{1}{24e} = \frac{1}{65{,}232} \approx 0{,}015\,.$$

Теорема (локальная теорема Муавра-Лапласа). *Если число испытаний Бернулли* $n \to \infty$, *а вероятность «успеха»* $0 < p < 1$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k)\frac{\sqrt{npq}}{\varphi(x_k)} = 1, \qquad (1.35)$$

где $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x_k = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Свойства функции $\varphi(x)$:

1° $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

2° $\varphi(+\infty) = 0$, $\varphi(-\infty) = 0$.

3° Если $|x| \geq 4$, то $\varphi(x) \approx 0$.

Следствие. *Если в испытаниях Бернулли* n *велико, а вероятность «успеха»* $0 < p < 1$, *то*

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x_k), \qquad (1.36)$$

где $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x_k = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Обычно формулой (1.36) пользуются, когда $0{,}1 \leq p \leq 0{,}9$ и $npq > 20$.

В приложении А приведена таблица значений функции $\varphi(x)$.

Пример 1.57 Вероятность того, что результаты проверки гидравлического домкрата ДГ-100 будут признаны удовлетворительными, равна 0,7. Какова вероятность того, что из 200 проверенных домкратов результаты проверки будут удовлетворительными ровно для 160 из них?

Решение. Рассмотрим серию из n = 200 испытаний Бернулли.

A = {результаты проверки домкрата будут признаны удовлетворительными}, p = 0,7, q = 0,3.

Поскольку n велико, а вероятность «успеха» находится в пределах $0{,}1 \leq p \leq 0{,}9$ и $npq > 20$, то вероятность события B = {из 200 домкратов результаты проверки будут удовлетворительными для 160} найдем приближенно по формуле (1.36). В данном случае: n = 200, p = 0,7, q = 0,3, k = 160.

$$P(B) = P_{200}(160) \approx \frac{1}{\sqrt{200\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3}}\varphi(x_k),$$

$$x_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{160 - 200\cdot 0{,}7}{\sqrt{200\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3}} \approx \frac{20}{6{,}48} \approx 3{,}09\,.$$

По таблице значений функции $\varphi(x)$ (см. приложение А) находим $\varphi(3{,}09) \approx 0{,}0034$. Тогда

$$P(B) = P_{200}(160) \approx \frac{1}{6{,}48}\cdot 0{,}0034 \approx 0{,}0005.$$

В тех случаях, когда требуется вычислить вероятность того, что в n испытаниях событие A произойдет не менее k_1, но не более k_2 раз, используют интегральную теорему Муавра-Лапласа. Отметим, что эта теорема является частным случаем более общей теоремы – центральной предельной теоремы.

Теорема (интегральная теорема Муавра-Лапласа). *Если число испытаний Бернулли* $n \to \infty$, *а вероятность «успеха»* $0 < p < 1$, *то*

$$\lim_{n\to\infty}(P_n(k_1 \leq k \leq k_2) - \Phi(x_2) + \Phi(x_1)) = 0, \qquad (1.37)$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, $x_i = \dfrac{k_i - np}{\sqrt{npq}}$, i = 1, 2.

Функцию $\Phi(x)$ называют функцией Лапласа. Укажем её свойства:

1° $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

2° $\Phi(+\infty) = 0{,}5$. $\Phi(-\infty) = -0{,}5$.

3° Если $x \ge 5$, то $\Phi(x) \approx 0{,}5$. Если $x \le -5$, то $\Phi(x) \approx -0{,}5$.

Следствие. *Если в испытаниях Бернулли n велико, а вероятность «успеха»* $0 < p < 1$, *то*

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{1.38}$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, $x_i = \dfrac{k_i - np}{\sqrt{npq}}$, $i = 1, 2$.

Формулой (1.38) пользуются, когда $0{,}1 \le p \le 0{,}9$ и $npq > 20$.

В приложении Б приведена таблица значений функции $\Phi(x)$.

Пример 1.58 Проверкой установлено, что цех в среднем выпускает 60 % продукции высшего сорта. Найти вероятность того, что из 200 изделий: а) будет ровно 100 высшего сорта; б) не менее половины будет высшего сорта.

Решение. Рассмотрим серию из $n = 200$ испытаний Бернулли.

A = {изделие окажется высшего сорта}, $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$.

Поскольку n велико, а вероятность «успеха» находится в пределах $0{,}1 \le p \le 0{,}9$ и $npq > 20$, то для вычисления вероятностей событий B = {из 200 изделий будет ровно 100 высшего сорта} и C = {из 200 изделий не менее половины будет высшего сорта} можно воспользоваться приближенными формулами Муавра-Лапласа.

а) Вероятность события B найдем по формуле (1.36). В данном случае: $n = 200$, $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$, $k = 100$.

$$P(B) = P_{200}(100) \approx \frac{1}{\sqrt{200\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4}}\varphi(x_k),$$

$$x_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 200\cdot 0{,}6}{\sqrt{200\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4}} \approx \frac{-20}{6{,}93} \approx -2{,}89.$$

По таблице значений функции $\varphi(x)$ (см. приложение А), учитывая, что $\varphi(-x) = \varphi(x)$, находим $\varphi(-2{,}89) = \varphi(2{,}89) \approx 0{,}0061$.

Тогда

$$P(B) = P_{200}(100) \approx \frac{1}{6{,}93}\cdot 0{,}0061 \approx 0{,}00088.$$

б) Вероятность события C найдем по формуле (1.38). В данном случае: $n = 200$, $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$, $k_1 = 100$, $k_2 = 200$.

$$P(B) = P_{200}(100 \le k \le 200) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 200\cdot 0{,}6}{\sqrt{200\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4}} \approx \frac{-20}{6{,}93} \approx -2{,}89,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{200 - 200\cdot 0{,}6}{\sqrt{200\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4}} \approx \frac{80}{6{,}93} \approx 11{,}54.$$

По таблице значений функции Лапласа $\Phi(x)$ (см. приложение Б), учитывая, что $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, находим $\Phi(-2{,}89) = -\Phi(2{,}89) = -0{,}4981$.

Учитывая, что если $x \ge 5$, то $\Phi(x) \approx 0{,}5$, имеем $\Phi(11{,}54) = 0{,}5$.

Таким образом,

$$P(B) = P_{200}(100 \le k \le 200) \approx 0{,}5 - (-0{,}4981) = 0{,}9981.$$

Вопросы для самоконтроля

1 В каком случае испытания являются независимыми?

2 Какие должны выполняться условия для того, чтобы последовательность из n испытаний называлась испытаниями Бернулли?

3 Запишите формулу Бернулли.

4 Запишите полиномиальную формулу.

5 Какие вы знаете предельные теоремы для испытаний Бернулли? При каких условиях они применяются?

6 Сформулируйте теорему Пуассона.

7 Сформулируйте локальную теорему Муавра-Лапласа.

8 Сформулируйте интегральную теорему Муавра-Лапласа.

2 СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.1 Понятие случайной величины

Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие случайной величины. **Случайной величиной** называют величину, которая при повторении некоторого эксперимента в одинаковых условиях может принимать различные значения, причем заранее неизвестно, какое именно из них. Будем обозначать случайные величины греческими буквами ξ, η, ζ, …, а их возможные значения – латинскими буквами x, y, z, ….

Пример 2.1 E: подбрасывание игральной кости. Случайная величина ξ – число выпавших очков. Возможные значения данной случайной величины: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, …, $x_6 = 6$.

E: стрельба по мишени до первого попадания. Случайная величина η – количество выстрелов, предшествующих первому попаданию. Возможные значения данной случайной величины: $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 2$, … .

E: исследование времени безотказной работы прибора. Случайная величина ζ – время безотказной работы прибора. Возможные значения z данной случайной величины принадлежат промежутку $[0; +\infty)$.

Дадим теперь строгое определение случайной величины. Пусть (Ω, F, P) – вероятностное пространство некоторого эксперимента E. **Случайной величиной** называется функция $\xi = \xi(\omega)$, измеримая относительно σ-алгебры F, которая каждому элементарному исходу ω ставит в соответствие некоторое действительное число x:

$$\xi : \omega \in \Omega \to x \in \boldsymbol{R}. \tag{2.1}$$

Другими словами, случайная величина – это отображение пространства элементарных исходов на числовую прямую.

Пример 2.2 E: подбрасывание двух различимых игральных костей.

$\Omega = \{\omega = (i, j): i, j = \overline{1, 6}\}$.

Игрока в кости интересует, сколько в сумме выпало на костях. Поэтому для данного эксперимента, например, можно рассмотреть следующую случайную величину:

$$\xi(\omega) = \xi(i,\ j) = i + j.$$

Таким образом, ξ – сумма очков, выпавших на игральных костях. Возможные значения данной случайной величины: 2, 3, …, 12.

Примерами случайных величин являются число бракованных кирпичей в партии, число звонков, поступивших на мобильный телефон в течение суток, время твердения бетона и т. д.

Вопросы для самоконтроля

1 Что называют случайной величиной?

2 Можно ли до проведения эксперимента определить, какое значение примет случайная величина?

3 Приведите примеры случайных величин.

4 Приведите пример случайной величины с возможными значениями 0 и 1.

2.2 Закон распределения и функция распределения случайной величины

Для полного описания случайной величины необходимо знать не только её возможные значения, но и вероятности принятия случайной величиной этих значений. Любое правило, устанавливающее связь между отдельными значениями случайной величины или значениями из некоторого множества и соответствующими им вероятностями, называется **законом распределения случайной величины**. Про случайную величину говорят, что она подчиняется данному закону распределения.

Функцией распределения случайной величины ξ называется функция $F_\xi(x)$, которая определяется соотношением

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\},\ x \in \boldsymbol{R}. \tag{2.2}$$

Если из контекста понятно, о функции распределения какой случайной величины идёт речь, то функцию распределения будем обозначать $F(x)$.

Укажем основные свойства функции распределения $F(x)$:

1° Область определения функции распределения – вся числовая прямая.

2° Область значений функции распределения – отрезок [0; 1], т.е.

$$0 \le F(x) \le 1.$$

3° $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$.

4° Функция распределения является неубывающей функцией:

$$\text{если } x_2 > x_1, \text{ то } F(x_2) \ge F(x_1).$$

5° Вероятность принятия случайной величиной ξ значения из промежутка $[a; b)$

$$P\{a \le \xi < b\} = F(b) - F(a). \qquad (2.3)$$

Наряду с равенством (2.3) выполняются равенства

$$P\{a < \xi < b\} = F(b) - F(a+0),$$
$$P\{a \le \xi \le b\} = F(b+0) - F(a),$$
$$P\{a < \xi \le b\} = F(b+0) - F(a+0).$$

6° Функция распределения непрерывна слева: $\lim\limits_{x\to a-0} F(x) = F(a)$.

7° $P\{\xi \ge x\} = 1 - P\{\xi < x\} = 1 - F(x)$.

Не менее часто функцию распределения определяют

$$F(x) = P\{\xi \le x\}, \ x \in \boldsymbol{R}.$$

В этом случае свойства 1°–4° остаются в силе, а свойства 5°–7° приобретают следующий вид:

5´ $P\{a < \xi \le b\} = F(b) - F(a)$.

6´ Функция распределения непрерывна справа: $\lim\limits_{x\to a+0} F(x) = F(a)$.

7´ $P\{\xi > x\} = 1 - P\{\xi \le x\} = 1 - F(x)$.

Функция распределения является законом распределения случайной величины.

Вопросы для самоконтроля

1 Почему для полного описания случайной величины недостаточно знать все её возможные значения?

2 Что называют законом распределения случайной величины?

3 Что называют функцией распределения случайной величины?

4 Может ли значение функции распределения при $x = 2$ быть равным 1,5?

5 Случайная величина ξ имеет функцию распределения $F(x)$. Верно ли, что $F(5) \le F(3)$?

6 Является ли функция распределения законом распределения случайной величины?

2.3 Дискретные случайные величины

Пусть (Ω, F, P) – вероятностное пространство некоторого эксперимента E.

Случайная величина ξ называется **дискретной**, если она может принимать конечное или счётное количество значений.

Так, в примере 2.1 число очков, выпавших на игральной кости, и число выстрелов, сделанных до первого попадания в цель, являются дискретными случайными величинами.

Примерами дискретных случайных величин являются: число бракованных кирпичей в партии из 10 000 штук, число отказов лифтового оборудования в течение суток, число асбестоцементных труб, не выдержавших испытания, число окон ПВХ, установленных рабочим за смену.

Пусть ξ – дискретная случайная величина, которая принимает значения x_i с вероятностями $p_i = P\{\xi = x_i\}$. Тогда закон распределения случайной величины ξ может быть задан в виде таблицы

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

,

если число её возможных значений конечно, или

x_i	x_1	x_2	…	x_n	…
p_i	p_1	p_2	…	p_n	…

,

если число её возможных значений счётно. Такую таблицу называют **рядом распределения** случайной величины ξ.

Ряд распределения является законом распределения дискретной случайной величины.

Поскольку события $\{\xi = x_i\}$ образуют полную группу, то сумма вероятностей этих событий равна 1:

$$\sum_i p_i = 1.$$

Ряд распределения можно изобразить графически в виде **столбцовой диаграммы** (рисунок 2.1). Для этого на координатной плоскости отмечаются точки (x_i, p_i), из которых опускаются перпендикуляры на ось абсцисс.

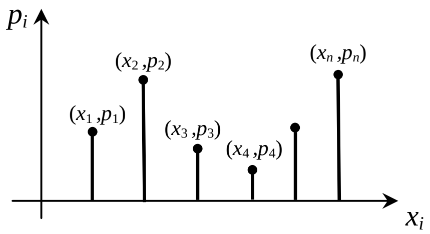


Рисунок 2.1 – Столбцовая диаграмма случайной величины

Функция распределения дискретной случайной величины ξ имеет вид

$$F(x) = P\{\xi < x\} = \sum_{i: x_i < x} P\{\xi = x_i\} = \sum_{i: x_i < x} p_i \,. \tag{2.4}$$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1, \\ p_1, & x_1 < x \le x_2, \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \le x_3, \\ \ldots & \\ p_1 + \ldots + p_{n-1}, & x_{n-1} < x \le x_n, \\ 1, & x > x_n, \end{cases}$$

если число возможных значений дискретной случайной величины конечно, и

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1, \\ p_1, & x_1 < x \le x_2, \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \le x_3, \\ \ldots & \\ p_1 + \ldots + p_{k-1}, & x_{k-1} < x \le x_k, \\ \ldots, & \end{cases}$$

если число возможных значений дискретной случайной величины счётно. График функции распределения дискретной случайной величины с конечным числом значений представлен на рисунке 2.2.

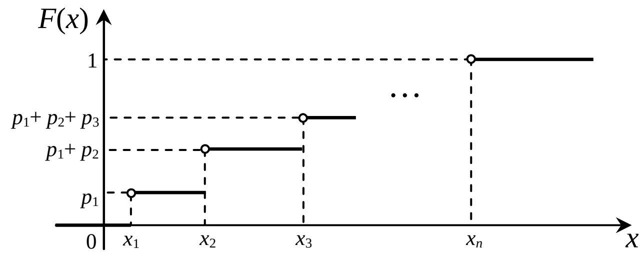


Рисунок 2.2 – График функции распределения дискретной случайной величины

Пример 2.3 Прибор состоит из трёх однотипных устройств, каждое из которых независимо от других с вероятностью 0,3 может выйти из строя в течение времени *T*. Рассмотрим случайную величину ξ – число устройств, вышедших из строя в течение времени *T*. Построить ряд распределения, столбцовую диаграмму и функцию распределения случайной величины ξ.

Решение. Очевидно, что случайная величина ξ может принимать четыре значения: 0, 1, 2, 3. Испытание устройств на работоспособность представляет собой серию из 3 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность события A = {устройство выйдет из строя в течение времени T} равна 0,3. Поэтому для определения вероятностей событий $\{\xi = i\}$, $i = \overline{0, 3}$, воспользуемся формулой Бернулли (1.30), где $p = P(A) = 0{,}3$, $q = P(\overline{A}) = 0{,}7$, $n = 3$:

$$P\{\xi = 0\} = P_3(0) = C_3^0 \cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^{3-0} = 0{,}7^3 = 0{,}343,$$

$$P\{\xi = 1\} = P_3(1) = C_3^1 \cdot 0{,}3^1 \cdot 0{,}7^{3-1} = 3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}49 = 0{,}441,$$

$P\{\xi=2\}=P_3(2)=C_3^2\cdot 0{,}3^2\cdot 0{,}7^{3-2}=3\cdot 0{,}09\cdot 0{,}7=0{,}189,$

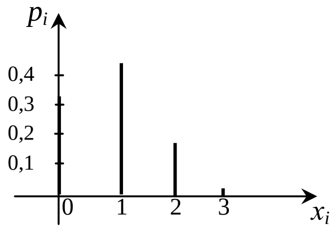
$P\{\xi=3\}=P_3(3)=C_3^3\cdot 0{,}3^3\cdot 0{,}7^{3-3}=0{,}3^3=0{,}027.$

Таким образом, ряд распределения случайной величины ξ имеет вид

x_i	0	1	2	3
p_i	0,343	0,441	0,189	0,027

Убедимся, что $\sum_{i=1}^{4} p_i = 1$.

Столбцовая диаграмма случайной величины ξ имеет вид



Найдем функцию распределения $F(x) = \mathrm{P}\{\xi < x\}$ случайной величины ξ. Согласно (2.4) имеем:

при $x \le 0$ $\;F(x)=P\{\xi<x\}=0;$

при $0<x\le 1$ $\;F(x)=P\{\xi<x\}=P\{\xi=0\}=0{,}343;$

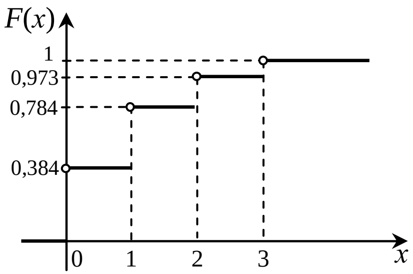
при $1<x\le 2$ $\;F(x)=P\{\xi<x\}=P\{\xi=0\}+P\{\xi=1\}=0{,}784;$

при $2<x\le 3$ $\;F(x)=P\{\xi<x\}=P\{\xi=0\}+P\{\xi=1\}+P\{\xi=2\}=0{,}973;$

при $x>3$ $\;F(x)=P\{\xi<x\}=P\{\xi=0\}+P\{\xi=1\}+P\{\xi=2\}+P\{\xi=3\}=1.$

Таким образом, функция распределения случайной величины ξ и её график имеют вид

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 0{,}343, & 0<x\le 1,\\ 0{,}784, & 1<x\le 2,\\ 0{,}973, & 2<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$



Пример 2.4 Построить ряд распределения случайной величины η, определённой в примере 2.1, если вероятность попадания в мишень остается неизменной при каждом выстреле и равна p $(0 < p < 1)$.

Решение. Случайная величина η – число выстрелов, предшествующих первому попаданию, может принимать счётное число значений 0, 1, 2, … . Событие $\{\eta = 0\}$ произойдёт в том случае, если стрелок попадёт в мишень с первого раза. Таким образом, $P\{\eta = 0\} = p$. Случайная величина η примет значение 1 в том случае, если стрелок промахнётся в первый раз и попадёт по мишени вторым выстрелом. Вероятность этого события $P\{\eta = 1\} = qp$, где q – вероятность промаха, $q = 1 - p$. Вероятность события $\{\eta = k\}$ (мишень будет поражена после k неудачных попыток) $P\{\eta = k\} = q^k p$. Ряд распределения случайной величины η имеет следующий вид:

x_i	0	1	…	k	…
p_i	p	qp	…	$q^k p$	…

Вероятности, с которыми случайная величина η принимает свои значения, образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q. Их сумма равна 1:

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = \sum_{i=0}^{\infty} q^i p = p\sum_{i=0}^{\infty} q^i = p\frac{1}{1-q} = 1.$$

Вопросы для самоконтроля

1 Какая случайная величина называется дискретной?
2 Приведите примеры дискретных случайных величин.
3 Может ли дискретная случайная величина принимать бесконечное число значений?
4 Какими способами можно задать закон распределения дискретной случайной величины?
5 Чему равна сумма вероятностей, с которыми случайная величина принимает все свои возможные значения? Почему?

2.4 Непрерывные случайные величины

Пусть (Ω, F, P) – вероятностное пространство некоторого эксперимента E.

Случайная величина ξ называется **непрерывной**, если она может принимать несчётное множество значений.

Так, в примере 2.1 время безотказной работы прибора является непрерывной случайной величиной.

Примерами непрерывных случайных величин являются: объём воды, израсходованной предприятием за месяц, толщина древесностружечной плиты (ДСП), время, необходимое для капитального ремонта жилого здания, отклонение объёма израсходованного бетона от запланированного, масса проволоки, израсходованной при изготовлении железобетонной плиты.

Дадим теперь строгое определение непрерывной случайной величины.

Случайная величина ξ называется **непрерывной**, если существует неотрицательная функция $f(x)$ такая, что функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ может быть представлена в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,\ x \in \boldsymbol{R}. \qquad (2.5)$$

Функция $f(x)$ называется **функцией плотности (плотностью распределения вероятностей, плотностью вероятностей) случайной величины** ξ. Функцию плотности $f(x)$ называют ещё **дифференциальной функцией распределения**, тогда как функцию распределения $F(x)$ называют **интегральной функцией распределения**.

На рисунках 2.3–2.4 приведены графики функции распределения $F(x)$ и функции плотности $f(x)$ соответственно.

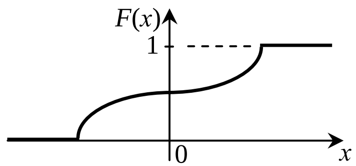


Рисунок 2.3 – График функции распределения непрерывной случайной величины

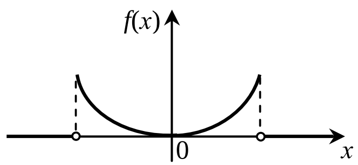


Рисунок 2.4 – График функции плотности непрерывной случайной величины

По свойству интеграла с переменным верхним пределом $F(x)$ является непрерывной функцией.

Можно дать другое (эквивалентное) определение непрерывной случайной величины. Случайная величина ξ называется **непрерывной**, если её функция распределения $F(x)$ является непрерывной.

Укажем некоторые свойства функции плотности $f(x)$:

1° $f(x) \geq 0,\ x \in \boldsymbol{R}$.

2° $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Геометрически это означает, что площадь фигуры, ограниченной графиком функции плотности и осью абсцисс, равна 1.

Свойства 1° и 2° являются «основными» в том смысле, что если для некоторой функции $f(x)$ они выполняются, то существует случайная величина ξ такая, что $f(x)$ является её функцией плотности.

3° $f(x) = F'(x)$.

4° Вероятность попадания непрерывной случайной величины в промежуток $[a;\ b)$

$$P\{a \leq \xi < b\} = \int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (2.6)$$

Геометрически это означает, что вероятность принятия непрерывной случайной величиной значения из промежутка $[a;\ b)$ равна площади фигуры, ограниченной графиком функции плотности и осью абсцисс в этом промежутке (рисунок 2.5).

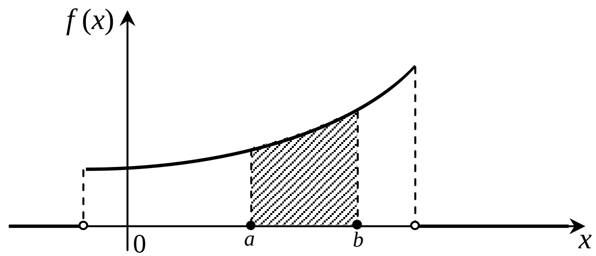


Рисунок 2.5 – Вероятность попадания непрерывной случайной величины в промежуток $[a;\ b)$.

Функция плотности, так же как и функция распределения, является законом распределения непрерывной случайной величины.

Отметим, что вероятность события $\{\xi = a\}$ для непрерывной случайной величины равна нулю. Действительно, в соответствии со свойством 5˚ функции распределения и с учетом ее непрерывности получим

$$P\{\xi = a\} = P\{a \le \xi \le a\} = F(a+0) - F(a) = 0.$$

Таким образом, для непрерывной случайной величины ξ справедливо

$$P\{a < \xi < b\} = P\{a \le \xi < b\} = P\{a < \xi \le b\} = P\{a \le \xi \le b\}.$$

Пример 2.5 Функция распределения случайной величины ξ задана выражением

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^4, & 0 \le x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найти функцию плотности данной случайной величины и вычислить вероятность того, что случайная величина ξ примет значение из промежутка [0,25; 0,5].

Решение. Найдём функцию плотности случайной величины ξ:

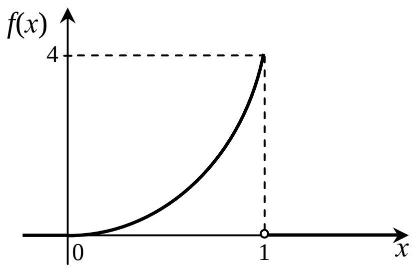
при $x \in (-\infty; 0)$ $f(x) = F'(x) = 0$;

при $x \in [0;1]$ $f(x) = F'(x) = 4x^3$;

при $x \in (1; +\infty)$ $f(x) = F'(x) = 0$.

Таким образом, функция плотности случайной величины ξ и её график имеют вид

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3, & x \in [0;1], \\ 0, & x \notin [0;1]. \end{cases}$$



Для вычисления вероятности того, что случайная величина попадёт в промежуток [0,25; 0,5], воспользуемся свойством 4˚ функции плотности:

$$P\{0{,}25 \le \xi \le 0{,}5\} = \int_{0{,}25}^{0{,}5} 4x^3 dx = x^4 \Big|_{0{,}25}^{0{,}5} = 0{,}5^4 - 0{,}25^4 =$$

$$= 0{,}0625 - 0{,}00390625 = 0{,}05859375 \approx 0{,}06.$$

Вопросы для самоконтроля

1 Какая случайная величина называется непрерывной?
2 Приведите примеры непрерывных случайных величин.
3 Перечислите свойства функции распределения непрерывной случайной величины?
4 Является ли функция плотности законом распределения случайной величины?
5 Как связаны между собой функция распределения и функция плотности?
6 Перечислите свойства функции плотности.

2.5 Совместное распределение случайных величин. Независимость случайных величин

В некоторых случаях возникает необходимость исследования не одной случайной величины, а нескольких. При этом следует учитывать, что эти величины могут оказывать влияние друг на друга. Для описания подобного взаимодействия недостаточно знать законы распределения каждой из рассматриваемых случайных величин, нужно знать закон их совместного распределения.

Рассмотрим случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, определённые на одном и том же вероятностном пространстве (Ω, F, P).

Случайным вектором $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), ..., \xi_n(\omega))$ называется отображение, которое каждому элементарному исходу $\omega \in \Omega$ ставит в соответствие *n*-мерный вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ из $\boldsymbol{R}^n$:

$$\xi : \omega \in \Omega \to \mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^n. \tag{2.7}$$

Функция

$$F(\mathbf{x}) = F_{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, ..., \xi_n < x_n\}, \ \mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^n, \tag{2.8}$$

называется **функцией распределения случайного вектора** ξ или **совместной функцией распределения случайных величин** $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Свойства функции распределения случайного вектора аналогичны свойствам функции распределения случайной величины.

Свойства совместной функции распределения:

1° $0 \le F(\mathbf{x}) \le 1, \mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^n$.

2° Совместная функция распределения непрерывна слева по каждому своему аргументу.

3° Пусть $i_1, i_2, ..., i_n$ – произвольная перестановка элементов множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, тогда

$$F_{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = F_{\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, ..., \xi_{i_n}}(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n}).$$

4° $\lim\limits_{x_i \to -\infty} F_{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0.$

5° $\lim\limits_{x_i \to +\infty} F_{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = F_{\xi_1, ..., \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, ..., \xi_n}(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n).$

6° Совместная функция распределения является неубывающей по каждому своему аргументу.

Случайный вектор ξ называется **дискретным**, если множество его возможных значений конечно или счётно. Координаты случайного дискретного вектора являются дискретными случайными величинами.

Рассмотрим для простоты двумерный дискретный случайный вектор (ξ, η). Его закон распределения можно задать в виде таблицы

x_i \ y_j	y_1	y_2	…	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2m}
…				
x_n	p_{n1}	p_{n2}	…	p_{nm}

,

которая называется **рядом распределения** двумерного дискретного вектора.

Отметим, что, как и в случае одномерной случайной величины, сумма всех вероятностей p_{ij} равна 1:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1.$$

По закону распределения случайного вектора (ξ, η) можно найти закон распределения случайных величин ξ и η. Например, распределение случайной величины ξ находится по формулам

$$p_i = P\{\xi = x_i\} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Случайный вектор ξ называется **непрерывным**, если существует неотрицательная функция $f_{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n}(x_1, x_2, ..., x_n)$ такая, что

$$F_{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} ... \int_{-\infty}^{x_n} f_{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n}(t_1, t_2, ..., t_n) dt_1\, dt_2 \ldots dt_n.$$

Функция $f_{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n}(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется **функцией плотности случайного вектора** ξ или **совместной функцией плотности случайных величин** $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Свойства совместной функции плотности:

1° $f_{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_2}(x_1, x_2, ..., x_n) \ge 0.$

2° $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_2}(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n = 1.$

3° $f_{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = \dfrac{\partial^n F_{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n}(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_n}.$

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ называются **независимыми**, если

$$F_{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = F_{\xi_1}(x_1) F_{\xi_2}(x_2) ... F_{\xi_n}(x_n), \quad x_1, x_2, ..., x_n \in \boldsymbol{R}. \quad (2.9)$$

Свойства независимых случайных величин:

1° Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – независимы. Тогда независимыми будут случайные величины $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, ..., \xi_{i_k}$, где $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n, \;\; k = \overline{2, n-1}.$

Заметим, что в определении независимых в совокупности событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ требовалось выполнение не только равенства

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n),$$

a и всей системы равенств (1.25). В определении независимых случайных величин в силу свойства 1° требуется выполнение только равенства (2.9).

2° Случайная величина ξ и величина $C = \text{const}$ являются независимыми.

3° Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – независимы. Тогда

$$f_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{\xi_1}(x_1) f_{\xi_2}(x_2) \ldots f_{\xi_n}(x_n).$$

Вопросы для самоконтроля

1 Какая функция называется функцией совместного распределения случайных величин?
2 Какие свойства функции совместного распределения случайных величин вы знаете?
3 Как можно задать закон распределения двумерной дискретной случайной величины?
4 Когда случайные величины являются независимыми?
5 Какие свойства независимых случайных величин вы знаете?

2.6 Операции над случайными величинами

Поскольку случайные величины – это функции, то над ними можно совершать операции сложения, вычитания, умножения и деления.

Пусть случайные величины ξ и η определены на одном и том же вероятностном пространстве (Ω, F, P), тогда

$$\xi + \eta,\ \xi - \eta,\ \xi \cdot \eta,\ \xi / \eta\ (\eta \neq 0),\ a\xi + b\eta$$

также являются случайными величинами, где a и b – любые действительные числа.

Это утверждение следует из определения случайной величины и из того факта, что сумма, разность, произведение и частное (если знаменатель не обращается в 0) измеримых относительно σ-алгебры F функций являются измеримыми.

Рассмотрим произведение случайной величины ξ на некоторое число a $(a \neq 0)$.

Пусть ξ – дискретная случайная величина, которая принимает значения x_i с вероятностями $p_i = P\{\xi = x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$. Тогда случайная величина $\zeta = a\xi$ будет принимать значения ax_i с вероятностями $p_i = P\{\xi = x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$.

Пусть ξ – непрерывная случайная величина с функцией распределения $F_\xi(x)$. Найдем функцию распределения случайной величины $\zeta = a\xi$.

Если $a > 0$, то

$$F_\zeta(x) = P\{\zeta < x\} = P\{a\xi < x\} = P\left\{\xi < \frac{x}{a}\right\} = F_\xi\left(\frac{x}{a}\right).$$

Если же $a < 0$, то

$$F_\zeta(x) = P\{\zeta < x\} = P\{a\xi < x\} = P\left\{\xi > \frac{x}{a}\right\} = 1 - P\left\{\xi \le \frac{x}{a}\right\} = 1 - F_\xi\left(\frac{x}{a}\right).$$

Пусть задан совместный закон распределения дискретных случайных величин ξ и η

$$P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} = p_{ij},\ i = 1, 2, \ldots;\ j = 1, 2, \ldots.$$

Тогда распределение случайной величины $\zeta = \xi + \eta$ будет иметь вид

$$P\{\zeta = z_k\} = P\{\xi + \eta = z_k\} = \sum_{i,j:\, x_i + y_j = z_k} \sum p_{ij}.$$

Аналогично распределение случайной величины $\tau = \xi \cdot \eta$ будет иметь вид

$$P\{\zeta = z_k\} = P\{\xi \cdot \eta = z_k\} = \sum_{i,j:\, x_i \cdot y_j = z_k} \sum p_{ij}.$$

Пример 2.6 Дискретная случайная величина ξ принимает значения x_i с вероятностями $p_i = P\{\xi = x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$. Найдём распределение случайной величины ξ^2.

Случайную величину ξ^2 можно представить в виде $\xi^2 = \xi \cdot \xi$. Тогда случайная величина ξ^2 принимает значения $z_i = x_i^2$ с вероятностями $p_i = P\{\xi = x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$.

Вопросы для самоконтроля

1 Является ли случайной величиной сумма (произведение) двух дискретных случайных величин? непрерывных случайных величин?

2 Можно ли дискретную случайную величину умножать на число? Как в результате изменится её ряд распределения?

3 Можно ли непрерывную случайную величину умножать на число? Как в результате изменится её функция распределения?

2.7 Числовые характеристики случайной величины

Закон распределения дает исчерпывающее описание случайной величины. В подразд. 2.2–2.4 мы уже ознакомились с некоторыми способами задания закона распределения: ряд распределения (для дискретной случайной величины), функция плотности распределения (для непрерывной случайной величины), функция распределения (универсальный способ задания закона распределения, подходящий как для дискретной, так и для непрерывной случайной величины). Однако для решения многих практических задач нужно знать некоторые числовые характеристики случайной величины, например, её среднее значение. Также с помощью числовых характеристик можно в краткой форме описать наиболее существенные особенности распределения случайной величины.

2.7.1 Числовые характеристики положения: математическое ожидание, мода, медиана

Математическим ожиданием дискретной случайной величины ξ называется число

$$M[\xi]=\sum_i x_i p_i, \tag{2.10}$$

если ряд сходится абсолютно. В противном случае говорят, что случайная величина не имеет конечного математического ожидания.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины ξ называется число

$$M[\xi]=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx, \tag{2.11}$$

если интеграл сходится абсолютно. В противном случае говорят, что случайная величина не имеет конечного математического ожидания.

Смысл математического ожидания заключается в том, что оно является средневзвешенным по вероятности значением случайной величины. Проще говоря, математическое ожидание – это среднее значение случайной величины.

Рассмотрим, например, дискретную случайную величину с конечным числом равновероятных значений. Ряд распределения такой случайной величины имеет вид

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	…	$\frac{1}{n}$

Тогда

$$M[\xi]=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n),$$

т.е. для такой случайной величины математическое ожидание есть среднее арифметическое ее значений.

Укажем некоторые свойства математического ожидания (здесь и далее будем рассматривать только случайные величины, имеющие конечные математические ожидания):

1° $M[C]=C$, где C – постоянная величина.

2° $M[C\xi]=CM[\xi]$.

3° $M[C_1\xi_1 \pm C_2\xi_2 \pm \ldots \pm C_n\xi_n] = C_1 M[\xi_1] \pm C_2 M[\xi_2] \pm \ldots \pm C_n M[\xi_n]$.

В частности,

$$M[\xi_1 \pm \xi_2 \pm \ldots \pm \xi_n] = M[\xi_1] \pm M[\xi_2] \pm \ldots \pm M[\xi_n].$$

4° $M\big[\xi - M[\xi]\big]=0$.

5° Если $P\{\alpha \le \xi \le \beta\}=1$, то $M[\xi]\in[\alpha;\beta]$.

6° Если $\xi(\omega) \le \eta(\omega)$ для любых $\omega \in \Omega$, то $M[\xi] \le M[\eta]$.

7° Если случайные величины ξ и η независимы и имеют конечные математические ожидания, то случайная величина $\xi\cdot\eta$ имеет конечное математическое ожидание, причем

$$M[\xi\cdot\eta] = M[\xi]\cdot M[\eta].$$

Замечание – Свойство 7° распространяется на случай любого конечного числа независимых случайных величин.

Пример 2.7 Дискретная случайная величина ξ задана рядом распределения

x_i	4	6	x_3
p_i	0,25	p_2	0,25

Определить x_3 и p_2, если известно, что $M[\xi]=7$.

Решение. Поскольку $\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$, то $p_2 = 1 - 0{,}25 - 0{,}25 = 0{,}5$.

$$M[\xi] = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = 4\cdot 0{,}25 + 6\cdot 0{,}5 + x_3 \cdot 0{,}25 = 1 + 3 + x_3 \cdot 0{,}25 = 7,$$

отсюда $x_3 = \dfrac{7-1-3}{0{,}25} = 12$.

Модой дискретной случайной величины ξ называется такое значение случайной величины *m*, для которого выполняются неравенства

$$p_{m-1} \le p_m \text{ и } p_m \ge p_{m+1}.$$

Модой непрерывной случайной величины ξ называется точка максимума (локального) функции плотности $f(x)$.

Моду будем обозначать $Mod[\xi]$.

Если распределение случайной величины имеет одну, две и большее число мод, то такое распределение называется соответственно **унимодальным** (рисунки 2.6–2.7), **бимодальным** (рисунки 2.8–2.9) и **полимодальным**.

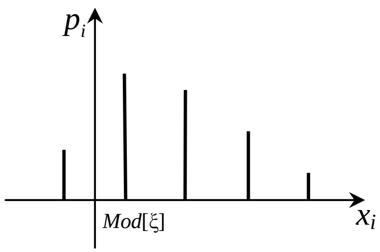


Рисунок 2.6 – Мода дискретной случайной величины

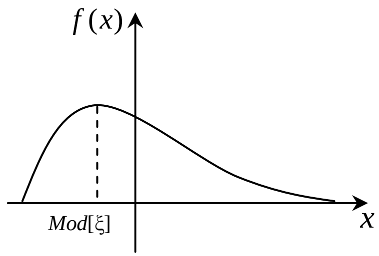


Рисунок 2.7 – Мода непрерывной случайной величины

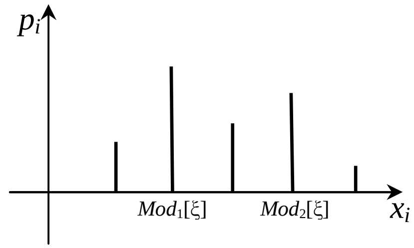


Рисунок 2.8 – Мода дискретной случайной величины

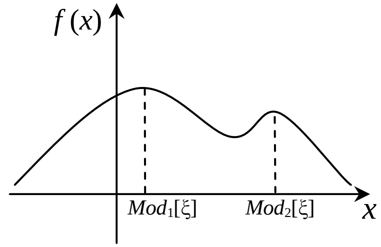


Рисунок 2.9 – Мода непрерывной случайной величины

Медианой случайной величины ξ называется такое число *m*, для которого выполняются неравенства

$$F(m) \le \frac{1}{2} \text{ и } F(m+0) \ge \frac{1}{2}.$$

Медиану будем обозначать $Med[\xi]$.

Для непрерывной случайной величины ξ можно дать следующее (эквивалентное) определение. **Медианой** случайной величины ξ называется корень уравнения

$$F(x) = \frac{1}{2}. \qquad (2.12)$$

Другими словами, для непрерывной случайной величины ξ одинаково вероятно, примет случайная величина ξ значение больше, чем $Med[\xi]$, или же меньше, чем $Med[\xi]$, т.е.

$$P\{\xi < Med[\xi]\} = P\{\xi > Med[\xi]\} = 0{,}5.$$

Любая случайная величина имеет хотя бы одну медиану. Если $F(x) = 1/2$ для всех *x* из некоторого промежутка, то каждая точка этого промежутка является медианой.

Геометрический смысл медианы непрерывной случайной величины заключается в том, что перпендикуляр к оси абсцисс, проведенный через медиану, делит фигуру, ограниченную графиком функции плотности и осью абсцисс, на две равные по площади части (рисунок 2.10).

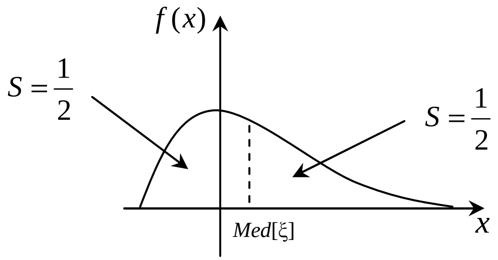


Рисунок 2.10 – Медиана непрерывной случайной величины

Если функция плотности является симметричной и у случайной величины существует конечное математическое ожидание, то медиана равна математическому ожиданию.

2.7.2 Числовые характеристики рассеяния: дисперсия, среднее квадратическое отклонение. Моменты

Помимо характеристик положения для описания случайной величины необходимо использовать и другие характеристики. Действительно, легко привести пример двух случайных величин, которые имеют равные математические ожидания, но в то же время принимают различные значения.

Например, пусть случайные величины ξ и η – заработные платы двух работников некоторого предприятия, измеряющиеся в некоторых условных единицах (у.е.). Предположим, что ξ и η имеют следующие законы распределения:

x_i	49	51
p_i	1/2	1/2

y_i	1	50	99
p_i	1/3	1/3	1/3

Тогда

$$M[\xi] = \sum_{i=1}^{2} x_i p_i = 49 \cdot 1/2 + 51 \cdot 1/2 = 1/2\,(49 + 51) = 50 \text{ (у.е.).}$$

$$M[\eta] = \sum_{i=1}^{3} y_i p_i = 1 \cdot 1/3 + 50 \cdot 1/3 + 99 \cdot 1/3 = 1/3\,(1 + 50 + 99) = 50 \text{ (у.е.).}$$

Мы видим, что средние заработные платы у этих работников одинаковы, однако сами заработные платы могут существенно отличаться. Таким образом, математическое ожидание не всегда дает исчерпывающую информацию о случайной величине, важно ещё оценить отклонение значений случайной величины ξ от её среднего значения. Казалось бы, что для этого можно использовать величину $M\big[\xi - M[\xi]\big]$ или $M\big[|\xi - M[\xi]|\big]$. Но согласно свойству 4° математического ожидания $M\big[\xi - M[\xi]\big] = 0$ и, следовательно, не является информативной, а $M\big[|\xi - M[\xi]|\big]$ чаще всего трудно вычислить.

Характеристикой степени рассеяния значений случайной величины вокруг её математического ожидания является дисперсия.

Дисперсией случайной величины ξ называется число

$$D[\xi] = M\big[(\xi - M[\xi])^2\big]. \tag{2.13}$$

В случае дискретной случайной величины дисперсию можно найти по формуле

$$D[\xi] = \sum_i (x_i - M[\xi])^2 p_i\,. \tag{2.14}$$

Для непрерывной случайной величины

$$D[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[\xi])^2 \cdot f(x)dx\,. \tag{2.15}$$

Замечание – При вычислении дисперсии предполагается, что у случайной величины существует конечное математическое ожидание. Дисперсия, так же как и математическое ожидание, существует не у всех случайных величин.

Найдем дисперсию для случайных величин ξ и η из предыдущего примера:

$$D[\xi]=\sum_{i=1}^{2}(x_i-M[\xi])^2 p_i=(49-50)^2\cdot 1/2+(51-50)^2\cdot 1/2=1 \text{ (у.е.}^2).$$

$$D[\eta]=\sum_{i=1}^{3}(y_i-M[\eta])^2 p_i=(1-50)^2\cdot 1/3+(50-50)^2\cdot 1/3+$$
$$+(99-50)^2\cdot 1/3=2\cdot 49^2/3 \text{ (у.е.}^2).$$

Таким образом, дисперсия случайной величины η намного больше (в $2\cdot 49^2/3$ раз), чем дисперсия случайной величины ξ, т.е. заработная плата первого работника не сильно отклоняется от среднего значения, в то время как у второго работника заработная плата может иметь существенный "разброс". Сравнивая возможные значения случайных величин со средним значением, можно сделать этот же вывод.

Отметим, что вычисление дисперсии по формулам (2.14)–(2.15) является достаточно трудоемким процессом. Часто бывает удобно воспользоваться следующей формулой:

$$D[\xi]=M[\xi^2]-(M[\xi])^2. \tag{2.16}$$

Действительно, по определению $D[\xi]=M\left[(\xi-M[\xi])^2\right]$. Учитывая, что $M[\xi]$ и $M[\xi^2]$ – это некоторые числа, и применяя свойства математического ожидания 2° и 3°, получим

$$D[\xi]=M[(\xi-M[\xi])^2]=M[\xi^2-2\xi M[\xi]+(M[\xi])^2]=$$
$$=M[\xi^2]-M[2\xi M[\xi]]+M[(M[\xi])^2]=$$
$$=M[\xi^2]-2M[\xi]\cdot M[\xi]+(M[\xi])^2=M[\xi^2]-(M[\xi])^2.$$

Используя (2.16), формулу для вычисления дисперсии дискретной случайной величины можно записать в следующем виде:

$$D[\xi]=\sum_i x_i^2 p_i-(M[\xi])^2, \tag{2.17}$$

а для непрерывной –

$$D[\xi]=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)dx-(M[\xi])^2. \tag{2.18}$$

Из формулы (2.16) следует, что если случайная величина ξ^2 имеет конечное математическое ожидание, то и у случайной величины ξ существуют конечные математическое ожидание и дисперсия.

Укажем некоторые свойства дисперсии:

1° $D[\xi]\ge 0$.

2° $D[C]=0$, где C – постоянная величина.

3° $D[C\xi]=C^2D[\xi]$.

4° $D[C+\xi]=D[\xi]$.

5° Если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ попарно независимы, то

$$D[C_1\xi_1\pm C_2\xi_2\pm\ldots\pm C_n\xi_n]=C_1^2D[\xi_1]+C_2^2D[\xi_2]+\ldots+C_n^2D[\xi_n].$$

В частности,

$$D[\xi_1\pm\xi_2\pm\ldots\pm\xi_n]=D[\xi_1]+D[\xi_2]+\ldots+D[\xi_n].$$

Заметим, что дисперсия случайной величины имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины, что не всегда удобно при решении практических задач.

Средним квадратическим отклонением (стандартным отклонением) случайной величины ξ называется число

$$\sigma[\xi]=\sqrt{D[\xi]}. \tag{2.19}$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma[\xi]$, так же как и $D[\xi]$, показывает степень отклонения значений случайной величины ξ от $M[\xi]$. Можно сказать, что среднее квадратическое отклонение случайной величины есть "расстояние" между значениями случайной величины и средним значением. Среднее квадратическое отклонение случайной величины имеет ту же размерность, что и случайная величина.

Основные свойства среднего квадратического отклонения вытекают из свойств дисперсии:

1° $\sigma[C]=0$.

2° $\sigma[C\xi]=|C|\sigma[\xi]$.

3° $\sigma[C+\xi]=\sigma[\xi]$.

4° Если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ попарно независимы, то

$$\sigma[\xi_1\pm\xi_2\pm\ldots\pm\xi_n]=\sqrt{(\sigma[\xi_1])^2+(\sigma[\xi_2])^2+\ldots+(\sigma[\xi_n])^2}.$$

Коэффициентом вариации случайной величины ξ называется число

$$V[\xi] = \frac{\sigma[\xi]}{M[\xi]}. \quad (2.20)$$

Коэффициент вариации определён для случайной величины ξ, у которой $M[\xi] > 0$. Коэффициент вариации – безразмерная характеристика отклонения значений случайной величины от среднего значения. Иногда коэффициент вариации приводится к процентам:

$$V[\xi] = 100\,\%\,\frac{\sigma[\xi]}{M[\xi]}.$$

Начальным моментом *k*-го порядка случайной величины ξ называется математическое ожидание величины ξ^k:

$$\nu_k = M[\xi^k]. \quad (2.21)$$

Центральным моментом *k*-го порядка случайной величины ξ называется математическое ожидание величины $(\xi - M[\xi])^k$:

$$\mu_k = M[(\xi - M[\xi])^k]. \quad (2.22)$$

Легко заметить, что

1° $\nu_1 = M[\xi]$.

2° $\nu_2 = M[\xi^2]$.

3° $\mu_1 = M[\xi - M[\xi]] = 0$.

4° $\mu_2 = M[(\xi - M[\xi])^2] = \nu_2 - \nu_1^2 = D[\xi]$.

Центральный момент третьего порядка μ_3 часто используют для характеристики асимметрии распределения.

Коэффициентом асимметрии (скошенности) случайной величины ξ называется число

$$A[\xi] = \frac{\mu_3}{\sigma^3[\xi]} = \frac{M[(\xi - M[\xi])^3]}{\sigma^3[\xi]}. \quad (2.23)$$

Графики функций плотности случайных величин с положительным и отрицательным коэффициентами асимметрии изображены на рисунке 2.11. Если распределение случайной величины ξ симметрично относительно математического ожидания $M[\xi]$, то $A[\xi]=0$.

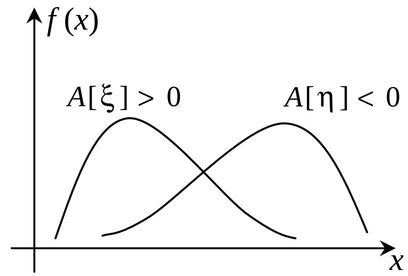


Рисунок 2.11 – Графики функций плотности случайных величин с положительным и отрицательным коэффициентами асимметрии

Центральный момент четвертого порядка μ_4 можно использовать для характеристики островершинности распределения.

Коэффициентом эксцесса случайной величины ξ называется число

$$E[\xi] = \frac{\mu_4}{\sigma^4[\xi]} - 3 = \frac{M[(\xi - M[\xi])^4]}{\sigma^4[\xi]} - 3. \quad (2.24)$$

Графики функций плотности случайных величин с положительным и отрицательным коэффициентами эксцесса изображены на рисунке 2.12.

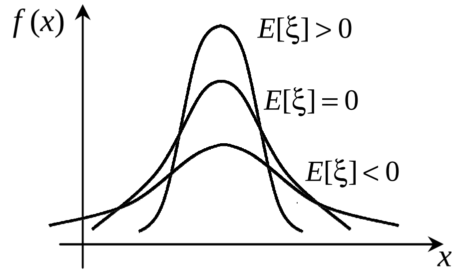


Рисунок 2.12 – Графики функций плотности случайных величин с различными коэффициентами эксцесса

При помощи коэффициента эксцесса островершинность произвольного закона распределения сравнивается с островершинностью нормального закона, для которого отношение $\mu_4 / \sigma^4[\xi]$ равно 3.

Коэффициенты асимметрии и эксцесса используются в основном при исследовании непрерывных случайных величин.

Пример 2.8 Из десяти отопительных конвекторов три являются бракованными. Контролёр для осмотра отбирает три конвектора. Случайная величина ξ – число бракованных конвекторов среди выбранных. Определить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и моду данной случайной величины.

Решение. Построим ряд распределения случайной величины ξ. Данная случайная величина может принимать четыре значения: 0, 1, 2, 3.

Рассмотрим события

A_i = {i-тый конвектор окажется бракованным}, i = 1, 2, 3.

События $\{\xi = j\}$, j = 0, 1, 2, 3, можно представить в виде

$\{\xi = 0\} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$;

$\{\xi = 1\} = (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3)$;

$\{\xi = 2\} = (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3)$;

$\{\xi = 3\} = A_1 \cap A_2 \cap A_3$.

Применяя теорему сложения вероятностей для несовместных событий и теорему умножения вероятностей для зависимых событий, имеем:

$$P\{\xi = 0\} = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2 \mid \bar{A}_1)P(\bar{A}_3 \mid \bar{A}_1\bar{A}_2) = \frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8} = \frac{7}{24};$$

$$P\{\xi = 1\} = P(A_1)P(\bar{A}_2 \mid A_1)P(\bar{A}_3 \mid A_1\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1)P(A_2 \mid \bar{A}_1)P(\bar{A}_3 \mid \bar{A}_1 A_2) +$$

$$+ P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2 \mid \bar{A}_1)P(A_3 \mid \bar{A}_1\bar{A}_2) = \frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{6}{8} + \frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{8} + \frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{3}{8} = \frac{21}{40};$$

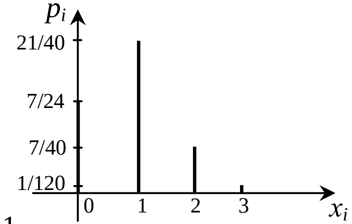
$$P\{\xi = 2\} = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(\bar{A}_3 \mid A_1 A_2) + P(A_1)P(\bar{A}_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1\bar{A}_2) +$$

$$+ P(\bar{A}_1)P(A_2 \mid \bar{A}_1)P(A_3 \mid \bar{A}_1 A_2) = \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{8} + \frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{2}{8} + \frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8} = \frac{7}{40};$$

$$P\{\xi = 3\} = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 A_2) = \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{120}.$$

Таким образом, ряд распределения случайной величины ξ имеет вид

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$



Проверим, что $\sum_{i=1}^{4} p_i = \frac{7}{24} + \frac{21}{40} + \frac{7}{40} + \frac{1}{120} = 1$.

Определим математическое ожидание случайной величины ξ. Для этого воспользуемся формулой (2.10):

$$M[\xi] = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 0\cdot\frac{7}{24} + 1\cdot\frac{21}{40} + 2\cdot\frac{7}{40} + 3\cdot\frac{1}{120} = \frac{21}{40} + \frac{14}{40} + \frac{3}{120} = \frac{9}{10}.$$

Дисперсию и среднее квадратическое отклонение определим по формулам (2.17) и (2.19) соответственно:

$$D[\xi] = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 p_i - (M[\xi])^2 =$$

$$= 0^2\cdot\frac{7}{24} + 1^2\cdot\frac{21}{40} + 2^2\cdot\frac{7}{40} + 3^2\cdot\frac{1}{120} - \left(\frac{9}{10}\right)^2 = \frac{49}{100}.$$

$$\sigma[\xi] = \sqrt{D[\xi]} = \sqrt{\frac{49}{100}} = \frac{7}{10}.$$

Как следует из ряда распределения, $Mod[\xi] = 1$.

Пример 2.9 Определить числовые характеристики случайной величины ξ, определённой в примере 2.5.

Решение. Функция плотности случайной величины ξ имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3, & x \in [0;1], \\ 0, & x \notin [0;1]. \end{cases}$$

Математическое ожидание найдем по формуле (2.11)

$$M[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x\cdot 0dx + \int_{0}^{1} x\cdot 4x^3dx + \int_{1}^{+\infty} x\cdot 0dx = \left.\frac{4x^5}{5}\right|_0^1 = \frac{4}{5} = 0{,}8,$$

дисперсию – по формуле (2.18)

$$D[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - (M[\xi])^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0dx + \int_{0}^{1} x^2 \cdot 4x^3dx + \int_{1}^{+\infty} x^2 \cdot 0dx - \left(\frac{4}{5}\right)^2 =$$

$$= \frac{2x^6}{3}\Bigg|_0^1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{2}{3} - \frac{16}{25} = \frac{2}{75} \approx 0{,}027.$$

Среднее квадратическое отклонение определим по формуле (2.19):

$$\sigma[\xi] = \sqrt{0{,}027} \approx 0{,}16\,.$$

Функция плотности случайной величины ξ достигает своего максимума в точке $x = 1$, поэтому $Mod[\xi]=1$.

Функция распределения случайной величины ξ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x^4, & 0 \le x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Для определения медианы воспользуемся равенством (2.12):

$$F(x) = 0{,}5.$$

В интервале $(-\infty;\ 0)$ $F(x) = 0,$ в интервале $(1;\ +\infty)$ $F(x) = 1,$ поэтому решение данного уравнения будем искать только в отрезке $[0;\ 1]$:

$$x^4 = 0{,}5.$$

Решая это уравнение, получим $x = \pm\sqrt[4]{0{,}5}.$

Поскольку $x = -\sqrt[4]{0{,}5} \notin [0;1],$ то $Med[\xi] = \sqrt[4]{0{,}5} \approx 0{,}84\,.$

Вопросы для самоконтроля

1 Что называется математическим ожиданием дискретной случайной величины? непрерывной случайной величины?

2 Верно ли, что любая случайная величина имеет конечное математическое ожидание?

3 В чём заключается смысл математического ожидания?

4 Перечислите свойства математического ожидания случайной величины.

5 Что называется модой дискретной случайной величины? непрерывной случайной величины?

6 Может ли распределение случайной величины иметь больше одной моды? не иметь ни одной моды?

7 Что называется медианой случайной величины?

8 Может ли случайная величина не иметь медианы?

9 В чём заключается геометрический смысл медианы?

10 Может ли медиана равняться математическому ожиданию? В каком случае?

11 Что характеризует дисперсия случайной величины?

12 Верно ли, что дисперсия существует для любой случайной величины?

13 Что называется средним квадратическим отклонением случайной величины?

14 Какую размерность имеет дисперсия? среднее квадратическое отклонение?

15 Чем отличаются начальные и центральные моменты k-го порядка случайной величины?

2.8 Основные законы распределения случайных величин

2.8.1 Биномиальный закон распределения

Случайная величина ξ имеет **биномиальный закон распределения** с параметрами n и p, если она может принимать конечное число значений 0, 1, 2, …, n с вероятностями, которые определяются по формуле Бернулли:

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k},\ k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

где $n \ge 1$, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$.

Обозначается $\xi \sim Bi(n,\ p)$.

Построим ряд распределения случайной величины ξ:

x_i	0	1	…	k	…	n
p_i	q^n	npq^{n-1}		$C_n^k p^k q^{n-k}$		p^n

Биномиальному закону распределения подчиняется случайная величина, характеризующая число успехов в n испытаниях Бернулли.

Выражение $C_n^k p^k q^{n-k}$ является членом бинома Ньютона:

$$(p+q)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots + C_n^0 q^n.$$

Именно поэтому распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли, называется биномиальным.

Поскольку $p + q = 1$, то сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины равна 1.

В зависимости от значений параметров распределения столбцовая диаграмма случайной величины ξ может иметь вид, представленный на рисунке 2.13.

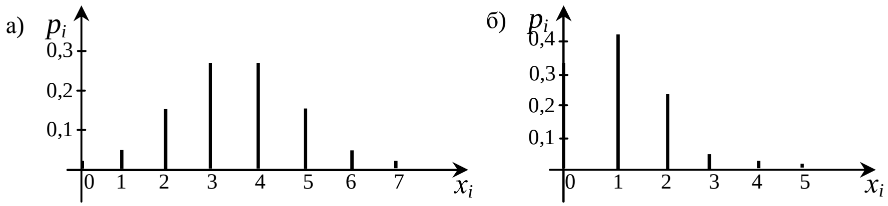


Рисунок 2.13 – Столбцовая диаграмма случайной величины, распределённой по биномиальному закону с параметрами: $n = 7$ и $p = 0{,}5$ (*а*); $n = 5$ и $p = 0{,}2$ (*б*)

Основные числовые характеристики случайной величины, распределённой по биномиальному закону,

$$M[\xi] = np,\ D[\xi] = npq,\ \sigma[\xi] = \sqrt{npq}. \qquad (2.25)$$

Модой случайной величины ξ, распределённой по биномиальному закону, является целое число k^*, удовлетворяющее системе неравенств

$$np - q \le k^* \le np + p.$$

Как было показано в пункте 1.6.1 при определении наиболее вероятного числа успехов в испытаниях Бернулли, случайная величина ξ может иметь одну или две моды.

Пример 2.10 В осветительную сеть было подключено 10 энергосберегающих ламп. Каждая лампа в течение года перегорает с вероятностью 0,2. Определить среднее число ламп, которые перегорят в течение года.

Решение. Рассмотрим случайную величину ξ – число ламп, которые перегорят в течение года. Возможные значения случайной величины ξ: 0, 1, …, 10. Таким образом, случайная величина ξ характеризует количество наступлений события A = {лампа перегорит в течение года} в 10 независимых испытаниях, причём вероятность наступления события A в каждом испытании остаётся неизменной:

$P(A) = 0{,}2$. Следовательно, ξ имеет биномиальный закон распределения с параметрами $n = 10$ и $p = 0{,}2$, т.е. $\xi \sim Bi(10; 0{,}2)$.

Для того чтобы определить среднее число ламп, которые перегорят в течение года, найдём математическое ожидание случайной величины ξ по формуле (2.25):

$$M[\xi] = 10 \cdot 0{,}2 = 2 \text{ [лампы]}.$$

2.8.2 Распределение Пуассона

Случайная величина ξ распределена по **закону Пуассона** с параметром a, $a > 0$, если она принимает счётное число значений 0, 1, 2, …, k, …, с вероятностями, которые определяются по формуле Пуассона:

$$P\{\xi = k\} = \frac{a^k e^{-a}}{k!},\ k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Обозначается $\xi \sim \Pi(a)$.

Построим ряд распределения случайной величины ξ:

x_i	0	1	2	…	k	…
p_i	e^{-a}	ae^{-a}	$\dfrac{a^2e^{-a}}{2}$	…	$\dfrac{a^k e^{-a}}{k!}$	...

Убедимся, что $\sum\limits_{i=0}^{\infty} p_i = e^{-a} \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{a^i}{i!} = e^{-a} \cdot e^{a} = 1$.

В зависимости от значения параметра распределения столбцовая диаграмма случайной величины ξ может иметь вид, представленный на рисунке 2.14.

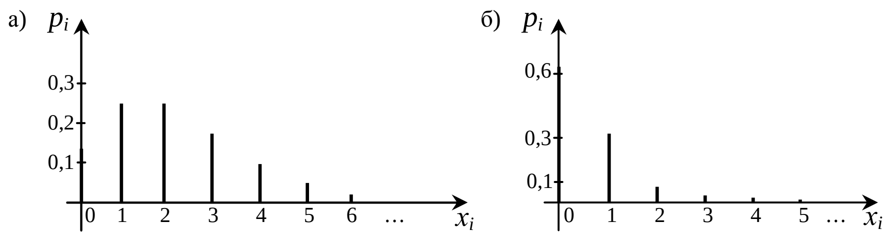


Рисунок 2.14 – Столбцовая диаграмма случайной величины, распределённой по закону Пуассона с параметром: $a = 2$ (*а*); $a = 0{,}5$ (*б*)

Примерами случайных величин, распределённых по закону Пуассона, являются: число вызовов, поступающих на телефонную станцию за время t, число отказов оборудования в течение рабочей смены, число вирусных атак на рабочую станцию за час нахождения в сети Интернет.

Основные числовые характеристики случайной величины, распределённой по закону Пуассона,

$$M[\xi]=a,\ D[\xi]=a,\ \sigma[\xi]=\sqrt{a}. \tag{2.26}$$

Если a – целое число, то случайная величина ξ имеет две моды:

$$Mod_1[\xi]=a \text{ и } Mod_2[\xi]=a-1. \tag{2.27}$$

Если a – дробное число, то случайная величина ξ имеет одну моду, которая равна целой части a.

Закон распределения Пуассона является предельным для биномиального распределения при больших значениях n и малых значениях p $(0 < p < 0{,}1)$, при этом $a = np$.

Пример 2.11 0,2 % произведённых паркетных щитов не удовлетворяют ГОСТ 862.4. Какова вероятность того, что из 400 паркетных щитов требованиям ГОСТ не удовлетворяет: а) хотя бы один щит? б) не более двух щитов?

Решение. Рассмотрим случайную величину ξ – число щитов, не удовлетворяющих требованиям ГОСТ. Её возможные значения: 0, 1, …, 400. Данная случайная величина распределена по биномиальному закону с параметрами $n = 400$ и $p = 0{,}002$.

Введем события A = {требованиям ГОСТ не удовлетворяет хотя бы один щит} и B = {требованиям ГОСТ не удовлетворяет не более двух щитов}.

$P(A) = P\{\xi \geq 1\} = 1 - P\{\xi = 0\}$;

$P(B) = P\{\xi \leq 2\} = P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\} + P\{\xi = 2\}$.

Так как число испытаний n велико, а вероятность успеха $p = 0{,}002$ мала $(p < 0{,}1)$, то для определения вероятностей событий $\{\xi = k\}$ воспользуемся формулой Пуассона ($a = np = 400 \cdot 0{,}002 = 0{,}8$). Получим:

$$P(A) = 1 - P\{\xi = 0\} \approx 1 - \frac{0{,}8^0 e^{-0{,}8}}{0!} \approx 0{,}5507.$$

$$P(B) = P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\} + P\{\xi = 2\} \approx$$

$$\approx \frac{0{,}8^0 e^{-0{,}8}}{0!} + \frac{0{,}8^1 e^{-0{,}8}}{1!} + \frac{0{,}8^2 e^{-0{,}8}}{2!} \approx 0{,}4493 + 0{,}3595 + 0{,}1438 = 0{,}9526.$$

Потоком событий называют последовательность событий, наступающих в случайные моменты времени (поток посетителей в магазине, поток вызовов на АТС и т. д.).

Поток событий называется **простейшим** или **пуассоновским**, если вероятность появления k событий за время t определяется по формуле Пуассона

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!},\ k \geq 0, \tag{2.28}$$

где λ – интенсивность потока $(\lambda > 0)$.

Иными словами, случайная величина ξ – число событий простейшего потока за время t – имеет распределение Пуассона с параметром $a = \lambda t$.

Отсюда следует, что *среднее число событий* простейшего потока, наступающих за время t, есть λt.

Можно дать другое эквивалентное определение простейшего потока. Для этого введём следующие определения.

Поток событий называется **стационарным**, если вероятность появления того или иного числа событий в непересекающиеся промежутки времени зависит только от этих чисел и длин промежутков и не зависит от расположения этих промежутков на временной оси.

Поток событий называется **ординарным**, если вероятность того, что за бесконечно малый промежуток времени может наступить более чем одно событие, пренебрежимо мала. Иными словами, поток событий является ординарным, если события наступают не группами, а поодиночке.

Поток событий называется потоком **без последействия**, если имеет место независимость появления того или иного числа событий в непересекающиеся промежутки времени. Иными словами, «будущее» потока не зависит от его «прошлого» при фиксированном «настоящем».

Поток событий называется **простейшим**, если он стационарный, ординарный и без последействия.

Пример 2.12 На основании статистических данных известно, что в дневное время суток в диспетчерскую службы по обслуживанию лифтов поступает в среднем 6 обращений в час. Считая поток обращений простейшим, определить вероятность того, что в течение 20 минут поступит более 5 обращений.

Решение. Так как поток обращений является простейшим, то случайная величина ξ, определяющая число обращений в течение 20 минут, распределена по закону Пуассона с параметром $a = \lambda t = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2.$

Рассмотрим событие A = {в течение 20 минут поступит более 5 обращений}. Тогда

$$P(A) = P\{\xi > 5\} = 1 - P\{\xi \le 5\} =$$
$$= 1 - \left(P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\} + P\{\xi = 2\} + P\{\xi = 3\} + P\{\xi = 4\} + P\{\xi = 5\}\right) =$$
$$= 1 - \left[\frac{2^0 e^{-2}}{0!} + \frac{2^1 e^{-2}}{1!} + \frac{2^2 e^{-2}}{2!} + \frac{2^3 e^{-2}}{3!} + \frac{2^4 e^{-2}}{4!} + \frac{2^5 e^{-2}}{5!}\right] \approx$$
$$\approx 1 - 0{,}983 = 0{,}017.$$

2.8.3 Геометрический закон распределения

Случайная величина ξ имеет **геометрический закон распределения** с параметром p, если она принимает счётное число значений 0, 1, 2, …, k, …, с вероятностями, которые определяются по формуле

$$P\{\xi = k\} = q^k p, \ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$.

Обозначается $\xi \sim G(p)$.

Случайная величина, имеющая геометрический закон распределения, определяет число испытаний, предшествующих первому появлению события A, которое с вероятностью p может произойти в каждом отельном испытании.

Иногда считают, что случайная величина имеет геометрическое распределение, если она определяет номер испытания, в котором впервые произошло событие A. При таком определении случайная величина, подчинённая геометрическому закону распределения, может принимать значения 1, 2, …, с вероятностями $P\{\xi = k\} = q^{k-1}p$.

Построим ряд распределения случайной величины ξ:

x_i	0	1	2	…	k	…
p_i	p	qp	q^2p	…	q^kp	…

Геометрическое распределение называется именно так потому, что вероятности p, qp, q^2p, … образуют геометрическую прогрессию. Убедимся, что $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = \sum_{i=0}^{\infty} q^i p = p \sum_{i=0}^{\infty} q^i = p \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$

В зависимости от значения параметра распределения столбцовая диаграмма случайной величины ξ может иметь вид, представленный на рисунке 2.15.

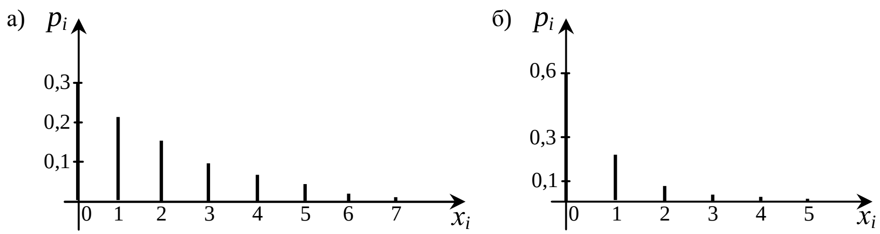


Рисунок 2.15 – Столбцовая диаграмма случайной величины, распределённой по геометрическому закону с параметром: p = 0,3 (*а*); p = 0,6 (*б*)

Примерами случайных величин, распределённых по геометрическому закону, являются: число выстрелов по мишени до первого попадания, число испытаний прибора до первого отказа, число подбрасываний монеты до первого выпадения герба.

Основные числовые характеристики случайной величины, распределённой по геометрическому закону,

$$M[\xi] = \frac{1-p}{p}, \ D[\xi] = \frac{1-p}{p^2}, \ \sigma[\xi] = \frac{\sqrt{1-p}}{p}, \ Mod[\xi] = 0. \qquad (2.29)$$

Пример 2.13 Вероятность того, что попытка модемного соединения с сервером завершится успешно, неизменна для каждой попытки и равна 0,8. Пользователь пытается установить модемное соединение с сервером. Определить среднее число неудачных попыток соединения.

Решение. Рассмотрим событие A = {пользователь установит соединение с сервером} и случайную величину ξ, определяющую число испытаний, предшествующих первому наступлению события A. Так как вероятность наступления события A постоянна в каждом испытании $P(A) = 0,8$, то ξ имеет геометрический закон распределения с параметром $p = 0,8$, т.е. $\xi \sim G(0{,}8)$. Среднее число неудачных попыток соединения с сервером характеризуется математическим ожиданием случайной величины ξ. Определим его по формуле (2.29):

$$M[\xi] = \frac{1-0{,}8}{0{,}8} = 0{,}25\,[\text{попыток}].$$

2.8.4 Равномерный закон распределения

Случайная величина ξ имеет **равномерный закон распределения** с параметрами a и b, $a < b$, если её функция плотности имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a; b], \\ 0, & x \notin [a; b]. \end{cases}$$

Обозначается $\xi \sim R(a;b)$.

Таким образом, случайная величина ξ, имеющая равномерный закон распределения с параметрами a и b, принимает значения из отрезка $[a; b]$.

Определим функцию распределения данной случайной величины

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt:$$

при $x \in (-\infty; a]$ $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$;

при $x \in (a;\, b]$ $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} 0dt + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}dt = \left.\frac{t}{b-a}\right|_a^x = \frac{x-a}{b-a}$;

при $x \in (b; +\infty]$ $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} 0dt + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}dt + \int_{b}^{x} 0dt = \left.\frac{t}{b-a}\right|_a^b = 1$.

Таким образом, функция распределения случайной величины ξ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

На рисунках 2.16–2.17 приведены графики функции плотности $f(x)$ и функции распределения $F(x)$ равномерно распределённой случайной величины.

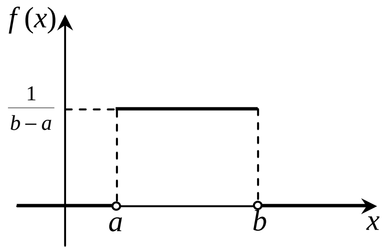


Рисунок 2.16 – График функции плотности равномерно распределённой случайной величины

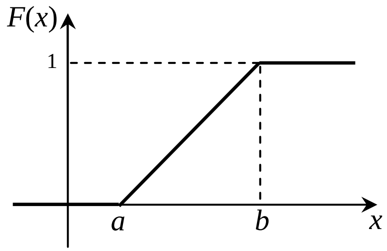


Рисунок 2.17 – График функции распределения равномерно распределённой случайной величины

Случайными величинами, имеющими равномерный закон распределения, являются, например, время ожидания пассажиром транспорта, идущего с постоянным интервалом, величина погрешности при округлении данных.

На практике мы можем лишь предполагать, что указанные случайные величины имеют равномерный закон распределения, поскольку напомним, что в рамках теории вероятностей строятся модели случайных экспериментов. Это предположение можно принять или опровергнуть методами математической статистики на основании экспериментальных данных, т.е. методами математической статистики проверяется адекватность модели. Данное замечание относится и к другим законам распределения.

Пример 2.14 Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины $\xi \sim R(a; b)$.

Решение. Согласно (2.11) математическое ожидание непрерывной случайной величины

$$M[\xi]=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx=\int_{-\infty}^{a} x\cdot 0dx+\int_{a}^{b}\frac{xdx}{b-a}+\int_{b}^{+\infty} x\cdot 0dx=\left.\frac{x^2}{2(b-a)}\right|_a^b=$$

$$=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}.$$

Используя формулы (2.18) и (2.19), вычислим дисперсию и среднее квадратическое отклонение:

$$D[\xi]=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)dx-\left(M[\xi]\right)^2=\int_{-\infty}^{a} x^2\cdot 0dx+\int_{a}^{b}\frac{x^2dx}{b-a}+\int_{b}^{+\infty} x^2\cdot 0dx-\frac{(a+b)^2}{4}=$$

$$=\int_a^b\frac{x^2dx}{b-a}-\frac{(a+b)^2}{4}=\left.\frac{x^3}{3(b-a)}\right|_a^b-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\frac{(a+b)^2}{4}=$$

$$=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{b^2+2ab+a^2}{4}=\frac{b^2-2ab+a^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

$$\sigma[\xi]=\sqrt{D[\xi]}=\sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Основные числовые характеристики случайной величины, распределённой по равномерному закону,

$$M[\xi]=\frac{a+b}{2},\ D[\xi]=\frac{(b-a)^2}{12},$$
$$\sigma[\xi]=\frac{b-a}{2\sqrt{3}},\quad Med[\xi]=\frac{a+b}{2}, \tag{2.30}$$
$$A[\xi]=0,\quad E[\xi]=-1{,}2,$$
$$Mod[\xi]\in[a;b].$$

Модой случайной величины, распределённой по равномерному закону, является любое число, принадлежащее отрезку [a; b].

Пример 2.15 Поезда минского метрополитена идут с интервалом в две минуты. Пассажир подходит к перрону в произвольный момент времени. Определить вероятность того, что время ожидания не будет превышать 30 с. Найти среднее время ожидания пассажиром поезда.

Решение. Рассмотрим непрерывную случайную величину ξ – время ожидания пассажиром поезда. Поскольку поезда приходят через одинаковый интервал времени, а пассажир подходит к перрону в произвольный момент времени (мы предполагаем, что пассажир не знает расписания движения поездов), то время ожидания пассажиром поезда равновозможно в интервале [0; 2], т.е. $\xi\sim R(0;2)$. Функция плотности случайной величины ξ имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2},\ x\in[0;2],\\ 0,\ \ x\notin[0;2].\end{cases}$$

Рассмотрим событие A = {пассажир будет ожидать поезд не более 30 с.}. Переводя секунды в минуты, имеем

$$P(A)=P\{0\le\xi\le 0{,}5\}=\int_0^{0{,}5}f(x)dx=\int_0^{0{,}5}\frac{1}{2}dx=\left.\frac{x}{2}\right|_0^{0{,}5}=\frac{0{,}5}{2}=0{,}25.$$

Вычислим среднее время ожидания по формуле (2.30):

$$M[\xi]=\frac{0+2}{2}=1\ [\text{минута}].$$

2.8.5 Показательный (экспоненциальный) закон распределения

Случайная величина ξ имеет **показательный (экспоненциальный) закон распределения** с параметром λ, $\lambda>0$, если её функция плотности имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty;0),\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\in[0;+\infty).\end{cases}$$

Обозначается $\xi\sim E(\lambda)$.

Функция распределения случайной величины ξ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 0), \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \in [0; +\infty). \end{cases}$$

На рисунках 2.18, 2.19 приведены графики функции плотности $f(x)$ и функции распределения $F(x)$ показательно распределённой случайной величины.

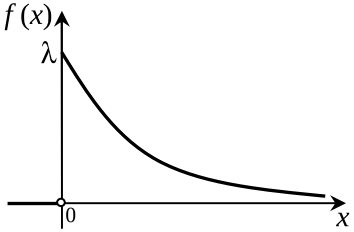


Рисунок 2.18 – График функции плотности показательно распределённой случайной величины

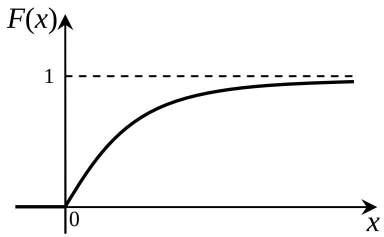


Рисунок 2.19 – График функции распределения показательно распределённой случайной величины

Случайная величина, подчинённая показательному закону распределения, может принимать только неотрицательные значения.

Случайными величинами, имеющими показательный закон распределения, являются, например, продолжительность разговора по мобильному телефону, время безотказной работы прибора, интервал времени между двумя соседними событиями простейшего потока.

Основные числовые характеристики случайной величины, распределённой по показательному закону,

$$M[\xi] = \frac{1}{\lambda},\ D[\xi] = \frac{1}{\lambda^2},$$
$$\sigma[\xi] = \frac{1}{\lambda},\ \ Mod[\xi] = 0, \tag{2.31}$$
$$Med[\xi] = \frac{\ln 2}{\lambda},\ \ A[\xi] = 2,\ E[\xi] = 6,\ V[\xi] = 1.$$

Пример 2.16 В результате статистических исследований выяснилось, что среднее время безотказной работы некоторого прибора равно 10^4 часов. Предполагая, что время безотказной работы подчинено показательному закону распределения, найти вероятность того, что прибор проработает безотказно в течение месяца (30 дней = 720 часов).

Решение. Рассмотрим случайную величину ξ – время безотказной работы прибора. По условию ξ имеет показательный закон распределения и $M[\xi] = 10^4$ [часов]. Параметр λ найдем из соотношения

$$M[\xi] = \frac{1}{\lambda}.$$

Таким образом, $\lambda = \dfrac{1}{M[\xi]} = \dfrac{1}{10^4} = 10^{-4}$.

Функция распределения случайной величины ξ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 0); \\ 1 - e^{-10^{-4} x}, & x \in [0; +\infty). \end{cases}$$

Согласно свойству 5° функции распределения имеем

$$P\{\xi \geq 720\} = 1 - P\{0 \leq \xi < 720\} = 1 - \left(F(720) - F(0)\right) =$$
$$= 1 - \left(1 - e^{-0{,}0001\cdot 720} - 1 + e^{-0{,}0001\cdot 0}\right) = 1 - \left(1 - e^{-0{,}0001\cdot 720}\right) \approx 0{,}93.$$

Лемма об «отсутствии памяти» у показательного распределения. *Если случайная величина ξ имеет показательное распределение, то для любых $t > 0$ и $t_0 \geq 0$*

$$P\{\xi < t + t_0 \mid \xi \geq t_0\} = P\{\xi < t\}.$$

Действительно, по определению условной вероятности имеем

$$P\{\xi < t + t_0 \mid \xi \geq t_0\} = \frac{P\{t_0 \leq \xi < t + t_0\}}{P\{\xi \geq t_0\}} = \frac{F(t + t_0) - F(t_0)}{1 - F(t_0)} =$$
$$= \frac{e^{-\lambda t_0} - e^{-\lambda(t + t_0)}}{e^{-\lambda t_0}} = 1 - e^{-\lambda t} = F(t) = P\{\xi < t\}.$$

Смысл данной леммы заключается в следующем. Пусть время безотказной работы некоторого прибора описывается случайной величиной ξ, которая подчиняется показательному закону распределения. Предположим, что в момент времени t_0 прибор ещё не вышел из строя, тогда остаточное время безотказной работы прибора имеет тот же закон распределения, что и полное время безотказной работы прибора. Иными словами, показательное распределение обладает свойством «отсутствия памяти», т.е. прибор «не помнит» сколько он уже проработал безотказно.

Можно доказать, что свойство «отсутствия памяти» является характеристическим для показательного распределения: этим свойством обладают только показательно распределённые непрерывные случайные величины. Благодаря свойству «отсутствия памяти» показательное распределение находит широкое применение в физике, биологии, химии, теории надёжности и в теории массового обслуживания.

Пример 2.17 В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что прибор проработает безотказно в течение месяца (720 часов), если он уже два месяца (1440 часов) работает безотказно.

Решение. Нам нужно найти следующую условную вероятность:

$$P\{\xi < 720 + 1440 \mid \xi \geq 1440\}.$$

Используя свойство «отсутствия памяти» у показательного распределения, имеем

$$P\{\xi < 720 + 1440 \mid \xi \geq 1440\} = P\{\xi < 720\} \approx 0{,}93.$$

Таким образом, вероятность того, что прибор проработает месяц, не зависит от того, сколько он уже проработал. В условиях данной задачи эта вероятность приблизительно равна 0,93.

Теорема (о минимальном значении показательно распределённых случайных величин). *Если ξ_1, ξ_2, …, ξ_n – независимые случайные величины, имеющие показательные законы распределения с параметрами λ_1, λ_2, …, λ_n соответственно, то случайная величина $\xi = \min\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ имеет показательный закон распределения с параметром $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.*

Пример 2.18 Город снабжается водой из трёх резервуаров. Размеры ежедневных водозаборов из каждого резервуара – независимые показательно распределённые случайные величины. Ежедневно из

каждого резервуара в среднем забирается 10^4, $1{,}2\cdot10^4$, $1{,}5\cdot10^4$ м^3 воды соответственно, при этом каждый резервуар может предоставить городу не более $3\cdot10^4$ м^3. Какова вероятность того, что в определенный день городу не хватит воды?

Решение. Рассмотрим случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 – размеры водозаборов в этот день. По условию ξ_1, ξ_2, ξ_3 имеют показательный закон распределения, при этом

$$M[\xi_1] = 10^4\ [\text{м}^3],\ M[\xi_2] = 1{,}2\cdot10^4\ [\text{м}^3],\ M[\xi_3] = 1{,}5\cdot10^4\ [\text{м}^3].$$

Найдем параметры

$$\lambda_1 = \frac{1}{M[\xi_1]} = 10^{-4}, \lambda_2 = \frac{1}{M[\xi_2]} \approx 0{,}83\cdot10^{-4}, \lambda_3 = \frac{1}{M[\xi_3]} \approx 0{,}67\cdot10^{-4}.$$

Городу не хватит воды, если хотя бы один из водозаборов будет больше, чем $3\cdot10^4$ м^3, т.е. если минимум из трёх водозаборов будет больше, чем $3\cdot10^4$ м^3. Поэтому рассмотрим случайную величину

$$\xi = \min\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}.$$

По предыдущей теореме случайная величина ξ распределена по показательному закону с параметром

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \approx 2{,}5\cdot10^{-4}.$$

Функция распределения случайной величины ξ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 0); \\ 1 - e^{-2{,}5\cdot10^{-4}x}, & x \in [0; +\infty). \end{cases}$$

Тогда $P\{\xi \geq 3\cdot10^4\} = 1 - P\{0 \leq \xi < 3\cdot10^4\} = 1 - \left(F(3\cdot10^4) - F(0)\right) =$

$$= 1 - \left(1 - e^{-7{,}5} - 1 + e^0\right) = 1 - \left(1 - e^{-7{,}5}\right) = e^{-7{,}5} \approx 0{,}00055.$$

Таким образом, городу в определенный день не хватит воды с вероятностью 0,00055.

2.8.6 Нормальный закон распределения

Случайная величина ξ имеет **нормальный закон распределения** с параметрами a и σ^2, $\sigma > 0$, если её функция плотности имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \ x \in \boldsymbol{R}.$$

Обозначается $\xi \sim N(a;\sigma^2)$.

Функция распределения случайной величины ξ имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt, \ x \in \boldsymbol{R}.$$

На рисунках 2.20–2.21 приведены графики функции плотности $f(x)$ и функции распределения $F(x)$ случайной величины, имеющей нормальный закон распределения.

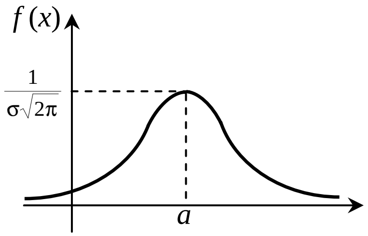


Рисунок 2.20 – График функции плотности нормально распределённой случайной величины

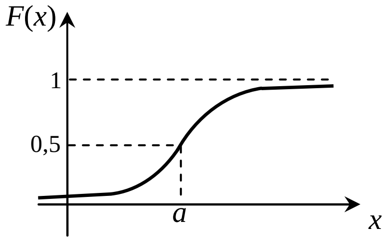


Рисунок 2.21 – График функции распределения нормально распределённой случайной величины

Нормальный закон распределения занимает исключительно важное место в теории вероятностей. Это связано, прежде всего, с тем, что нормальный закон распределения наиболее часто используется на практике. Кроме того, этот закон является предельным законом для некоторых других законов распределения, т.е. некоторые другие распределения можно аппроксимировать с помощью нормального (в частности, биномиальный закон распределения). Доказано, что сумма большого числа случайных величин, имеющих различные законы

распределения, подчиняется нормальному закону (с некоторыми нежёсткими ограничениями). Случайными величинами, распределёнными по нормальному закону, являются отклонения реальных значений параметров изготовленного изделия от номинальных, ошибки измерения параметров изделия.

Основные числовые характеристики случайной величины, распределённой по нормальному закону,

$$\begin{gathered} M[\xi] = a, \ D[\xi] = \sigma^2, \ \sigma[\xi] = \sigma, \\ Mod[\xi] = a, \ Med[\xi] = a, \\ A[\xi] = 0, \ E[\xi] = 0. \end{gathered} \tag{2.32}$$

Случайная величина ξ, распределённая по нормальному закону с параметрами $a = 0$ и $\sigma^2 = 1$ ($\xi \sim N(0;1)$), называется случайной величиной, подчинённой **стандартному нормальному распределению**. Функция распределения такой случайной величины имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Вероятность попадания значений случайной величины в отрезок [α; β]**.** Определим вероятность того, что нормально распределённая случайная величина ξ примет значение из промежутка [α; β]. Согласно свойству 5° функции распределения

$$P\{\alpha \le \xi \le \beta\} = F(\beta) - F(\alpha) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\beta} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt =$$

$$= \left[\begin{gathered} \frac{t-a}{\sigma} = u \\ dt = \sigma du \end{gathered} \right] = \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du - \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{u^2}{2}} du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{u^2}{2}} du - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du =$$

$$= \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция Лапласа.

Таким образом,

$$P\{\alpha \le \xi \le \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \qquad (2.33)$$

Вычислить $P\{\alpha \le \xi \le \beta\}$ непосредственно, используя свойство 3° функции плотности или свойство 5° функции распределения, для нормально распределённой случайной величины весьма затруднительно, поскольку интеграл $\int e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$ является «неберущимся», т.е. не выражается через элементарные функции.

Пример 2.19 Случайная величина ξ распределена по нормальному закону с параметрами a и σ^2. Какова вероятность того, что случайная величина примет значение, удалённое от a не более чем на 3σ?

Решение. Для определения искомой вероятности воспользуемся равенством (2.33):

$$P\{a - 3\sigma \le \xi \le a + 3\sigma\} = \Phi\left(\frac{a + 3\sigma - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - 3\sigma - a}{\sigma}\right) =$$
$$= \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) \approx 0,997,$$

где $\Phi(3) = 0,4987$ нашли по таблице значений функции Лапласа (см. приложение Б).

Таким образом, вероятность того, что нормально распределённая случайная величина примет значение, отстоящее от своего математического ожидания более чем на три средних квадратических отклонения, примерно равна 0,003. Иными словами, это событие происходит в среднем три раза из тысячи.

При решении практических задач часто считают, что вероятностью того, что нормально распределённая случайная величина примет значение больше, чем $a + 3\sigma$, или меньше, чем $a - 3\sigma$, можно пренебречь. Это правило называют правилом «трёх сигм».

Пример 2.20 Скорость движения пассажирского лифта – нормально распределённая случайная величина с математическим ожиданием 0,72 м/с и средним квадратическим отклонением 0,02 м/с. Определить вероятность того, что скорость движения пассажирского лифта будет не менее 0,72 м/с и не более 0,75 м/с.

Решение. Рассмотрим случайную величину ξ – скорость движения пассажирского лифта. По условию $\xi \sim N(0,72;\, 0,0004)$. Функция плотности случайной величины ξ имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{0,02\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-0,72)^2}{0,0008}}.$$

Для определения вероятности того, что случайная величина ξ примет значение из промежутка [0,72; 0,75], воспользуемся формулой (2.33):

$$P\{0,75 \le \xi < +\infty\} = \Phi\left(\frac{0,75 - 0,72}{0,02}\right) - \Phi\left(\frac{0,72 - 0,72}{0,02}\right) =$$
$$= \Phi(1,5) - \Phi(0) \approx 0,4332 - 0 = 0,4332.$$

где $\Phi(1,5) = 0,4332$ и $\Phi(0) = 0$ нашли по таблице значений функции Лапласа (см. приложение Б).

Вопросы для самоконтроля

1 Какие дискретные законы распределения случайных величин вы знаете? Существуют ли другие законы распределения дискретных случайных величин?

2 Какие непрерывные законы распределения случайных величин вы знаете? Существуют ли другие законы распределения непрерывных случайных величин?

3 При каких условиях случайная величина будет иметь биномиальный закон распределения?

4 При каких условиях случайная величина будет иметь геометрический закон распределения?

5 При каких условиях случайная величина будет иметь закон распределения Пуассона?

6 Приведите примеры случайных величин, распределённых по биномиальному закону.

7 Приведите примеры случайных величин, распределённых по геометрическому закону.

8 Приведите примеры случайных величин, распределённых по закону Пуассона.

9 Какие параметры определяют биномиальный закон распределения? геометрический? закон распределения Пуассона?

10 Какой вид имеет функция плотности равномерно распределённой случайной величины? Как выглядит её график? Назовите параметры равномерного распределения.

11 Какой вид имеет функция распределения экспоненциально распределённой случайной величины? Как выглядит её график? Назовите параметры экспоненциального распределения.

12 Какой вид имеет функция плотности случайной величины, имеющей нормальный закон распределения? Как выглядит её график? Назовите параметры нормального распределения.

13 Как выражается функция распределения нормально распределённой случайной величины через функцию Лапласа?

14 Чему равны основные числовые характеристики случайной величины, распределённой по биномиальному закону? геометрическому закону? закону Пуассона? равномерному закону? экспоненциальному закону? нормальному закону?

3 ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Практическое занятие № 1

Вероятностный эксперимент.
Пространство элементарных исходов. Операции над событиями

1.1 Построить пространство элементарных исходов следующих вероятностных экспериментов:

E: подбрасывание правильной монеты;

E: подбрасывание игральной кости;

E: подбрасывание двух различных игральных костей;

E: исследование работы трёх устройств в течение времени *T*.

1.2 Установить, дискретно или непрерывно пространство элементарных исходов следующих вероятностных экспериментов:

E: подсчёт числа объектов, сданных строительной бригадой за квартал;

E: исследование времени застывания бетона;

E: исследование величины отклонения параметров строительной конструкции от номинала;

E: подсчёт числа заявок, поступивших в диспетчерскую в течение суток;

E: подсчёт числа бракованных изделий в партии, содержащей 15 тысяч изделий.

1.3 Производится подбрасывание игральной кости.

а) Построить пространство элементарных исходов данного эксперимента.

б) Выписать элементарные исходы, благоприятствующие событиям:

A = {выпадение чётного числа очков},

B = {выпадение числа очков, кратного трём},

C = {выпадение нечётного числа очков},

D = {выпадение числа очков, большего четырёх},

F = {выпадение «2»}.

в) В чём состоят события, противоположные данным? Указать благоприятствующие им элементарные исходы.

г) В чём состоят события $A \cup B$, $C \cup D$, $D \cap F$, $A \setminus F$, $C \setminus D$? Выписать элементарные исходы, благоприятствующие этим событиям.

д) Привести примеры достоверного и невозможного событий для рассматриваемого вероятностного эксперимента.

1.4 Производится подбрасывание двух различных игральных костей (красной и синей).

а) Построить пространство элементарных исходов данного эксперимента.

б) Выписать элементарные исходы, благоприятствующие событиям:

A = {на красной кости выпадет 1, а на синей – 4},

B = {на красной кости выпадет чётное число очков, а на синей – нечётное},

C = {на красной кости выпадет в два раза больше очков, чем на синей},

D = {на красной кости выпадет меньше очков, чем на синей},

F = {сумма выпавших очков будет равна 5},

G = {на красной кости выпадет нечётное число очков}.

в) В чём состоят события, противоположные к событиям *B*, *D*, *G*? Выписать элементарные исходы, благоприятствующие событиям $\overline{B}, \overline{D}, \overline{G}$.

г) В чём состоят события $B \cup G$, $C \cup D$, $D \cap F$, $D \setminus G$, $G \setminus D$? Выписать элементарные исходы, благоприятствующие этим событиям.

д) Какое из событий *A*, *B*, *C*, *D* влечёт событие *F*? событие *G*?

е) Привести примеры достоверного и невозможного событий для рассматриваемого вероятностного эксперимента.

1.5 *E*: подбрасывание двух монет (5-копеечной и 10-копеечной). В чём состоят события, противоположные следующим:

A = {5-копеечная монета выпадет гербом вверх},

B = {не более одной монеты выпадет гербом вверх},

C = {хотя бы 1 монета выпадет гербом вверх},

D = {одна монета выпадет гербом вверх}?

1.6 Электрические цепи составлены по схемам, приведённым на рисунке 3.1. E: наблюдение за цепью в течение времени T. Рассмотрим события:

A_i = {безотказная работа элемента e_i}, $i = \overline{1,3}$,

B = {безотказное функционирование электрической цепи}.

Выразить событие B через события A_i.

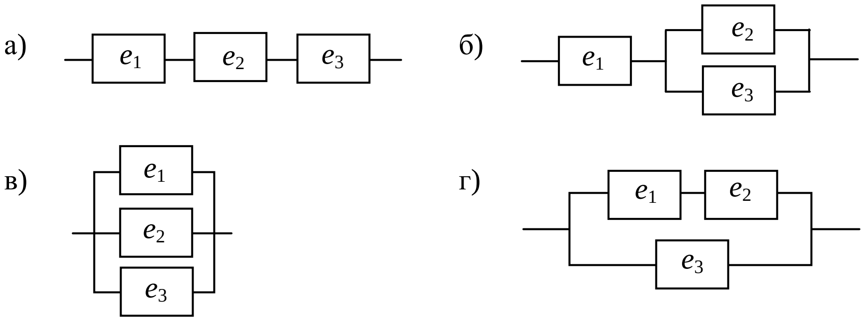


Рисунок 3.1 – Логические схемы работы электрической цепи

1.7 E: из множества студентов БелГУТа случайным образом выбирается один студент. Рассмотрим события:

A = {выбранный студент обучается на II курсе},
B = {выбранный студент проживает в общежитии},
C = {выбранный студент обучается на строительном факультете},
D = {выбранный студент обучается на факультете ПГС}.

В чём состоят события $C \cup D$, $A \cap B \cap C$, $A \cap \overline{B} \cap C$, $\overline{B} \cup D$, $A \setminus (C \cup D)$?

1.8 E: производится контроль качества 3 железобетонных конструкций. По результатам контроля определяется наличие или отсутствие дефектов в каждой из конструкций. Рассмотрим события:

A = {в одной из конструкций будут обнаружены дефекты},
B = {дефекты будут обнаружены не более чем в одной из конструкций},
C = {дефекты будут обнаружены не менее чем в двух конструкциях},

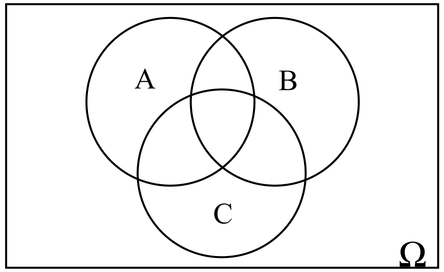
D = {в 3-й конструкции дефекты будут отсутствовать}.

Будут ли совместными события A и B, C и D, B и C? Укажите другие пары совместных событий.

1.9 Студенту необходимо сдать три экзамена. Рассмотрим события: A_1 – сдача первого экзамена; A_2 – сдача второго экзамена; A_3 – сдача третьего экзамена. Записать выражения, соответствующие осуществлению следующих событий:

B – сдача всех трёх экзаменов;
C – сдача хотя бы одного экзамена из трёх;
D – сдача только первого экзамена;
F – сдача не более одного экзамена;
G – сдача двух экзаменов;
H – студент не сумел сдать только второй экзамен.

1.10 E: из прямоугольной области случайным образом выбирается точка. Определим события:



A = {выбранная точка принадлежит кругу A},
B = {выбранная точка принадлежит кругу B},
C = {выбранная точка принадлежит кругу C}.

Заштриховать элементарные исходы, благоприятствующие наступлению следующих событий:

$A \cup B \cup C$, $A \cap (B \setminus C)$, $A \cup (B \cap C)$, $\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$, $\overline{A} \setminus (\overline{B} \cap C)$.

Практическое занятие № 2

Вероятность событий. Методы определения вероятностей. Элементы комбинаторики

2.1 Подбрасывается игральная кость. Какова вероятность того, что

а) выпадет 1 очко,
б) выпадет чётное число очков,
в) выпадет не менее 3 очков?

2.2 В урне находятся 10 шаров: 3 красных и 7 синих. Случайным образом выбирается 1 шар. Какова вероятность того, что он красного цвета?

2.3 Подбрасываются три монеты. Какова вероятность того, что

а) одна монета упадёт гербом вверх,

б) хотя бы одна монета упадёт гербом вверх,

в) не более двух монет упадут гербом вверх?

2.4 Подбрасываются две игральные кости. Определить вероятности следующих событий:

A = {сумма выпавших очков будет равна 7},

B = {выпадет чётное число очков},

C = {на первой кости выпадет 3, на второй – чётное число очков},

D = {на первой кости выпадет чётное число очков, на второй - нечётное},

F = {на одной из костей выпадет чётное число очков, на другой - нечётное},

G = {сумма выпавших очков будет делится на 2},

H = {на обеих костях выпадет одинаковое число очков},

I = {на первой кости выпадет в два раза больше очков, чем на второй}.

2.5 На шахматную доску ставятся две ладьи. Какова вероятность того, что они не угрожают друг другу?

2.6 В лифт 9-этажного дома заходят 3 человека. Считая, что каждый из них может с одинаковой вероятностью выйти на любом этаже со 2-го по 9-й, найти вероятность того, что

а) все люди выйдут на одном этаже,

б) все люди выйдут на разных этажах,

в) хотя бы два человека выйдут на одном этаже.

2.7 Студент забыл три последних цифры телефона своей одногруппницы. Какова вероятность того, что набрав эти цифры наугад, студент попадёт по нужному номеру, если

а) он помнит, что это цифры 1, 2, 3 в некотором порядке,

б) он помнит, что все цифры разные,

в) он ничего о них не помнит?

2.8 Билет лотереи «Спортлото 5 из 36» считается выигрышным, если угаданы хотя бы 3 числа из 5. Какова вероятность того, что билет окажется выигрышным?

2.9 В какой из лотерей «Спортлото 5 из 36» и «Спортлото 6 из 45» вероятность выигрыша является наибольшей, если в первой из них билет считается выигрышным, если угаданы хотя бы 3 числа из 5, а во второй – если угаданы хотя бы 4 числа из 6?

2.10 Колода карт (36 листов) делится наугад на две равные части. Какова вероятность того, что

а) в одной из пачек будет 4 туза, а в другой – ни одного,

б) в одной из пачек будет 3 туза, а в другой – 1?

2.11 На участке газопровода между компрессорными станциями A и B длиной 20 км происходит утечка газа. Считая, что утечка одинаково возможна в любой точке газопровода, найти вероятность того, что утечка происходит не далее чем в 2 километрах от станции.

2.12 Студент может добраться до университета на автобусе, который ходит с интервалом 8 минут, или на троллейбусе, который ходит с интервалом 15 минут. Студент пришёл на остановку в произвольный момент времени. Какова вероятность того, что транспорт нужно будет ожидать не более 5 минут?

2.13 В квадрат вписан круг. Внутри квадрата случайным образом выбирается точка. Какова вероятность того, что она окажется внутри круга?

2.14 (*Задача Бюффона*). Плоскость разграфлена прямыми, отстоящими друг от друга на $2a$ см. На плоскость бросают иглу длиной $2l$ ($l < a$). Какова вероятность того, что игла пересечёт прямую?

Практическое занятие № 3

Теоремы сложения и умножения. Условная вероятность. Независимость событий

3.1 На складе имеется 100 тензорезисторов 3-го класса точности, 220 тензорезисторов 2-го класса точности и 180 тензорезисторов 1-го класса точности. Какова вероятность того, что случайным образом выбранный тензорезистор будет иметь класс точности не ниже 2-го?

3.2 Известно, что 80 % железобетонных конструкций выпускаются по типовым проектам, 12 % – по повторно применяемым проектам и 8 % – по индивидуальным проектам. Найти вероятность того, что случайным образом выбранная железобетонная конструкция выпущена по типовому или по повторно применяемому проекту.

3.3 Два стрелка одновременно выполняют по одному выстрелу, пытаясь поразить мишень. Известно, что 1-й стрелок поражает мишень в среднем в 60 случаях из 100, а 2-й стрелок – в 70 случаях из 100. Какова вероятность того, что

а) мишень будет поражена,

б) оба стрелка попадут в цель?

3.4 При испытании бетона на морозостойкость в качестве среды насыщения и оттаивания можно использовать воду (I метод), а можно – 5 %-ный водный раствор хлористого натрия (II метод). Известно, что 8 % отобранных из некоторой партии образцов бетона не выдержали проверку на морозостойкость по I методу и 6 % – по II методу. 5 % образцов не выдержали проверку обоими методами. Будут ли являться независимыми события:

A = {образец не выдержал проверку на морозостойкость по I методу},

B = {образец не выдержал проверку на морозостойкость по II методу}?

3.5 Являются ли независимыми несовместные события?

3.6 На складе находятся 5 рулонов рубероида с пылевидной посыпкой и 10 рулонов рубероида с мелкозернистой посыпкой. Кладовщик заметил, что в результате неправильного хранения было повреждено 4 рулона. Какова вероятность того, что

а) все 4 повреждённых рулона имеют пылевидную посыпку,

б) хотя бы 2 повреждённых рулона имеют пылевидную посыпку,

в) не более 3 повреждённых рулонов имеют пылевидную посыпку?

3.7 Имеется набор из 9 одинаковых свёрл для перфоратора. Для работы каждый день берут 3 сверла, после работы их возвращают обратно. При выборе свёрл новые от бывших в употреблении не отличаются. Какова вероятность того, что после трёх дней работы в наборе не останется новых свёрл?

3.8 Из N водонагревательных приборов M бракованных. Для контроля выбирается n приборов. Какова вероятность того, что среди выбранных приборов окажется ровно m бракованных?

3.9 Группа инструментального приёмочного контроля выборочно проверяет соответствие выполненных строительно-монтажных работ проекту, строительным нормам и правилам, стандартам и другим действующим нормативным документам. Вероятность обнаружения несоответствия за один цикл проверок равна p. Найти вероятность того, что за n циклов проверок будет обнаружено хотя бы одно несоответствие.

3.10 В изготовлении термомеханически упрочнённой арматурной стали для железобетонных конструкций последовательно задействовано трое рабочих. Первый рабочий нарушает технологический процесс с вероятностью 0,005, второй – с вероятностью 0,002 и третий – с вероятностью 0,01. Какова вероятность того, что технологический процесс будет нарушен?

3.11 Завод изготавливает асбестоцементные трубы. Каждая труба может не выдержать испытания на разрыв с вероятностью 0,01, на раздавливаемость – с вероятностью 0,005 и на изгиб – с вероятностью 0,001. Какова вероятность того, что

а) труба будет забракована,

б) труба не выдержит только проверку на раздавливаемость,

в) труба не выдержит ни одного из трёх испытаний?

3.12 Завод изготавливает отопительные конвекторы. Каждый конвектор имеет дефект с вероятностью p_1. Конвектор осматривается контролёром, который обнаруживает имеющийся дефект с вероятностью p_2. Если дефект не обнаружен, то конвектор пропускается в готовую продукцию. Кроме того, контролёр может по ошибке забраковать конвектор, не имеющий дефекта, с вероятностью p_3. Найти вероятность того, что

а) конвектор будет забракован,

б) конвектор будет ошибочно забракован,

в) бракованный конвектор будет пропущен в готовую продукцию?

3.13 Студент пришёл на экзамен, зная из тридцати вопросов только 25. В билете три вопроса. Найти вероятность того, что:

а) он сумеет ответить на все вопросы,

б) он сумеет ответить на два вопроса из трёх,

в) он не сможет ответить ни на один из вопросов.

3.14 Студенту необходимо сдать три экзамена. Вероятность сдать первый равна 0,8, второй – 0,7, третий – 0,6. Сколько экзаменов он вероятнее всего сдаст?

3.15 При включении зажигания двигатель начинает работать с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что для ввода двигателя в работу придётся включить зажигание:

а) один раз,

б) два раза,

в) не более двух раз,

г) более трёх раз.

3.16 Электрические цепи составлены по схемам, приведённым на рисунке 3.2 (а, б, в, г). E: наблюдение за цепью в течение времени T. Каждый из элементов цепи за время T может независимо от других выйти из строя с вероятностью 0,9. Найти вероятность безотказной работы в течение времени T всей электрической цепи.

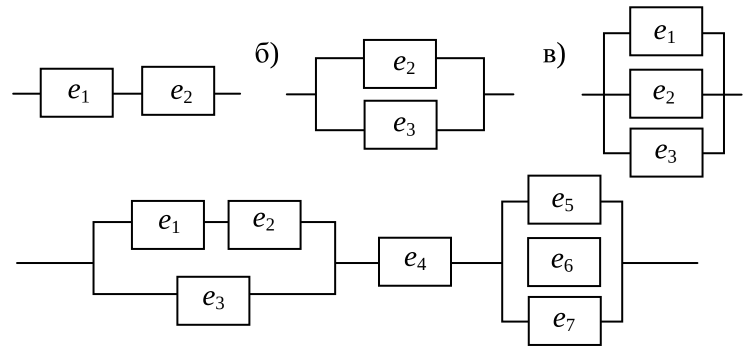


Рисунок 3.2 – Логические схемы работы электрической цепи

Практическое занятие № 4
Формулы полной вероятности и Байеса

4.1 На складе находятся четыре однотипных прибора, характеризующихся различными сроками эксплуатации. Для этих приборов вероятности безотказной работы в течение времени T равны соответственно 0,9, 0,6, 0,5 и 0,4. Рабочий случайным образом выбирает один из приборов. Какова вероятность того, что в течение времени T этот прибор проработает безотказно?

4.2 На рисунке 3.3 изображена схема дорог. Туристы вышли из пункта A, выбирая наугад на разветвлении дорог один из возможных путей. Какова вероятность того, что они попадут в пункт B? Если известно, что туристы попали в пункт A, какова вероятность того, что они двигались через пункт C_3?

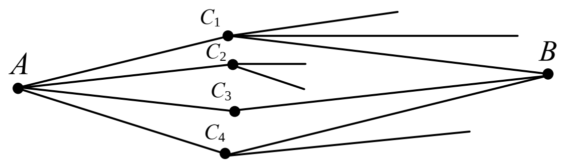


Рисунок 3.3 – Схема дорог

4.3 На открытой площадке хранятся три партии оконных панелей, по 100 штук в каждой. Известно, что в первой партии находятся три панели, отклонения линейных размеров которых превышают допустимые. Во второй партии имеется две таких панели, а в третьей – ни одной. Для контрольной проверки линейных размеров случайным образом отбирают панель из какой-либо партии.

а) Какова вероятность того, что линейные размеры выбранной панели будут превышать допустимые?

б) Линейные размеры выбранной панели превышают допустимые. Какова вероятность того, что панель была выбрана из первой партии или из второй?

4.4 В строительную организацию поступила партия пассажирских лифтов, 30 % из которых изготовлено на заводе А, а 70 % – на заводе В. Известно, что 95 % лифтов, изготовленных на заводе А, и 90 % лифтов, изготовленных на заводе В, имеют среднюю наработку на отказ не менее 450 часов. При строительстве жилого дома был установлен пассажирский лифт.

а) Какова вероятность того, что он имеет среднюю наработку на отказ менее 450 часов?

б) Установленный лифт имеет среднюю наработку на отказ менее 450 часов. Какова вероятность того, что он изготовлен на заводе В?

4.5 Имеется две партии образцов строительной извести. Первая партия содержит 100 образцов, из которых 6 по результатам проведения химического анализа не соответствуют ГОСТ. Вторая партия содержит 150 образцов, из которых 8 не соответствуют ГОСТ. Из первой партии берётся 60 образцов, а из второй – 40 образцов. Эти 100 образцов смешиваются, и образуется новая партия. Из новой партии извлекается один образец. Какова вероятность того, что по результатам проведения химического анализа он будет не соответствовать ГОСТ?

4.6 На 5 железобетонных сборных конструкциях нанесена маркировка – порядковый номер конструкции в партии, представляющая собой числа от 1 до 5 включительно. Для контроля выбирают одну за другой две конструкции. Какова вероятность того, что разность между порядковым номером первой конструкции и порядковым номером второй конструкции будет не менее 2?

4.7 Партия изделий включает в себя 20 % изделий высшего сорта, 70 % изделий первого сорта и 10 % изделий второго сорта. Известно, что гарантийный срок выдерживает 99 % изделий высшего сорта, 90 % изделий первого сорта и 80 % изделий второго сорта. Наудачу отбирают одно изделие. Найти вероятность того, что: а) изделие выдержит гарантийный срок, б) изделие является изделием первого сорта, если известно, что оно выдержало гарантийный срок.

4.8 В условиях задачи 4.5 выбирается два изделия. Найти вероятность того, что они оба выдержат гарантийный срок.

4.9 Три контролёра проверяют три пластмассовых трубопровода. В каждом из трубопроводов имеются дефекты, о которых контролёры заранее не знают. Каждый контролёр выбирает трубопровод случайным образом и независимо от других. Трубопровод, обследованный контролёром, будет признан негодным с вероятностью 0,95. Какова вероятность того, что два трубопровода будут признаны негодными, а третий – нет?

4.10 В ящике хранятся 11 новых свёрл для перфоратора и 9 – бывших в употреблении. Для работы взяли 2 сверла, после работы их вернули обратно. Через некоторое время из ящика опять взяли 2 сверла. Найти вероятность того, что оба они – новые.

4.11 Прибор состоит из двух узлов, работа каждого из них необходима для работы прибора в целом. Для первого узла вероятность выхода из строя в течение гарантийного срока равна 0,99, для второго – 0,95. В результате эксплуатации оказалось, что прибор вышел из строя до истечения гарантийного срока. Найти вероятность того, что первый узел исправен, а второй – отказал.

Практическое занятие № 5

Последовательность независимых испытаний.
Формула Бернулли

5.1 В наличии имеются железо-ванадиевые и медные сварочные электроды в отношении 7:3. Для ручной дуговой сварки выбирается 5 электродов. Какова вероятность того, что среди них

а) хотя бы один медный,
б) не менее двух медных,
в) ровно два медных?

5.2 Девять железобетонных конструкций проходят испытания защитного лакокрасочного покрытия на паронепроницаемость. Вероятность того, что покрытие успешно пройдёт испытание, равна 0,9. Какова вероятность того, что из пяти конструкций испытания успешно завершатся для четырёх?

5.3 В осветительную сеть было подключено 6 энергосберегающих ламп. Каждая лампа в течение года перегорает с вероятностью 0,2. Какова вероятность того, что в течение года необходимо будет заменить не менее половины ламп?

5.4 В результате проверки на огнестойкость выяснилось, что только 2/3 стальных балок имеют предел огнестойкости свыше 18 минут. Какова вероятность того, что из 5 балок хотя бы 3 будут иметь предел огнестойкости свыше 18 минут?

5.5 В течение времени t эксплуатируются 10 приборов. Вероятность выхода из строя за это время для каждого из них равна 0,6. Какова вероятность того, что мастер, вызванный для ремонта неисправных приборов по истечении времени t, не справится со своей задачей за 8 часов, если для ремонта каждого прибора ему требуется 2 часа?

5.6 Завод выпускает 70 % изделий высшего сорта, 20 % – первого сорта и 10 % – второго сорта. Покупатель приобретает 6 изделий. Найти вероятность того, что среди них будет 5 изделий высшего сорта и 1 – второго.

Практическое занятие № 6
Предельная теорема Пуассона. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа

6.1 Известно, что за счет типизации количество вновь разработанных чертежей деталей и узлов в проекте составляет 11 %. Проект включает в себя 820 чертежей деталей и узлов. Найти наиболее вероятное число чертежей деталей и узлов, которые необходимо будет разработать и определить вероятность этого события.

6.2 При подборе состава строительных растворов в 40 % случаев используется рецептурно-технологический способ, а в 60 % случаев – расчётно-экспериментальный метод. Состав строительных растворов подбирался 240 раз. Какова вероятность того, что рецептурно-технологический способ подбора использовался ровно 96 раз? Какова вероятность того, что рецептурно-технологический способ подбора использовался от 90 до 130 раз?

6.3 Аварийное усиление строительных конструкций наблюдается в среднем в 1 случае из 500. Какова вероятность того, что из 1000 проведённых усилений строительных конструкций аварийное усиление имело место: а) два раза, б) не менее пяти раз?

6.4 24 % квартир частного жилищного фонда расположено в кирпичных многоквартирных домах. На продажу выставлено 480 квартир. Какова вероятность того, что не более 100 из них находятся в кирпичных домах?

6.5 2 % произведённых паркетных щитов не удовлетворяют ГОСТ 862.4. Какова вероятность того, что из 500 паркетных щитов один не удовлетворяет требованиям ГОСТ 862.4? не более двух щитов?

6.6 Партия фанерных плит марки ПФ-Х содержит 35 % плит с отклонением по толщине. Предприятие закупило 750 плит. Какова вероятность того, что: а) ровно 300 плит имеют отклонение по толщине, б) не более 300 плит имеют отклонение по толщине?

Практическое занятие № 7
Дискретные случайные величины. Закон распределения и числовые характеристики дискретных случайных величин

7.1 К случайной величине ξ прибавили 3. Как изменится её математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение?

7.2 Случайную величину ξ умножили на 2. Как изменится её математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение?

7.3 На складе имеются тензорезисторы. Известно, что 45 % из них 1-го класса точности. Рабочий наугад выбирает 5 тензорезисторов. Случайная величина ξ – число тензорезисторов 1-го класса точности среди отобранных. Построить ряд распределения случайной величины.

7.4 Из 5 водонагревательных приборов 2 бракованных. Для контроля выбирается 4 прибора. Случайная величина ξ – число бракованных водонагревательных приборов среди выбранных. Построить ряд распределения и столбцовую диаграмму данной случайной величины, найти функцию распределения и построить её график, определить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и моду случайной величины ξ.

7.5 Из N водонагревательных приборов M бракованных. Для контроля выбирается n приборов. Случайная величина ξ – число бракованных водонагревательных приборов среди выбранных. Построить ряд распределения и столбцовую диаграмму данной случайной величины, найти функцию распределения и построить её график, определить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и моду случайной величины ξ.

7.6 Имеется набор из 7 одинаковых свёрл для перфоратора. Для работы каждый день берут 3 сверла, после работы их возвращают обратно. При выборе свёрл новые от бывших в употреблении не отличают. Случайная величина ξ – число свёрл, оставшихся новыми после двух дней работы.

7.7 Завод изготавливает асбестоцементные трубы. Каждая труба может не выдержать испытания на разрыв с вероятностью 0,01, на раздавливаемость – с вероятностью 0,005 и на изгиб – с вероятностью 0,001. Изделие считается бракованным, если оно не выдерживает хотя бы одного из трёх испытаний. Для контроля отобрано 1000 труб. Определить среднее число труб, не выдержавших испытания.

7.8 Поток отказов пассажирских лифтов в течение месяца в жилом 8-подъездном доме удовлетворяет требованиям простейшего потока событий. Среднее число отказов в течение месяца равно 15. Определить вероятность того, число отказов лифтового оборудования в течение суток не превысит двух.

7.9 Завод изготавливает линолеум. Каждый рулон линолеума имеет дефект с вероятностью p_1. Рулон осматривается контролёром, который обнаруживает имеющийся дефект с вероятностью p_2. Проверка проводится до обнаружения первого бракованного рулона. Определить среднее число рулонов линолеума, которые контролёр признал годными.

Практическое занятие № 8

Непрерывные случайные величины. Закон распределения и числовые характеристики непрерывных случайных величин

8.1 Функция распределения случайной величины ξ задана выражением

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ x^2+1, & 0\le x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Найти функцию плотности данной случайной величины.

8.2 Плотность распределения непрерывной случайной величины ξ задана выражением

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-1;\\ C\left|x^3\right|, & -1\le x\le 1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Определить неизвестный параметр C, найти функцию распределения данной случайной величины и построить её график, определить числовые характеристики случайной величины ξ (математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану), вычислить вероятность того, что случайная величина ξ попадёт в промежуток [0,5; 1,5].

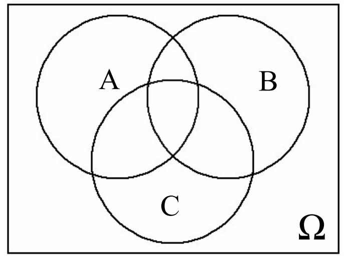
8.3 При измерении толщины древесностружечных и древесноволокнистых плит используют микрометр с ценой деления 0,01 мм. Определить вероятность того, что ошибка округления не будет превышать 0,002 мм.

8.4 Время, необходимое для замены плит в сталежелезобетонных пролётных строениях, распределено по экспоненциальному закону с параметром $\lambda = 0{,}6$ сут$^{-1}$. Определить вероятность того, что на замену плит понадобится более трёх суток.

8.5 Выборка стали класса A-I на одну железобетонную обвязочную балку марки БОП-25 1-Т в среднем составляет 23,2 кг. Случайная величина ξ, характеризующая массу выбранной стали, распределена по нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}8$ кг. Определить вероятность того, что на изготовление 20 балок будет достаточно 470 кг стали.

4 ПРИМЕР РЕШЕНИЯ РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Задача 1. *E*: из прямоугольной области случайным образом выбирается точка. Определим события:
A = {выбранная точка принадлежит кругу A}, B = {выбранная точка принадлежит кругу B}, C = {выбранная точка принадлежит кругу C}.

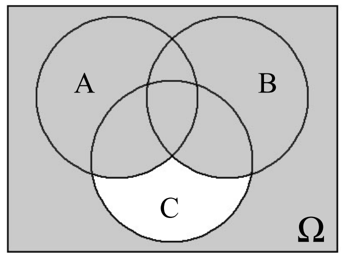


Заштриховать области, которые содержат исходы, благоприятствующие наступлению следующих событий:

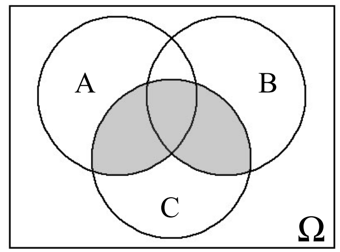
а) $A \cup B \cup \overline{C}$, б) $(A \cup B) \cap C$, в) $A \setminus \overline{C \cap B}$, г) $(C \setminus \overline{A}) \cup B$.

Решение.

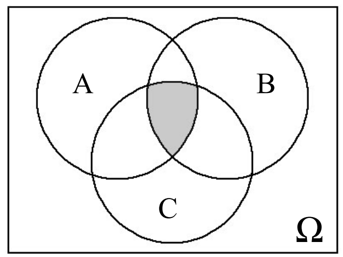
а)



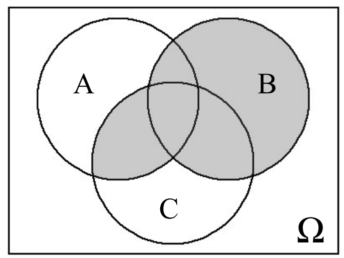
б)



в)



г)



Задача 2. Строительной организации необходимо сдать три объекта: объект A_1, объект A_2 и объект A_3. Считая все возможные варианты очерёдности сдачи объектов равновероятными, найти вероятности следующих событий:

A = {объект A_2 будет сдан первым},

B = {объект A_1 будет сдан позже объекта A_2},

C = {объект A_1 будет сдан первым, A_2 – вторым, A_3 – третьим}.

Решение. E: строительная организация сдаёт объекты A_1, A_2 и A_3 в произвольном порядке. Поставим в соответствие объекту A_1 число 1, объекту A_2 – число 2, а объекту A_3 – число 3.

В качестве элементарного исхода рассмотрим $\omega = (i_1, i_2, i_3)$, где i_1 – номер объекта, который сдадут первым, i_2 – номер объекта, который сдадут вторым, i_3 – номер объекта, который сдадут третьим. Тогда пространство элементарных исходов будет иметь вид

$$\Omega = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 2, 1), (3, 1, 2)\}.$$

Число всех возможных исходов $n = 6$ – конечно, все исходы равновозможны, поэтому для вычисления вероятностей интересующих нас событий можно воспользоваться классическим методом.

Выпишем исходы, благоприятствующие событию A:

$$A = \{(2, 1, 3), (2, 3, 1)\}.$$

Число исходов, благоприятствующих событию A, равно 2: $m_A = 2$.

$$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Выпишем исходы, благоприятствующие событию B:

$$B = \{(2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 2, 1)\}.$$

Число исходов, благоприятствующих событию B, равно 3: $m_B = 3$.

$$P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Аналогично найдем вероятность события C:

$$C = \{(1, 2, 3)\},\ m_C = 1.$$

$$P(C) = \frac{m_C}{n} = \frac{1}{6}.$$

О т в е т : $P(A) = 1/3$, $P(B) = 1/2$, $P(C) = 1/6$.

Задача 3. На складе находятся 20 выносных удлинителей, среди которых 14 изготовлены из инвара. Для установки индикаторов случайным образом отбираются 3 удлинителя. Какова вероятность того,

что а) все 3 удлинителя изготовлены из инвара, б) только один удлинитель изготовлен из инвара.

Решение. Определим события:

A_i = {i-й удлинитель изготовлен из инвара}, $i = 1, 2, 3$,

B_1 = {3 удлинителя изготовлены из инвара},

B_2 = {только 1 удлинитель изготовлен из инвара}.

а) Событие B_1 можно представить в виде

$$B_1 = A_1 \cap A_2 \cap A_3.$$

События A_1, A_2 и A_3 являются зависимыми. Применяя теорему умножения для зависимых событий, получим

$$P(B_1) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A2) =$$

$$= \frac{14}{20} \cdot \frac{13}{19} \cdot \frac{12}{18} \approx 0{,}319.$$

б) Событие B_2 можно выразить следующим образом:

$$B_2 = (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3).$$

События $A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$, $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3$, $\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3$ являются несовместными. Применяя сначала теорему сложения для несовместных событий, а затем теорему умножения для зависимых событий, получим

$$P(B_2) = P((A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3)) =$$

$$= P(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) + P(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) + P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) =$$

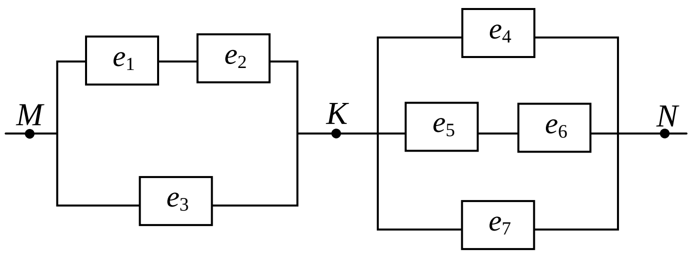
$$= P(A_1)P(\overline{A}_2 \mid A_1)P(\overline{A}_3 \mid A_1 \cap \overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)P(A_2 \mid \overline{A}_1)P(\overline{A}_3 \mid \overline{A}_1 \cap A_2) +$$

$$+ P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2 \mid \overline{A}_1)P(A_3 \mid \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) = \frac{14}{20} \cdot \frac{6}{19} \cdot \frac{5}{18} + \frac{6}{20} \cdot \frac{14}{19} \cdot \frac{5}{18} +$$

$$+ \frac{6}{20} \cdot \frac{5}{19} \cdot \frac{14}{18} \approx 0{,}184.$$

О т в е т : а) 0,319, б) 0,184.

Задача 4. Электрическая цепь на участке MN собрана по схеме, приведённой на рисунке. Все элементы цепи e_1 – e_7 выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность безотказной работы в течение времени T участка цепи MN, при условии, что вероятность безотказного функционирования в течение этого промежутка времени каждого из элементов e_1 – e_7 равна 0,9.



Решение. E: исследуется работа участка электрической цепи.

Обозначим события:

A_i = {безотказная работа в течение времени T элемента e_i}, $i = \overline{1,7}$.

Согласно условию $P(A_i) = 0{,}9$, $i = \overline{1,7}$.

D = {безотказная работа в течение времени T участка цепи MN}.

Для вычисления вероятности события D рассмотрим вспомогательные события:

B_1 = {безотказная работа в течение времени T участка цепи MK},

B_2 = {безотказная работа в течение времени T участка цепи KN}.

Для функционирования участка MN необходима безотказная работа участков MK и KN, т.е. $D = B_1 \cap B_2$.

Учитывая, что все элементы цепи выходят из строя независимо друг от друга, события B_1 и B_2 являются независимыми, поэтому для вычисления вероятности события D применим теорему умножения для независимых событий:

$$P(D) = P(B_1) \cdot P(B_2).$$

Для функционирования участка цепи MK необходима безотказная работа хотя бы одной из двух ветвей этого участка. Для безотказной работы первой ветви необходимо одновременное функционирование элементов e_1 и e_2. Для безотказной работы второй ветви необходимо функционирование элемента e_3. Отсюда $B_1 = (A_1 \cap A_2) \cup A_3$.

Учитывая, что события $A_1 \cap A_2$ и A_3 – совместны, а все события A_i – независимы, получим

$$P(B_1) = P((A_1 \cap A_2) \cup A_3) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) =$$
$$= P(A_1) \cdot P(A_2) + P(A_3) - P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}9^2 + 0{,}9 - 0{,}9^3 = 0{,}981.$$

Для вычисления вероятности события B_2 удобно перейти к рассмотрению события $\overline{B}_2$, состоящего в отказе участка цепи KN. Для наступления этого события необходим одновременный выход из строя элементов e_4 и e_7, а также выход из строя хотя бы одного из элементов e_5 и e_6. Отсюда $\overline{B}_2 = \overline{A}_4 \cap (\overline{A}_5 \cup \overline{A}_6) \cap \overline{A}_7$.

Учитывая, что события $\overline{A}_5$ и $\overline{A}_6$ – совместны и все события A_i (следовательно, и $\overline{A}_i$) – независимы, получим

$$P(\overline{B}_2) = P(\overline{A}_4 \cap (\overline{A}_5 \cup \overline{A}_6) \cap \overline{A}_7) =$$
$$= P(\overline{A}_4) \cdot (P(\overline{A}_5) + P(\overline{A}_6) - P(\overline{A}_5) \cdot P(\overline{A}_6)) \cdot P(\overline{A}_7) =$$
$$= 0{,}1 \cdot (0{,}1 + 0{,}1 - 0{,}1^2) \cdot 0{,}1 = 0{,}1 \cdot 0{,}19 \cdot 0{,}1 = 0{,}0019,$$

где $P(\overline{A}_i) = 1 - P(A_i) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$, $i = \overline{1,7}$.

Отсюда $P(B_2) = 1 - P(\overline{B}_2) = 1 - 0{,}0019 = 0{,}9981.$

Таким образом, вероятность события D

$$P(D) = P(B_1) \cdot P(B_2) = 0{,}981 \cdot 0{,}9981 \approx 0{,}979.$$

О т в е т: 0,979.

Задача 5. Изделие проверяется на стандартность одним из двух контролеров. Первый контролер проверяет 60 % всех изделий, второй – 40 %. Вероятность того, что изделие будет признано стандартным первым контролером, равна 0,9, вторым – 0,8. а) Какова вероятность того, что случайно выбранное изделие будет признано стандартным? б) Известно, что случайно выбранное изделие признано стандартным. Какова вероятность того, что оно проходило проверку у второго контролера?

Решение. E: проверяется качество случайно выбранного изделия. Рассмотрим событие A = {случайно выбранное изделие будет признано стандартным}. Поскольку неизвестно, какой из контролеров будет проверять это изделие, выдвинем две гипотезы:

H_1 = {изделие будет проверять первый контролер},

H_2 = {изделие будет проверять второй контролер}.

По условию вероятности гипотез равны: $P(H_1) = 0{,}6$, $P(H_2) = 0{,}4$.

Условные вероятности события A при осуществлении этих гипотез равны: $P(A|H_1) = 0{,}9$, $P(A|H_2) = 0{,}8$.

а) Вероятность события A найдем по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = 0{,}6 \cdot 0{,}9 + 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}86.$$

б) Для определения вероятности того, что изделие проверял второй контролер, при условии, что оно признано стандартным, воспользуемся формулой Байеса

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(H_2)P(A \mid H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}8}{0{,}86} \approx 0{,}372.$$

О т в е т : а) 0,86, б) 0,372.

Задача 6. На складе находятся партии образцов мелкозернистого бетона. Известно, что 75 % образцов соответствуют классу В25. Случайным образом отбирается 5 образцов. Какова вероятность того, что а) 3 образца будут соответствовать классу В25, б) классу В25 будут соответствовать не более 2 образцов?

Решение. E: классификация 5 образцов бетона. Данный эксперимент можно рассматривать как серию из $n = 5$ независимых испытаний, в каждом из которых вероятность события A = {образец будет соответствовать классу В25} одинакова и равна 0,75: $p = 0{,}75$, $q = 0{,}25$.

а) Для вычисления события B = {3 образца будут соответствовать классу В25} воспользуемся формулой Бернулли ($k = 3$):

$$P(B) = P_5(3) = C_5^3 \cdot 0{,}75^3 \cdot 0{,}25^{5-3} = 10 \cdot 0{,}75^3 \cdot 0{,}25^2 \approx 0{,}26.$$

б) Найдем вероятность события C = {классу В25 будут соответствовать не более 2 образцов}:

$$P(C) = P_5(\le 2) = \sum_{k=0}^{2} P_5(k) = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2).$$

Применяя формулу Бернулли для каждого слагаемого, имеем:

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot 0{,}75^0 \cdot 0{,}25^{5-0} = 0{,}25^5 \approx 0{,}001,$$

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot 0{,}75^1 \cdot 0{,}25^{5-1} = 5 \cdot 0{,}75^1 \cdot 0{,}25^4 \approx 0{,}015,$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot 0{,}75^2 \cdot 0{,}25^{5-2} = 10 \cdot 0{,}75^2 \cdot 0{,}25^3 \approx 0{,}088.$$

$$P(C) = P_5(\le 2) \approx 0{,}001 + 0{,}015 + 0{,}088 = 0{,}104.$$

О т в е т : а) 0,26, б) 0,104.

Задача 7. В наличии имеется 98 % безосновных тензорезисторов и 2 % безанкерных тензорезисторов. Для регистрации деформации конструкций было использовано 100 тензорезисторов. Какова вероятность того, что а) 3 из них – безанкерные? б) было использовано не более 5 безанкерных тензорезисторов?

Решение. E: классификация 100 тензорезисторов. Данный эксперимент можно рассматривать как серию из $n = 100$ независимых испытаний, в каждом из которых с одной и той же вероятностью $p = 0{,}02$ может наступить событие A = {выбран безанкерный тензорезистор}.

а) Поскольку n велико, а вероятность «успеха» p мала (< 0,1), то для вычисления вероятности события B = {из 100 использованных тензорезисторов 3 безанкерных} воспользуемся приближенной формулой Пуассона. В данном случае: $n = 100$, $k = 3$, $p = 0{,}02$, $\lambda = np = 2$.

$$P(B) = P_{100}(3) \approx \frac{2^3 e^{-2}}{3!} = \frac{8e^{-2}}{6} \approx 0{,}18.$$

б) Найдем вероятность события C = {из 100 использованных тензорезисторов не более 5 безанкерных}:

$$P(C) = P_{100}(\le 5) = \sum_{k=0}^{5} P_{100}(k).$$

Применяя формулу Пуассона для каждого слагаемого, имеем:

$$P(C) = P_{100}(\le 5) \approx \frac{2^0 e^{-2}}{0!} + \frac{2^1 e^{-2}}{1!} + \frac{2^2 e^{-2}}{2!} + \frac{2^3 e^{-2}}{3!} + \frac{2^4 e^{-2}}{4!} + \frac{2^5 e^{-2}}{5!} =$$

$$= e^{-2}\left(1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{15}\right) \approx 0{,}982.$$

О т в е т : а) 0,18, б) 0,982.

Задача 8. Для определенной в условии задачи дискретной случайной величины:

1 Построить ряд распределения и столбцовую диаграмму.

2 Найти функцию распределения и построить ее график.

3 Вычислить числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду.

Рассматривается работа трёх независимо функционирующих водонагревательных приборов. Вероятности безотказной работы в течение времени T для каждого из приборов равны соответственно: 0,7, 0,8 и 0,9. Случайная величина ξ – число приборов, проработавших безотказно в течение времени T.

Решение. Построим ряд распределения случайной величины ξ. Данная случайная величина может принимать четыре значения: 0, 1, 2, 3.

Рассмотрим события A_i = {i-й водонагревательный прибор проработал безотказно в течение времени T }, i = 1, 2, 3. Тогда $P(A_1) = 0{,}7$, $P(A_2) = 0{,}8$, $P(A_3) = 0{,}9$.

События $\{\xi = j\}$, j = 0, 1, 2, 3, можно представить в виде

$$\{\xi = 0\} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3;$$
$$\{\xi = 1\} = (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3);$$
$$\{\xi = 2\} = (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3);$$
$$\{\xi = 3\} = A_1 \cap A_2 \cap A_3.$$

По теореме умножения вероятностей для независимых событий и теореме сложения вероятностей для несовместных событий имеем:

$$P\{\xi = 0\} = P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}006;$$

$$P\{\xi = 1\} = P(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3)) =$$
$$= 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}092;$$

$$P\{\xi = 2\} = P((\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3)) =$$
$$= 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 + 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 = 0{,}398;$$

$$P\{\xi = 3\} = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}504.$$

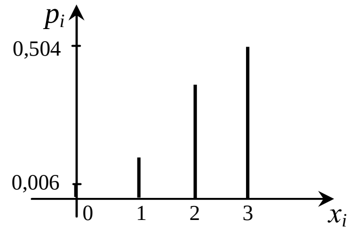
Здесь $P(\overline{A}_1) = 0{,}3$, $P(\overline{A}_2) = 0{,}2$, $P(\overline{A}_3) = 0{,}1$.

Таким образом, ряд распределения случайной величины ξ имеет вид

x_i	0	1	2	3
p_i	0,006	0,092	0,398	0,504

Проверка: $\sum\limits_{i=1}^{4} p_i = 0{,}006 + 0{,}092 + 0{,}398 + 0{,}504 = 1.$

Построим столбцовую диаграмму случайной величины ξ:



Найдем функцию распределения $F(x) = P\{\xi < x\}$ случайной величины ξ:

при $x \le 0$ $F(x) = P\{\xi < x\} = 0;$

при $0 < x \le 1$ $F(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi = 0\} = 0{,}006;$

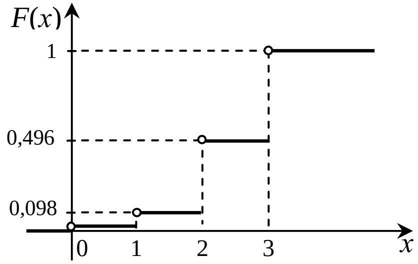
при $1 < x \le 2$ $F(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\} =$
$= 0{,}006 + 0{,}092 = 0{,}098;$

при $2 < x \le 3$ $F(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\} + P\{\xi = 2\} =$
$= 0{,}006 + 0{,}092 + 0{,}398 = 0{,}496;$

при $x > 3$ $F(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\} + P\{\xi = 2\} + P\{\xi = 3\} =$
$= 0{,}006 + 0{,}092 + 0{,}398 + 0{,}504 = 1.$

Таким образом, функция распределения случайной величины ξ и её график имеют вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0{,}006, & 0 < x \le 1, \\ 0{,}098, & 1 < x \le 2, \\ 0{,}496, & 2 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$



Определим математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины:

$$M[\xi] = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 0 \cdot 0{,}006 + 1 \cdot 0{,}092 + 2 \cdot 0{,}398 + 3 \cdot 0{,}504 = 2{,}4.$$

$$D[\xi] = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 p_i - (M[\xi])^2 =$$

$$= 0^2 \cdot 0{,}006 + 1^2 \cdot 0{,}092 + 2^2 \cdot 0{,}398 + 3^2 \cdot 0{,}504 - (2{,}4)^2 = 0{,}46.$$

$$\sigma[\xi] = \sqrt{D[\xi]} = \sqrt{0{,}46} \approx 0{,}678.$$

Как следует из ряда распределения $Mod[\xi] = 3$.

Задача 9. Закон распределения непрерывной случайной величины задан функцией плотности $f(x)$. Требуется:

1 Определить значение параметра C, построить график функции плотности.

2 Найти функцию распределения данной случайной величины и построить её график.

3 Вычислить числовые характеристики случайной величины ξ: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану.

4 Найти вероятность того, что случайная величина ξ примет значение, принадлежащее отрезку $[a; b]$.

$$f(x) = \begin{cases} x + C, & x \in [0;1]; \\ 0, & x \notin [0;1]. \end{cases} \quad a = 0{,}5,\ b = 1.$$

Решение. Для определения неизвестного параметра C воспользуемся свойством функции плотности:

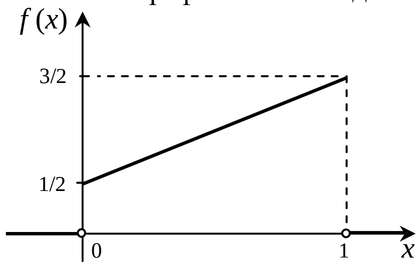
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} (x + C)dx + \int_{0}^{+\infty} 0dx = \left.\left(\frac{x^2}{2} + Cx\right)\right|_0^1 = \frac{1}{2} + C = 1.$$

Отсюда С = 1/2.

Таким образом, функция плотности и ее график имеют вид

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{2}, & x \in [0;1]; \\ 0, & x \notin [0;1]. \end{cases}$$



Найдем функцию распределения данной случайной величины

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt:$$

при $x \in (-\infty; 0]$ $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0;$

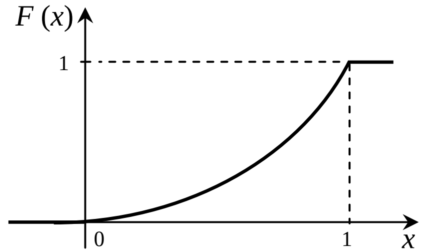
при $x \in (0;1]$ $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x}\left(t + \frac{1}{2}\right)dt = \left.\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2}\right)\right|_0^x = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2};$

при $x \in (1; +\infty]$ $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{1}\left(t + \frac{1}{2}\right)dt + \int_{1}^{+\infty} 0dt =$

$$= \left.\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2}\right)\right|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Таким образом, функция распределения и ее график имеют вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{2}, & 0 < x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$



Определим числовые характеристики случайной величины ξ:

$$M[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0dx + \int_{0}^{1} x \cdot (x + \frac{1}{2})dx + \int_{1}^{+\infty} x \cdot 0dx = \left.\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\right)\right|_0^1 = \frac{7}{12} \approx 0{,}583.$$

$$D[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - (MX)^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0dx + \int_{0}^{1} x^2 \cdot (x + \frac{1}{2})dx + \int_{1}^{+\infty} x^2 \cdot 0dx - \left(\frac{7}{12}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^1 - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{60}{144} - \frac{49}{144} = \frac{11}{144} \approx 0{,}076.$$

$$\sigma[\xi] = \sqrt{D[\xi]} = \sqrt{0{,}076} \approx 0{,}276.$$

Функция плотности случайной величины ξ достигает своего локального максимума в точке $x = 1$, поэтому $Mod[\xi] = 1$.

Для определения медианы воспользуемся равенством:

$$F(Med[\xi]) = 0{,}5.$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Решая это уравнение, получим $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Поскольку $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1{,}618 \notin [0;1]$, то $Med[\xi] = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}618.$

Для вычисления вероятности того, что случайная величина попадёт в промежуток [0,5; 1], воспользуемся свойством функции плотности:

$$P(a \le \xi \le b) = \int_a^b f(x)dx.$$

В данном случае

$$P(0{,}5 \le \xi \le 1) = \int_{0{,}5}^{1} (x + \frac{1}{2})dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right)\Bigg|_{0{,}5}^{1} = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}.$$

Задача 10. Производится испытание образцов бетона на морозостойкость. Известно, что испытание не выдерживают 5 % образцов. Испытания проводятся до обнаружения первого бракованного образца. Определить среднее число успешных испытаний.

Решение. Рассмотрим событие A = {образец бетона не выдержит испытание}, и случайную величину ξ – число испытаний, предшествующих первому наступлению события A. Так как вероятность наступления события A постоянна в каждом испытании $P(A) = 0{,}05$, то ξ имеет геометрический закон распределения с параметром $p = 0{,}05$, т.е. $\xi \sim G(0{,}05)$. Среднее число испытаний характеризуется математическим ожиданием случайной величины ξ

$$M[\xi] = \frac{1-p}{p} = \frac{1-0{,}05}{0{,}05} = 19 \text{ [испытаний]}.$$

Ответ: 19 испытаний.

Задача 11. Время, необходимое для устройства системы водоотвода на мостовых сооружениях, распределено по экспоненциальному закону с параметром $\lambda = 0{,}08$ сут$^{-1}$. Определить вероятность того, что для устройства системы водоотвода понадобится не более 10 суток.

Решение. Рассмотрим случайную величину ξ – время, необходимое для устройства системы водоотвода на мостовых сооружениях. По условию случайная величина ξ имеет экспоненциальный закон распределения с параметром $\lambda = 0{,}08$, т.е. $\xi \sim E(0{,}08)$. Функция плотности случайной величины ξ имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 0), \\ 0{,}08e^{-0{,}08x}, & x \in [0; +\infty). \end{cases}$$

Определим вероятность события A = {устройство системы водоотвода будет длиться не более 10 суток}:

$$P(A) = P(0 < \xi \le 10) = \int_0^{10} f(x)dx = \int_0^{10} 0{,}08e^{-0{,}08x}dx = -e^{-0{,}08x}\Big|_0^{10} \approx$$

$$\approx -0{,}449 + 1 = 0{,}551.$$

Ответ: 0,551.

5 ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ

Номера задач, которые необходимо выполнить, определяются с помощью приведённой ниже таблицы. Номер варианта указывается преподавателем. Первая расчётно-графическая работа включает в себя семь задач (разделы 1–7), вторая расчётно-графическая работа включает в себя четыре задачи (разделы 8–11).

Номер варианта	**Номер задания**										
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
1	1	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21
2	2	1	30	29	28	27	26	25	24	23	22
3	3	2	1	30	29	28	27	26	25	24	23
4	4	3	2	1	30	29	28	27	26	25	24
5	5	4	3	2	1	30	29	28	27	26	25
6	6	5	4	3	2	1	30	29	28	27	26
7	7	6	5	4	3	2	1	30	29	28	27
8	8	7	6	5	4	3	2	1	30	29	28
9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	30	29
10	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	30
11	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
12	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
13	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3
14	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4
15	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5
16	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6
17	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7
18	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8
19	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9
20	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10

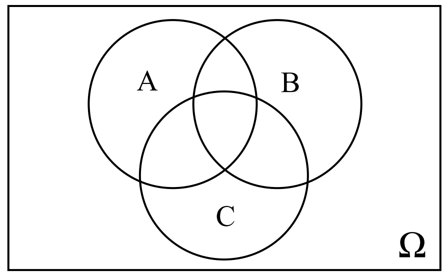
Номер варианта	**Номер задания**										
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
21	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
22	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12
23	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13
24	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14
25	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15
26	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16
27	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17
28	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18
29	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19
30	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20
31	1	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21
32	2	1	30	29	28	27	26	25	24	23	22
33	3	2	1	30	29	28	27	26	25	24	23
34	4	3	2	1	30	29	28	27	26	25	24
35	5	4	3	2	1	30	29	28	27	26	25
36	6	5	4	3	2	1	30	29	28	27	26
37	7	6	5	4	3	2	1	30	29	28	27
38	8	7	6	5	4	3	2	1	30	29	28
39	9	8	7	6	5	4	3	2	1	30	29
40	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	30
41	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
42	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
43	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3
44	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4
45	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5
46	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6
47	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7
48	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8
49	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9
50	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10
51	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
52	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12
53	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13

Номер варианта	Номер задания										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
54	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14
55	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15
56	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16
57	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17
58	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18
59	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19
60	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20
61	1	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21
62	2	1	30	29	28	27	26	25	24	23	22
63	3	2	1	30	29	28	27	26	25	24	23
64	4	3	2	1	30	29	28	27	26	25	24
65	5	4	3	2	1	30	29	28	27	26	25
66	6	5	4	3	2	1	30	29	28	27	26
67	7	6	5	4	3	2	1	30	29	28	27
68	8	7	6	5	4	3	2	1	30	29	28
69	9	8	7	6	5	4	3	2	1	30	29
70	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	30
71	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
72	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
73	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3
74	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4
75	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5
76	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6
77	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7
78	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8
79	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9
80	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10
81	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
82	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12
83	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13
84	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14
85	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15
86	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16

Номер варианта	Номер задания										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
87	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17
88	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18
89	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19
90	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20
91	1	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21
92	2	1	30	29	28	27	26	25	24	23	22
93	3	2	1	30	29	28	27	26	25	24	23
94	4	3	2	1	30	29	28	27	26	25	24
95	5	4	3	2	1	30	29	28	27	26	25
96	6	5	4	3	2	1	30	29	28	27	26
97	7	6	5	4	3	2	1	30	29	28	27
98	8	7	6	5	4	3	2	1	30	29	28
99	9	8	7	6	5	4	3	2	1	30	29
100	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	30

Задание 1

E: из прямоугольной области случайным образом выбирается точка. Определим события



A = {выбранная точка принадлежит кругу A},

B = {выбранная точка принадлежит кругу B},

C = {выбранная точка принадлежит кругу C}.

Заштриховать области, содержащие элементарные исходы, благоприятствующие наступлению следующих событий:

1.1 $A\cup B\cup C$, $(A\cup B)\cap C$, $C\setminus\overline{A\cap B}$, $(\overline{C}\setminus A)\cup\overline{B}$.

1.2 $(A\setminus B)\cup C$, $A\cup(B\cap C)$, $(\overline{C}\setminus A)\cap B$, $(C\cup\overline{B})\setminus\overline{A}$.

1.3 $(A\cup B)\setminus C$, $(A\cap B)\cup C$, $C\cap\overline{A\cup B}$, $(B\setminus\overline{C})\cup\overline{A}$.

1.4 $(A\setminus B)\setminus C$, $A\cap(B\cup C)$, $(C\cap\overline{A})\cup B$, $(B\cup\overline{A})\setminus\overline{C}$.

1.5 $B\cup A\cup C$, $(A\setminus B)\cap C$, $C\cup\overline{A\cap B}$, $(\overline{A}\setminus C)\cup B$.

1.6 $(B \setminus A) \cup C$, $A \setminus (B \cap C)$, $(C \cup A) \cap \overline{B}$, $(\overline{A} \setminus \overline{B}) \cup C$.

1.7 $(B \cup A) \setminus C$, $(A \cap B) \setminus C$, $\overline{B} \cap (C \setminus A)$, $(C \setminus \overline{B}) \setminus A$.

1.8 $(B \setminus A) \setminus C$, $A \cap (B \setminus C)$, $(B \cap C) \setminus \overline{A}$, $(\overline{C} \cup B) \setminus \overline{A}$.

1.9 $C \cup A \cup B$, $(C \cup B) \cap A$, $\overline{B} \setminus (C \cap A)$, $(C \setminus \overline{B}) \cup \overline{A}$.

1.10 $(C \setminus A) \cup B$, $C \cup (B \cap A)$, $(B \setminus \overline{C}) \cap A$, $\overline{C} \cup B \cup \overline{A}$.

1.11 $(C \cup A) \setminus B$, $(C \cap B) \cup A$, $\overline{B} \cap (C \cup A)$, $(B \setminus \overline{C}) \setminus A$.

1.12 $(C \setminus A) \setminus B$, $C \cap (B \cup A)$, $(\overline{B} \cap C) \cup A$, $(\overline{B} \cup C) \setminus \overline{A}$.

1.13 $A \cup C \cup B$, $(C \setminus B) \cap A$, $B \cup \overline{C \cap A}$, $(B \setminus \overline{C}) \cup A$.

1.14 $(A \setminus C) \cup B$, $C \setminus (B \cap A)$, $(\overline{B} \cup C) \cap A$, $B \cup \overline{C} \cup \overline{A}$.

1.15 $(A \cup C) \setminus B$, $(C \cap B) \setminus A$, $C \cap \overline{B \setminus A}$, $(A \setminus \overline{C}) \setminus \overline{B}$.

1.16 $(A \setminus C) \setminus B$, $C \cap (B \setminus A)$, $(C \cap \overline{B}) \setminus A$, $(\overline{A} \cup C) \setminus \overline{B}$.

1.17 $B \cup C \cup A$, $(B \cup C) \cap A$, $C \setminus \overline{B \cap A}$, $(A \setminus \overline{C}) \cup \overline{B}$.

1.18 $(B \setminus C) \cup A$, $B \cup (C \cap A)$, $(C \setminus B) \cap \overline{A}$, $\overline{A} \cup \overline{C} \cup B$.

1.19 $(B \cup C) \setminus A$, $(B \cap C) \cup A$, $\overline{C} \cap (B \cup A)$, $(\overline{C} \setminus \overline{A}) \setminus B$.

1.20 $(B \setminus C) \setminus A$, $B \cap (C \cup A)$, $(C \cap B) \cup \overline{A}$, $(C \cup A) \setminus \overline{B}$.

1.21 $C \cup B \cup A$, $(B \setminus C) \cap A$, $\overline{C} \cup (B \cap A)$, $(C \setminus \overline{A}) \cup B$.

1.22 $(C \setminus B) \cup A$, $B \setminus (C \cap A)$, $(C \cup \overline{B}) \cap A$, $C \cup \overline{A} \cup \overline{B}$.

1.23 $(C \cup B) \setminus A$, $(B \cap C) \setminus A$, $\overline{A} \cap (B \setminus C)$, $(\overline{B} \setminus A) \setminus \overline{C}$.

1.24 $(C \setminus B) \setminus A$, $B \cap (C \setminus A)$, $(\overline{A} \cap B) \setminus C$, $(\overline{B} \cup A) \setminus \overline{C}$.

1.25 $\overline{(A \setminus B) \cup C}$, $(C \cup A) \cap B$, $A \setminus \overline{B \cap C}$, $(B \setminus \overline{A}) \cup \overline{C}$.

1.26 $(\overline{A} \setminus C) \cup B$, $C \cup (A \cap B)$, $(\overline{A} \setminus B) \cap C$, $\overline{B} \cup \overline{A} \cup C$.

1.27 $(B \cup \overline{A}) \setminus C$, $(C \cap A) \cup B$, $A \cap \overline{B \cup C}$, $(A \setminus B) \setminus \overline{C}$.

1.28 $(B \setminus C) \cup \overline{A}$, $C \cap (A \cup B)$, $(A \cap \overline{B}) \cup C$, $(\overline{A} \cup B) \setminus \overline{C}$.

1.29 $(C \cup \overline{B}) \setminus A$, $(C \setminus A) \cap B$, $A \cup \overline{B \cap C}$, $(A \setminus \overline{B}) \cup C$.

1.30 $(\overline{C} \setminus A) \cup B$, $C \setminus (A \cap B)$, $(A \cup B) \cap \overline{C}$, $\overline{A \cup B} \cup C$.

Задание 2

2.1 В урне имеется 20 шаров: 3 белых, 10 чёрных и 7 красных. Наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что он окажется: а) белым; б) цветным (т.е. не белым)?

2.2 Трёхтомник А.П.Чехова расставили на полке в случайном порядке. Найти вероятность того, что: а) тома стоят в порядке 1-2-3; б) первым стоит том с номером 2.

2.3 Производится подбрасывание двух различимых игральных костей. Найти вероятность того, что: а) на обеих костях выпадет одинаковое число очков; б) сумма очков будет не менее 10.

2.4 Из натуральных чисел от 1 до 100 случайным образом выбирают одно. Найти вероятность того, что выбранное число будет: а) кратно 5; б) не менее 80.

2.5 Из пяти строительных объектов с номерами 1, 2, 3, 4, 5 для проверки случайным образом выбирают два. Найти вероятность того, что будут проверяться: а) объекты № 1 и № 5; б) объект № 3.

2.6 В ящике 100 микросхем. Известно, что 50 из них произведены цехом № 1, 35 – цехом № 2 и 15 – цехом № 3. Случайным образом выбрали одну микросхему. Найти вероятность того, что она произведена: а) цехом № 3; б) цехом № 1 или цехом № 3.

2.7 Пользователь некоторого web-портала помнит, что его пароль состоит из букв «к», «о», «д» в каком-то порядке. Найти вероятность того, что при случайном наборе этих букв пользователь получит доступ.

2.8 Производится подбрасывание игральной кости. Найти вероятность того, что выпадет: а) четное число очков; б) не менее 5 очков; в) не более 5 очков.

2.9 В ящике 100 деталей. Известно, что 50 из них – первого сорта, 30 – второго, 20 – третьего. Случайным образом выбрали одну деталь. Найти вероятность того, что она будет: а) первого сорта; б) иметь сорт не ниже второго.

2.10 Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 30. Найти вероятность того, что номер первого, наудачу извлеченного жетона будет: а) не менее 20; б) содержать цифру 7.

2.11 Правильную монету подбросили четыре раза. Найти вероятность того, что: а) герб выпадет четыре раза; б) герб выпадет только один раз.

2.12 Для определения номера квартиры будущим жителям подъезда предложили тянуть жребий. В подъезде 18 трёхкомнатных квартир – по две на каждом этаже. Найти вероятность того, что владелец квартиры, выбирающий первым, будет жить: а) на последнем этаже; б) на третьем или четвёртом этаже.

2.13 Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры и набрал их наудачу. Какова вероятность того, что номер набран правильно?

2.14 В денежно-вещевой лотерее на серию в 1000 билетов приходится 120 денежных и 80 вещевых выигрышей. Студент купил один билет. Найти вероятность того, что: а) студент выиграет денежный приз; б) студент выиграет денежный или вещевой приз.

2.15 Из 20 филиалов предприятия 10 расположены за чертой города. Для проверки случайным образом выбрали 2 филиала. Найти вероятность того, что среди выбранных в черте города окажется: а) два филиала; б) только один филиал.

2.16 В ящике 50 микросхем. Известно, что 30 из них произведены цехом № 1, 15 – цехом № 2 и 5 – цехом № 3. Случайным образом выбрали одну микросхему. Найти вероятность того, что она произведена: а) цехом № 2; б) цехом № 1 или цехом № 2.

2.17 В магазине имеются 30 телевизоров, причем 10 из них импортные. В течение дня продали 2 телевизора. Предполагая, что вероятности покупки телевизоров разных марок одинаковы, найти вероятность того, что продали: а) два импортных телевизора; б) один импортный телевизор.

2.18 В урне имеется 15 шаров: 3 белых, 7 чёрных и 5 красных. Наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что он окажется: а) белым; б) цветным (т.е. не белым)?

2.19 В коробке 30 жетонов с номерами от 1 до 30. Случайным образом выбирается один жетон. Найти вероятность того, что номер жетона: а) является простым числом; б) принадлежать отрезку [5; 20].

2.20 Из пяти карточек с цифрами 1, 2, 3, 4, 5 произвольным образом выбираются две и укладываются на стол в порядке их появления. Предполагая, что все возможные исходы данного эксперимента равновероятны, найти вероятность того, что полученное таким образом число будет: а) четным; б) не менее 50.

2.21 Из натуральных чисел от 1 до 106 случайным образом выбирают одно. Найти вероятность того, что выбранное число будет: а) принадлежать отрезку [10; 30]; б) кратно 6.

2.22 Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 60. Найти вероятность того, что номер первого, наудачу извлечённого жетона будет: а) кратным 3; б) содержать цифру 5.

2.23 В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам наудачу отобраны два человека. Найти вероятность того, что среди отобранных будет: а) два мужчины; б) одна женщина.

2.24 Правильную монету подбросили три раза. Найти вероятность того, что решка выпадет: а) два раза; б) не менее двух раз.

2.25 Из пяти строительных объектов с номерами 1, 2, 3, 4, 5 для проверки случайным образом выбирают два. Найти вероятность того, что будут проверяться: а) объекты № 1 и № 5; б) объект № 3.

2.26 Для определения номера квартиры будущим жителям подъезда предложили тянуть жребий. В подъезде 18 двухкомнатных квартир – по две на каждом этаже. Найти вероятность того, что владелец квартиры, выбирающий первым, будет жить: а) на первом этаже; б) на втором или третьем этаже.

2.27 В урне имеется 20 шаров: 15 белых и 5 чёрных. Случайным образом выбирается два шара. Найти вероятность того, что среди выбранных будет: а) два белых шара; б) один белый шар.

2.28 В ящике лежат 25 предохранителей, из которых 5 со скрытым дефектом. Необходимо заменить два предохранителя. Найти вероятность того, что из двух наугад взятых предохранителей без дефектов будут: а) два; б) только один.

2.29 Правильную монету подбросили четыре раза. Найти вероятность того, что: а) решка выпадет три раза; б) решка выпадет не более двух раз.

2.30 Пользователь некоторого web-портала помнит, что его пароль состоит из цифр «1», «2», «3», «4» в каком-то порядке. Найти вероятность того, что при случайном наборе этих цифр пользователь получит доступ.

Задание 3

3.1 В урне 15 белых и 10 чёрных шаров. Из урны случайным образом извлекают два шара. Найти вероятность того, что: а) оба шара будут белыми; б) хотя бы один шар будет белым.

3.2 На 6 карточках написаны буквы «т», «е», «о», «р», «и», «я». Случайным образом выбирают 3 карточки и располагают их в порядке появления. Найти вероятность того, что получится слово «тор».

3.3 Стрелок производит три выстрела по мишени. Вероятность поражения мишени в каждом выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что мишень будет поражена: а) только 1 раз; б) 3 раза.

3.4 Среди 25 экзаменационных билетов 5 «хороших». Два студента по очереди вынимают по одному билету. Найти вероятность того, что: а) обоим студентам достанутся «хорошие» билеты; б) только одному студенту достанется «хороший» билет.

3.5 В двух урнах находятся шары, отличающиеся только цветом. В первой: 5 белых, 5 чёрных, 10 красных; во второй: 6, 6, 8 соответственно. Из обеих урн наудачу извлекают по одному шару. Найти вероятность того, что: а) один из шаров будет белым, а другой чёрным; б) оба шара будут одного цвета.

3.6 На контроль поступила партия деталей. Вероятность того, что при проверке деталь окажется стандартной, равна 0,9. Найти вероятность того, что из трёх проверяемых деталей окажется: а) 3 стандартных; б) только 1 стандартная.

3.7 Студент пришел на зачёт, зная из 30 вопросов только 25. Какова вероятность сдать зачёт, если для этого необходимо ответить хотя бы на два вопроса из трех, содержащихся в билете?

3.8 Прибор состоит из трёх элементов, работающих независимо. Вероятность выхода из строя за время t для первого элемента равна 0,02, для второго – 0,05, для третьего – 0,03. Найти вероятность того, что за время t: а) выйдут из строя три элемента б) выйдет из строя хотя бы один элемент.

3.9 Среди 40 деталей 5 нестандартные. Случайным образом извлекают 3 детали. Найти вероятность того, что среди выбранных деталей нет нестандартных.

3.10 Диагностика неисправности детали производится двумя различными приборами. Первый прибор определяет неисправность с вероятностью 0,9, второй – с вероятностью 0,95. Деталь подлежит замене, если неисправность детали определит хотя бы один из приборов. Найти вероятность того, что деталь заменят.

3.11 Из шести карточек с буквами Л, И, Т, Е, Р, А случайным образом выбираются четыре и располагают в порядке появления. Найти вероятность того, что при этом получится слово ТИРЕ.

3.12 В партии, состоящей из 20 изделий, имеется 5 бракованных. Наудачу выбирается 3 изделия. Найти вероятность того, что среди них окажется: а) 3 бракованных; б) не менее 2 бракованных.

3.13 Для изготовления детали необходимы три операции. Вероятность появления брака на первой операции равна 0,03, на второй – 0,02 и на третьей – 0,015. Появление брака на отдельных операциях – независимые события. Определить вероятность изготовления стандартной детали.

3.14 Вероятность того, что в течение одной смены возникнет неполадка станка, равна 0,04. Какова вероятность того, что не произойдет ни одной неполадки за 3 смены.

3.15 Из 100 лотерейных билетов 5 выигрышных. Случайным образом выбирают 3 билета. Найти вероятность того, что среди них окажется: а) три выигрышных; б) хотя бы один выигрышный.

3.16 По статистическим данным прошлых лет известно, что водохозяйственный баланс неправильно составлен в среднем для 5 % предприятий. Для проверки случайным образом выбрали 3 предприятия. Найти вероятность того, что среди них водохозяйственный баланс неправильно составлен: а) на трех предприятиях; б) только на двух.

3.17 Прибор состоит из двух элементов, работающих независимо. Вероятность выхода из строя за время t для первого элемента равна 0,02, для второго – 0,05. Найти вероятность того, что за время t: а) выйдут из строя оба элемента б) выйдет из строя хотя бы один элемент.

3.18 Причиной разрыва электрической цепи служит выход из строя элемента K_1 или одновременный выход из строя двух элементов – K_2 и K_3. Элементы могут выйти из строя независимо друг от друга с вероятностями, равными соответственно: 0,1; 0,15; 0,2. Какова вероятность разрыва электрической цепи?

3.19 Вероятность выхода из строя стрелочного перевода в течение месяца равна 0,01. Найти вероятность того, что в течение трех месяцев стрелочный перевод выйдет из строя: а) только один раз; б) не менее одного раза.

3.20 В урне 20 белых и 5 чёрных шаров. Из урны случайным образом извлекают два шара. Найти вероятность того, что: а) оба шара будут черными; б) хотя бы один шар будет чёрным.

3.21 В цехе работают 3 станка. Вероятность выхода из строя в течение смены для первого станка равна 0,02, для второго – 0,03 и для третьего – 0,01. Найти вероятность того, что в течение смены выйдут из строя: а) три станка; б) два станка.

3.22 На 6 карточках написаны буквы «т», «е», «о», «р», «и», «я». Случайным образом выбирают 3 карточки и располагают их в порядке появления. Найти вероятность того, что получится слово «тир».

3.23 Стрелок производит три выстрела по мишени. Вероятность поражения мишени первым выстрелом равна 0,6, вторым – 0,7, третьим – 0,8. Найти вероятность того, что мишень будет поражена: а) 3 раза; б) 2 раза.

3.24 На контроль поступила партия деталей. Вероятность того, что при проверке деталь окажется бракованной, равна 0,05. Найти вероятность того, что из 3 проверяемых деталей окажется: а) 3 бракованных; б) не менее 1 бракованной.

3.25 Стрелочный перевод состоит из двух частей: электрической и механической. Вероятность выхода из строя в течение месяца электрической части равна 0,05, механической – 0,01. Найти вероятность безотказной работы перевода в течение месяца, если для этого необходимо функционирование обоих частей.

3.26 Проводятся испытания на прочность асбестоцементных труб. Вероятность для каждой трубы не выдержать испытания равна 0,1. Найти вероятность того, что из трех труб испытания не выдержат: а) три; б) одна.

3.27 На складе находятся образцы мелкозернистого бетона. Известно, что 75 % образцов соответствуют классу В25. Случайным образом отбирается 2 образца. Найти вероятность того, что среди них: а) 2 образца имеют класс В25; б) только 1 образец имеет класс В25.

3.28 Вероятности безотказной работы в течение времени t для каждого из трёх водонагревательных приборов равны соответственно: 0,85, 0,8 и 0,95. Найти вероятность того, что в течение времени t выйдут из строя: а) три прибора; б) один прибор.

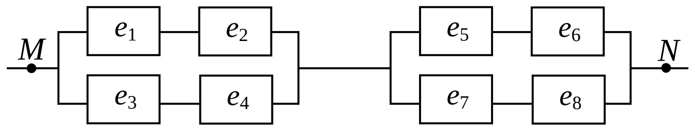
3.29 Два студента по одному разу пробивают футбольный "пенальти", выигрывает тот, кто первым забьёт мяч в ворота. Вероятность забить мяч в ворота для первого студента составляет 0,6, для второго – 0,7. Найти вероятности: а) ничьей; б) выигрыша второго студента.

3.30 Для сигнала о пожаре в помещении установлено два автономных пожарных извещателя. При этом при пожаре первый из них срабатывает с вероятностью 0,95, а второй – с вероятностью 0,99. Найти вероятность того, что при пожаре сработает: а) хотя бы один из извещателей; б) два извещателя.

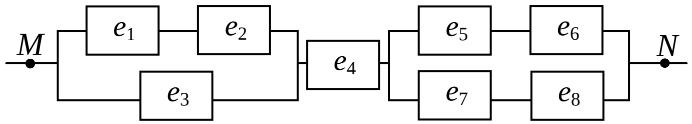
Задание 4

Электрическая цепь на участке MN собрана по схеме, приведённой на рисунке. Все элементы цепи e_1 – e_8 выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность безотказной работы в течение времени T участка цепи MN, при условии, что вероятность безотказного функционирования в течение этого промежутка времени каждого из элементов e_1 – e_8 равна 0,9.

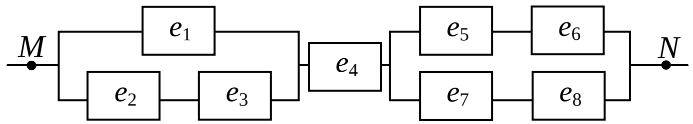
4.1



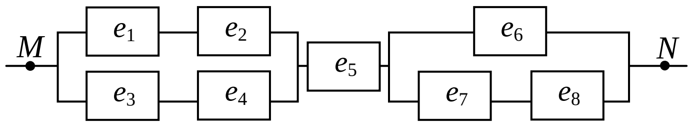
4.2



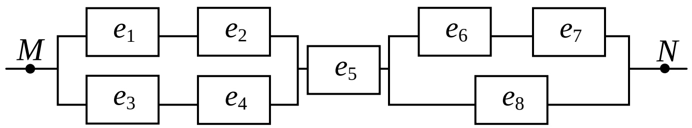
4.3



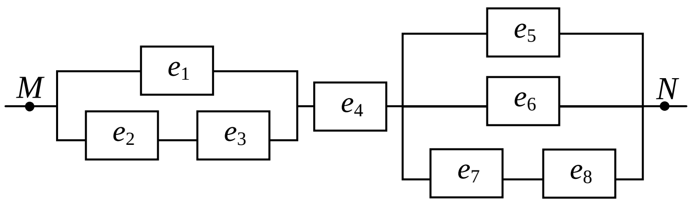
4.4



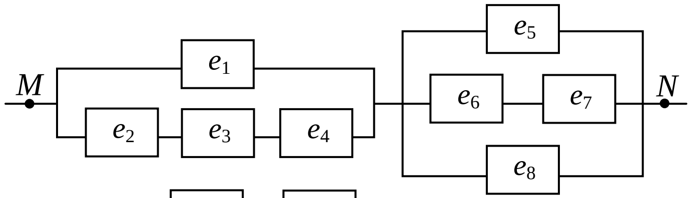
4.5



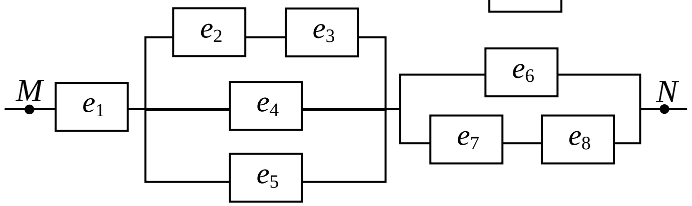
4.6



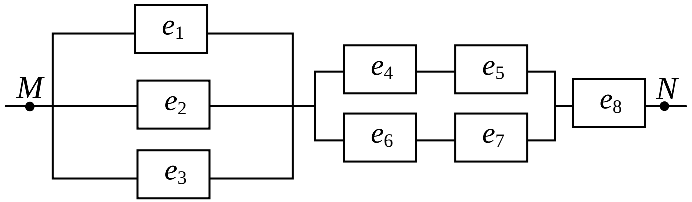
4.7



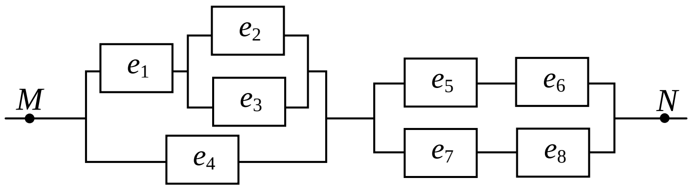
4.8



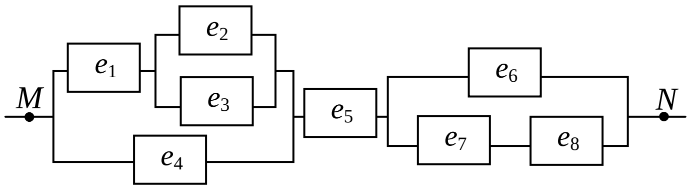
4.9



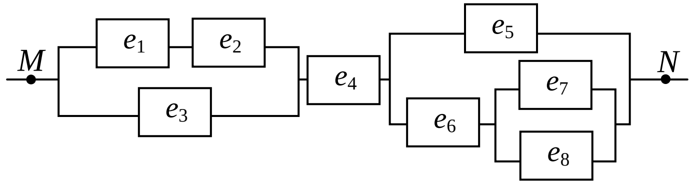
4.10



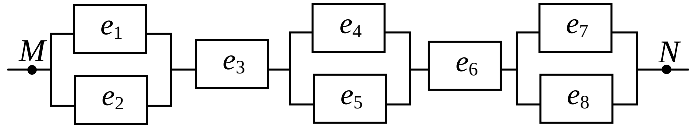
4.11



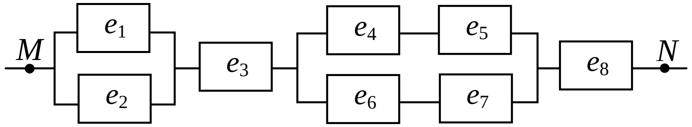
4.12



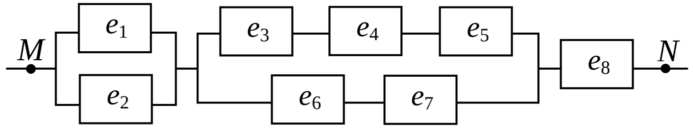
4.13



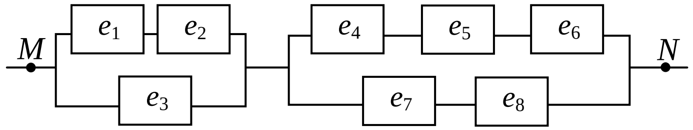
4.14



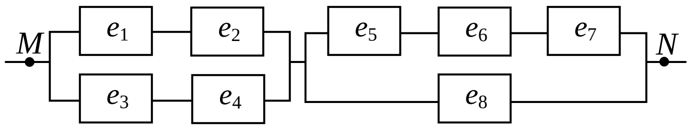
4.15



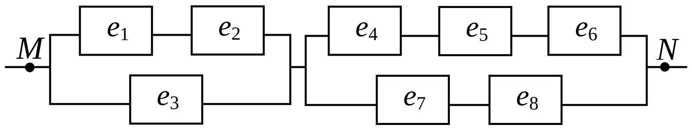
4.16



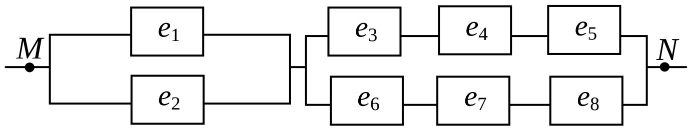
4.17



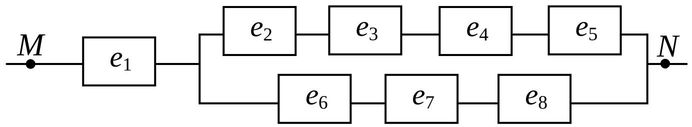
4.18



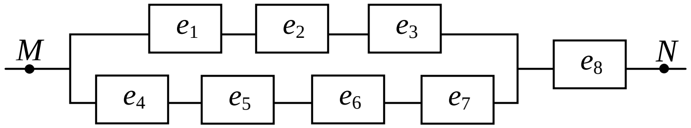
4.19



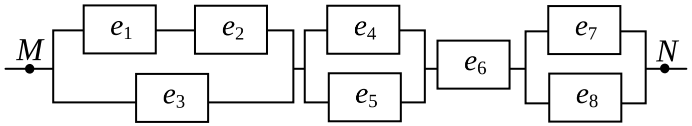
4.20



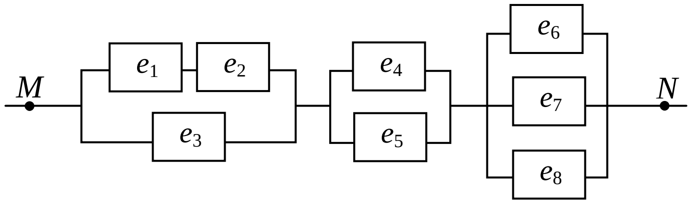
4.21



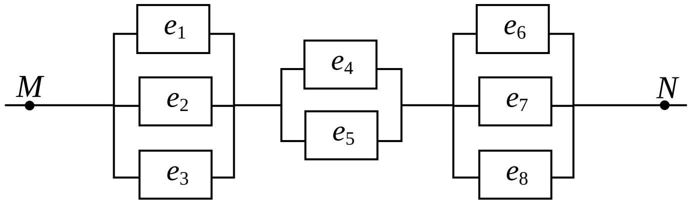
4.22



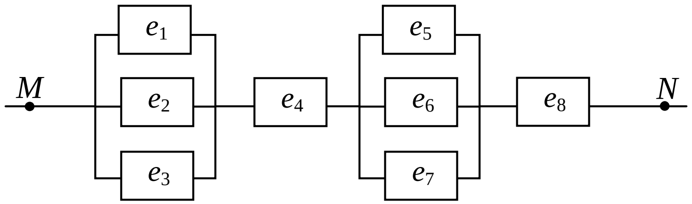
4.23



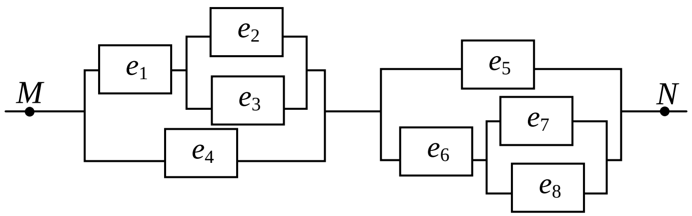
4.24



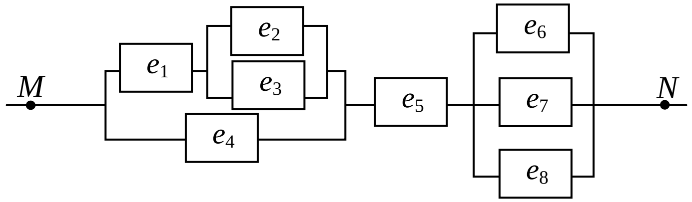
4.25



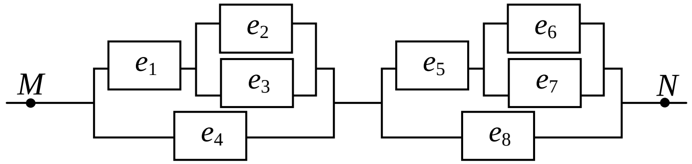
4.26



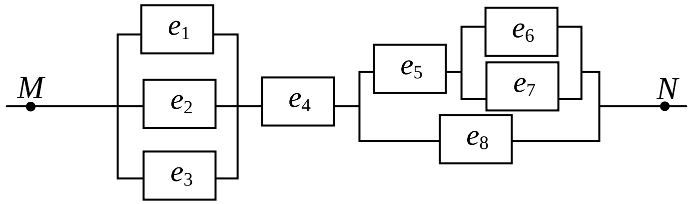
4.27



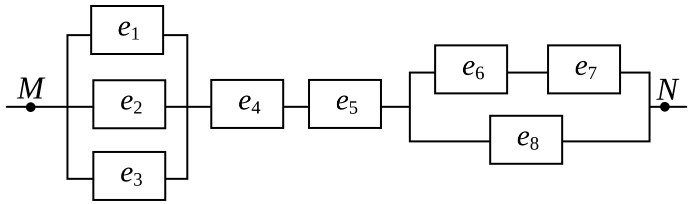
4.28



4.29



4.30



Задание 5

5.1 Прибор состоит из двух элементов. Вероятность выхода из строя за время t для первого элемента равна 0,02. Вероятность выхода из строя за время t для второго элемента при работающем первом равна 0,01, при неработающем – 0,05. а) Найти вероятность того, что за время t выйдет из строя второй элемент. б) Известно, что второй элемент вышел из строя. Определить вероятность выхода из строя первого элемента.

5.2 Студент идёт на экзамен, зная только 25 билетов из 30. Выбранные билеты далее не используются. а) Студент планирует пойти вторым по счету. Найти вероятность сдачи экзамена. б) Студент пошел вторым и сдал экзамен, найти вероятность того, что первый студент вытащил билет, который наш студент не знал.

5.3 В сборочный цех поступают детали с трех поточных линий. Производительности этих линий относятся как 5:3:2. Вероятность брака для первой линии составляет 0,01, для второй – 0,02 и для третьей линии – 0,03. а) Найти вероятность того, что наугад взятая деталь является бракованной. б) Наугад взятая деталь оказалась бракованной. Определить вероятность того, что она сделана на третьей линии.

5.4 В телеграфном сигнале «точки» и «тире» появляются в отношении 3:4. При передаче сигналы могут быть искажены: «точки» заменяются на «тире» с вероятностью 0,25, в то время как «тире» превращается в «точки» с вероятностью 0,3. а) Найти вероятность того, что при передаче сигнала он не будет искажен. б) Переданный сигнал не был искажён. Определить вероятность того, что этот сигнал – «точка».

5.5 В цехе 14 установок с автоматическим контролем и 6 с ручным. Вероятность изготовления бракованной продукции для установок с автоматическим контролем составляет 0,001, с ручным контролем – 0,002. а) Найти вероятность того, что взятая на лабораторный анализ продукция цеха оказалась бракованной? б) Взятая на лабораторный анализ продукция цеха оказалась бракованной. Определить вероятность того, что продукция производилась на установке с ручным контролем.

5.6 Среди клиентов страховой компании 50 % первого класса риска, 30 % – второго и 20 % – третьего. Вероятность необходимости выплачивать страховое вознаграждение для первого класса риска равна 0,01, второго – 0,03, третьего – 0,05. а) Найти вероятность того, что клиент компании получит денежное вознаграждение. б) Клиент за период страхования получил вознаграждение. Определить вероятность того, что он принадлежал к группе первого класса риска.

5.7 В данный район изделия поставляются тремя фирмами в соотношении 5:8:7. Среди продукции первой фирмы стандартные изделия составляют 90 %, второй – 85 %, третьей – 75 %. а) Найти вероятность того, что приобретённое изделие окажется нестандартным. б) Приобретённое изделие оказалось нестандартным. Определить вероятность того, что оно изготовлено третьей фирмой.

5.8 На складе хранятся три водонагревательных прибора. Известно, что среди них есть бракованные, причём все возможные предположения о числе бракованных приборов являются равновероятными.

а) Найти вероятность того, что наудачу извлечённый прибор является бракованным? б) Наудачу извлечённый прибор оказался бракованным. Определить вероятность того, что на складе было два бракованных прибора.

5.9 На конвейер поступают детали с двух станков. Производительность первого станка в 2 раза больше производительности второго. Вероятность брака на первом станке равна 0,01, на втором станке – 0,02. а) Найти вероятность того, что наудачу взятая деталь стандартна. б) Взятая деталь оказалась стандартной. Определить вероятность того, что она сделана на первом станке.

5.10 В продажу поступают телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 20 % телевизоров со скрытым дефектом, второго – 10 %, третьего – 5 %. В магазин поступило 30 телевизоров первого завода, 20 – второго, 50 – третьего. а) Найти вероятность того, что случайно выбранный телевизор будет исправен. б) Выбранный телевизор оказался исправен. Определить вероятность того, что он сделан на первом заводе.

5.11 В бригаде 8 рабочих и 2 ученика. Вероятность изготовить бракованное изделие для рабочего составляет 0,05, для ученика – 0,2. Производительность рабочего в два раза выше, чем у ученика. Какова вероятность, что некоторое изделие, изготовленное бригадой, окажется бракованным?

5.12 В первой урне лежат 8 белых и 12 чёрных шаров, во второй урне – 4 белых и 15 чёрных шаров. Из первой урны во вторую перекладывается один шар, затем из второй урны извлекается шар. а) Найти вероятность того, что извлечённый шар белый. б) Из второй урны извлекли белый шар. Определить вероятность того, что из первой урны извлекли белый шар.

5.13 В тире имеются 10 винтовок, из которых 7 являются пристрелянными. Вероятность попадания в мишень из пристрелянной винтовки равна 0,9, из непристрелянной – 0,2. Наугад берется винтовка, и из неё делается выстрел. а) Найти вероятность поражения мишени. б) Выстрелом из наугад выбранной винтовки мишень была поражена. Определить вероятность того, что выстрел сделан из непристрелянной винтовки.

5.14 Два стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,5.

Мишень была поражена один раз. Найти вероятность того, что в мишень попал первый стрелок.

5.15 Студент купил два лотерейных билета, один из которых подарил другу. Считая все возможные предположения о числе выигрышных билетов из двух равновероятными, найти вероятность того, что другу он подарил выигрышный билет.

5.16 Вся продукция цеха проверяется двумя контролёрами, причем первый контролёр проверяет 60 % изделий, а второй – остальные. Вероятность того, что первый контролер пропустит нестандартное изделие, равна 0,01, второй – 0,02. а) Найти вероятность того, что наудачу взятое изделие, маркированное как стандартное, окажется нестандартным. б) Наудачу взятое изделие, маркированное как стандартное, оказалось нестандартным. Определить вероятность того, что это изделие проверялось вторым контролёром.

5.17 На вход радиолокационного устройства с вероятностью 0,8 поступает смесь полезного сигнала с помехой, а с вероятностью 0,2 – только помеха. Если поступает полезный сигнал с помехой, то устройство регистрирует наличие сигнала с вероятностью 0,7, если только помеха, то – с вероятностью 0,3. а) Найти вероятность того, что устройство зарегистрирует наличие сигнала. б) Известно, что устройство зарегистрировало наличие сигнала. Найти вероятность того, что в его составе есть полезный сигнал.

5.18 Стрелочный перевод состоит из двух частей: электрической и механической. Безотказная работа каждой части необходима для работы стрелочного перевода. Вероятность выхода из строя в течение месяца электрической части равна 0,05, механической – 0,01. В течение месяца перевод вышел из строя. Найти вероятность того, что отказала механическая часть.

5.19 Иногородний студент может уехать домой на поезде или на автобусе. Билет он покупает за сутки до отправления, причём автобус выбирает в 20 % случаев. Вероятность того, что к моменту обращения студента в кассу билеты будут распроданы, равна для железнодорожного вокзала 0,3, для автобусного 0,5. а) Найти вероятность того, что студент уедет домой. б) Студент уехал домой. Определить вероятность того, что он ехал на поезде.

5.20 На складе хранятся три прибора. Известно, что среди них могут быть бракованные, причём все возможные предположения о числе бракованных приборов являются равновероятными. а) Найти вероятность того, что наудачу извлечённый прибор является бракованным? б) Наудачу извлечённый прибор оказался бракованным. Определить вероятность того, что на складе было два бракованных прибора.

5.21 Стрелочный перевод состоит из двух частей: электрической и механической. Безотказная работа каждой части необходима для работы стрелочного перевода. Вероятность выхода из строя в течение месяца электрической части равна 0,05, механической – 0,01. В течение месяца перевод вышел из строя. Найти вероятность того, что отказала электрическая часть.

5.22 При сдаче экзамена студент выучил 70 % билетов, а для оставшихся сделал шпаргалки. Если ему попадётся билет, который он учил, то вероятность сдать экзамен равна 0,99. Если ему попадётся билет, который он не учил и он будет пытаться списать, то вероятность сдать экзамен равна 0,5. а) Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен. б) Студент сдал экзамен. Определить вероятность того, что он списал.

5.23 Прибор может работать в трёх режимах: нормальном, форсированном и недогруженном. Нормальный режим наблюдается в 70 % случаев работы прибора, форсированный – в 20 % и недогруженный – в 10 %. Надёжность прибора (вероятность безотказной работы в течение времени t) для нормального режима равна 0,9, для форсированного – 0,4, для недогруженного – 0,95. а) Найти полную (с учетом случайности условий) надёжность прибора. б) Прибор проработал безотказно в течение времени t. Определить вероятность того, что он работал в нормальном режиме.

5.24 В продажу поступают телефоны трех производителей. Продукция первого производителя содержит 10 % телефонов со скрытым дефектом, второго – 15 %, третьего – 8 %. В магазин поступило 40 телефонов от первого производителя, 30 от второго и 60 от третьего. а) Найти вероятность того, что случайно выбранный телефон будет исправен. б) Выбранный телефон оказался исправен. Определить вероятность того, что он поступил от второго производителя.

5.25 В тире имеются четыре ружья, вероятности попадания из которых равны соответственно 0,9; 0,8; 0,75; 0,7. а) Найти вероятность поражения мишени выстрелом из наугад выбранного ружья. б) Выстрелом из наугад выбранного ружья мишень поражена. Определить вероятность того, что это было ружье, вероятность попадания из которого равна 0,7.

5.26 В данный район изделия поставляются двумя фирмами в соотношении 2:3. Среди продукции первой фирмы стандартные изделия составляют 80 %, второй – 90 %. а) Найти вероятность того, что приобретённое изделие окажется стандартным. б) Приобретённое изделие оказалось стандартным. Определить вероятность того, что оно изготовлено первой фирмой.

5.27 Два стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,7, для второго – 0,6. Мишень была поражена один раз. Найти вероятность того, что в мишень попал второй стрелок.

5.28 В сборочный цех поступают детали с двух поточных линий. Производительности этих линий относятся как 5:4. Вероятность брака для первой линии составляет 0,02, для второй – 0,04. а) Найти вероятность того, что наугад взятая деталь является бракованной. б) Наугад взятая деталь оказалась бракованной. Определить вероятность того, что она сделана на первой линии.

5.29 В тире имеются 10 винтовок, из которых 7 являются пристрелянными. Вероятность попадания в мишень из пристрелянной винтовки равна 0,8, из непристрелянной – 0,1. Наугад берётся винтовка, и из неё делается выстрел. а) Найти вероятность промаха. б) Выстрелом из наугад выбранной винтовки мишень была поражена. Определить вероятность того, что выстрел сделан из пристрелянной винтовки.

5.30 Студент купил три лотерейных билета, два из которых подарил друзьям. Считая все возможные предположения о числе выигрышных билетов из трех равновероятными, найти вероятность того, что себе он оставил выигрышный билет.

Задание 6

6.1 Вероятность возникновения опасной для прибора перегрузки в каждом опыте равна 0,4. Определить вероятность того, что в шести опытах число опасных перегрузок будет: а) равно трём; б) не более двух.

6.2 Биатлонист производит 5 выстрелов по мишени. Вероятность поражения мишени в каждом выстреле постоянна и равна 0,85. Найти вероятность того, что мишень будет поражена: а) четыре раза; б) не менее четырех.

6.3 Вероятность того, что при проверке деталь окажется бракованной, равна 0,1. Найти вероятность того, что из шести проверяемых деталей окажется: а) одна бракованная; б) не более одной бракованной.

6.4 Вероятность сдачи студентом каждого из пяти экзаменов равна 0,7. Найти вероятность того, что студент сдаст: а) все экзамены; б) не менее трех.

6.5 Игральная кость подбрасывается пять раз. Найти вероятность того, что 4 выпадет: а) три раза; б) не менее трёх раз.

6.6 Вероятность выигрыша по лотерейному билету составляет 0,1. Найти вероятность того, что среди 5 лотерейных билетов выигрышных будет: а) два билета; б) не менее трех.

6.7 Испытывается каждый из 10 элементов некоторого устройства. Вероятность выдержать испытание для каждого элемента составляет 0,9. Найти: а) наиболее вероятное число выдержавших испытание элементов и соответствующую этому событию вероятность; б) вероятность того, что испытание выдержат не менее 8 элементов.

6.8 Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,85. Найти вероятность того, что из 5 изготовленных деталей стандартных будет: а) четыре; б) не менее четырех.

6.9 Технологический процесс контролируется по 14 параметрам. Вероятность выхода каждого параметра за границы технических допусков составляет 0,2. Найти: а) наиболее вероятное число параметров, выходящих за границы технических допусков, и соответствующую этому событию вероятность; б) вероятность выхода за границы технических допусков не более 3 параметров.

6.10 Вероятность малому предприятию стать банкротом за время t равна 0,2. Найти вероятность того, что из шести малых предприятий за время t сохранятся: а) два; б) более двух.

6.11 Монета бросается 6 раз. Найти: а) наиболее вероятное число выпадений герба и соответствующую вероятность; б) вероятность того, что герб появится не менее 4 раз.

6.12 Два равносильных противника играют в шахматы. Что более вероятно: выиграть 2 партии из 4 или 3 партии из 6? (Ничьи в расчёт не принимаются.)

6.13 Прибор состоит из 10 узлов. За время t каждый из узлов может выйти из строя независимо от других с вероятностью 0,1. Найти: а) наиболее вероятное число вышедших из строя узлов и соответствующую этому событию вероятность; б) вероятность того, что за время t выйдет из строя хотя бы один узел.

6.14 Отдел технического контроля проверяет партию изделий из 10 деталей. Вероятность того, что деталь будет стандартной, равна 0,75. Найти: а) наиболее вероятное число деталей, которые будут признаны стандартными; б) вероятность того, что число стандартных деталей будет не менее 8.

6.15 Вероятность попадания бомбы в цель составляет 0,25. Сбрасывается 8 бомб. Найти вероятность того, что число попаданий будет: а) равно 4; б) не менее 7.

6.16 Экспериментально установлено, что при подбрасывании спичечного коробка количества его падений на меньшую, среднюю и большую грани относятся как 1:4:15. Найти вероятность того, что при 6 подбрасываниях коробок: а) 5 раз упадет на большую грань; б) 1 раз упадет на среднюю грань.

6.17 Вероятность возникновения трещины в оси колёсной пары за время t равна 0,05. Найти вероятность того, что среди десяти колёсных пар за время t трещины образуются: а) в одной колёсной паре; б) не более чем в одной.

6.18 В квартире 8 электролампочек. Вероятность работы лампочки в течение года равна 0,9. Какова вероятность того, что в течение года придется заменить: а) четыре лампочки; б) не менее половины лампочек?

6.19 Фирма, занимающаяся продажей строительных материалов, имеет пять магазинов. Ежедневно с вероятностью 0,3 каждый магазин, независимо от других, может заказать на следующий день крупную партию товара. Найти вероятность того, что на определённый день поступит: а) две заявки; б) хотя бы одна заявка.

6.20 По статистическим данным 10 % открывающихся новых предприятий прекращают свою деятельность в течение года. Найти вероятность того, что из семи малых предприятий прекратят свою деятельность: а) пять; б) не менее пяти.

6.21 Два равносильных противника играют в шахматы. Что более вероятно: выиграть 1 партии из 2 или 2 партии из 4? (Ничьи в расчет не принимаются).

6.22 Вероятность изготовления на автоматическом станке бракованной детали равна 0,15. Найти вероятность того, что из 6 изготовленных деталей бракованных будет: а) одна; б) не более двух.

6.23 В среднем пятая часть поступающих в продажу автомобилей некомплектны. Найти вероятность того, что среди десяти автомобилей имеют некомплектность: а) три автомобиля; б) не менее трёх.

6.24 Производится залп из пяти орудий по некоторому объекту. Вероятность попадания в объект из каждого орудия равна 0,7. Найти вероятность ликвидации объекта, если для этого необходимо не менее трёх попаданий.

6.25 В среднем по 15 % договоров страховая компания выплачивает страховую сумму. Найти вероятность того, что из десяти договоров страховая компания выплатит страховую сумму: а) по трём договорам; б) не более чем по трём договорам.

6.26 Прибор состоит из 7 узлов. Вероятность безотказной работы за время t для каждого из узлов равна 0,8. Найти вероятность того, что за время t безотказно работать будут: а) шесть узлов; б) не менее шести узлов.

6.27 В бригаде 10 человек. Вероятность невыхода на работу одного человека по причине болезни равна 0,05. Найти вероятность того, что по причине болезни на работу не выйдут: а) два человека; б) не более двух.

6.28 Тест состоит из пяти вопросов, предусматривающих ответы «да» или «нет». Студент не знает ответ ни на один вопрос и выбирает ответы наугад. Найти: а) наиболее вероятное число правильных ответов и соответствующую этому событию вероятность; б) вероятность того, что число правильных ответов будет не менее четырёх.

6.29 Вероятность того, что изделие успешно пройдет контроль, равна 0,8. Найти вероятность того, что из шести изделий контроль успешно пройдут: а) четыре изделия; б) не менее четырех изделий.

6.30 В автопарке предприятия имеется 10 автомобилей, для каждого из которых вероятность работы без простоев из-за ремонта в течение месяца равна 0,8. Найти: а) наиболее вероятное число автомобилей, не потребовавших ремонта в течение месяца, и соответствующую этому событию вероятность; б) вероятность того, что в течение месяца без простоев проработают не менее восьми автомобилей.

Задание 7

7.1 Вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0,002. Сверла укладываются в коробки по 100 штук. Найти вероятность того, что: а) в коробке не окажется бракованных свёрл; б) число бракованных свёрл окажется не более трёх.

7.2 На контроль поступила партия из 100 деталей. Вероятность того, что при проверке деталь окажется стандартной, равна 0,8. Найти вероятность того, что в партии окажется: а) три стандартных детали; б) не менее половины стандартных.

7.3 Вероятность того, что в течение одной смены возникнет неполадка станка, равна 0,04. Найти: а) наиболее вероятное число неполадок за квартал (90 дней); б) вероятность того, что за квартал (90 дней) произойдет не более трёх неполадок.

7.4 По статистическим данным известно, что в определённом городе 60 % жителей имеют выход в Internet. Найти вероятность того, что из 200 человек выход в Internet имеют: а) половина; б) не менее половины.

7.5 Магазин получил 1000 стеклянных бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка будет разбита, равна 0,003. Найти вероятность того, что при перевозке будут разбиты: а) две бутылки; б) не более двух бутылок.

7.6 По статистическим данным в среднем 87 % новорожденных доживают до 50 лет. Найти вероятность того, что из 1000 новорожденных до 50 лет доживут: а) половина; б) не менее половины.

7.7 Лабораторную работу по математической статистике с первого раза успешно выполняют 50 % студентов. Найти вероятность того, что из 100 студентов работу успешно выполнят: а) 60 студентов; б) не менее 60 студентов.

7.8 Электрическая цепь состоит из 120 однотипных элементов. Вероятность выхода из строя за время t для каждого элемента одинакова и равна 0,3. Элементы работают независимо друг от друга. Найти: а) наиболее вероятное число элементов, вышедших из строя за время t, и соответствующую этому событию вероятность; б) вероятность того, что число вышедших из строя элементов будет от 50 до 100 включительно.

7.9 Строительная организация заказала партию из 10000 кирпичей. Вероятность того, что при перевозке кирпич будет испорчен, равна 0,0002. Найти: а) наиболее вероятное число кирпичей, испорченных при перевозке, и соответствующую этому событию вероятность; б) вероятность того, что при перевозке будут испорчены не более десяти кирпичей.

7.10 Вероятность изготовления на заводе первосортного холодильника составляет 0,9. В магазин поступили 100 холодильников. Найти вероятность того, что: а) среди них будет 92 первосортных холодильника; б) число первосортных холодильников будет находится в пределах от 80 до 90 включительно.

7.11 Вероятность брака при переплёте дипломной работы в типографии составляет 0,01. В типографию поступило 300 работ. Найти вероятность того, что при переплёте работ брак будет допущен: а) 3 раза; б) не более 3 раз.

7.12 Депо производит ремонт вагонов. Вероятность того, что ремонт будет произведен со сдачей с первого предъявления, равна 0,92. Найти вероятность того, что из 150 вагонов, отремонтированных в депо, с первого предъявления будут сданы: а) ровно 80 вагонов; б) не менее 80 вагонов.

7.13 Всхожесть семян новой культуры составляет 85 %. Найти вероятность того, что из 500 посеянных семян взойдут: а) ровно половина; б) не менее половины.

7.14 По статистическим данным 3 % паркетных щитов не удовлетворяют требованиям ГОСТ 862.4. Найти вероятность того, что из 100 паркетных щитов требованиям ГОСТ 862.4 не будут удовлетворять: а) пять щитов; б) не более пяти щитов.

7.15 Строительная фирма, занимающаяся установкой окон ПВХ, раскладывает рекламные листки по почтовым ящикам. По статистике примерно в одном случае из двух тысяч следует заказ. Найти вероятность того, что при размещении 100 тысяч листков число заказов будет: а) равно 48; б) находится в границах от 45 до 55.

7.16 Вероятность выхода из строя трансмиссии в течение года для строительной машины определённого типа равна 0,05. Организация имеет 70 машин данного типа. Найти наиболее вероятное число машин, у которых трансмиссия выйдет из строя в течение года, и соответствующую этому событию вероятность.

7.17 Депо производит ремонт вагонов. Вероятность того, что ремонт будет произведён со сдачей с первого предъявления, равна 0,78. Найти вероятность того, что из 200 вагонов, отремонтированных в депо, с первого предъявления будут сданы: а) ровно 100 вагонов; б) не менее 150 вагонов.

7.18 Вероятность выхода из строя энергосберегающей лампочки в течение года равна 0,4. Найти вероятность того, что из 80 лампочек выйдут из строя в течение года: а) 10 лампочек; б) не более 10.

7.19 В учебном заведении насчитывается 1825 студентов. Найти вероятность того, что 1 сентября является днём рождения: а) четырех студентов; б) не менее четырех студентов.

7.20 Организация устанавливает окна и двери. По статистическим данным 60 % заказов являются заказами на установку окон. Найти вероятность того, что из 100 заказов число заказов на установку окон будет: а) равно 70; б) не более 80.

7.21 Фирма, занимающаяся установкой металлических дверей, раскладывает рекламные листки по почтовым ящикам. По статистике примерно в одном случае из трех тысяч следует заказ. Найти вероятность того, что при размещении 10 тысяч листков число заказов будет: а) равно 10; б) не менее 5.

7.22 На контроль поступила партия из 150 деталей. Вероятность того, что при проверке деталь окажется стандартной, равна 0,7. Найти вероятность того, что в партии окажется: а) 90 стандартных деталей; б) не менее половины стандартных.

7.23 Вероятность выхода из строя двигателя в течение года для строительной машины определённого типа равна 0,01. Организация имеет 70 машин данного типа. Найти вероятность того, что число машин, у которых двигатель выйдет из строя в течение года, будет: а) равно трём; б) не более трёх.

7.24 Вероятность того, что пассажир опоздает к отправлению поезда, равна 0,01. На поезд продано 700 билетов. Найти: а) наиболее вероятное число опоздавших пассажиров и соответствующую этому событию вероятность; б) вероятность того, что число опоздавших пассажиров будет не более четырёх.

7.25 Депо производит ремонт вагонов. Вероятность того, что ремонт будет произведён со сдачей с первого предъявления, равна 0,65. Найти вероятность того, что из 100 вагонов, отремонтированных в депо, с первого предъявления будут сданы: а) ровно 65 вагонов; б) не менее 65 вагонов.

7.26 Строительная организация заказала 100 оконных рам. Вероятность того, что при перевозке оконная рама будет испорчена, равна 0,02. Найти: а) наиболее вероятное число оконных рам, испорченных при перевозке, и соответствующую этому событию вероятность; б) вероятность того, что при перевозке будут испорчены не более двух рам.

7.27 Электрическая цепь состоит из 90 однотипных элементов. Вероятность выхода из строя за время t для каждого элемента одинакова и равна 0,45. Элементы работают независимо друг от друга. Найти вероятность того, что число вышедших из строя элементов будет: а) равно 50; б) от 50 до 70 включительно.

7.28 Организация устанавливает окна и двери. По статистическим данным 35 % заказов являются заказами на установку дверей. Найти вероятность того, что из 120 заказов число заказов на установку дверей будет: а) равно 60; б) не более 60.

7.29 Вероятность отклонения от принятого стандарта при штамповке клемм равна 0,03. Найти вероятность того, что в партии из 100 клемм не соответствуют стандарту: а) пять клемм; б) не более четырех клемм.

7.30 Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Найти вероятность того, что среди 1000 новорожденных: а) мальчиков будет ровно половина; б) мальчиков будет не менее 500 и не более 600.

Задание 8

Для определенной в условии задачи дискретной случайной величины:

1 Построить ряд распределения и столбцовую диаграмму.

2 Найти функцию распределения и построить её график.

3 Вычислить числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду.

8.1 Известно, что в определенном городе 40 % горожан предпочитают добираться на работу личным автотранспортом. Случайная величина ξ – количество людей, добирающихся на работу личным автотранспортом из четырёх выбранных наугад.

8.2 Студент пришел на зачёт, зная из 30 вопросов только 25. В билете три вопроса. Случайная величина ξ – число вопросов в билете, которые студент знает.

8.3 Стрелок производит три выстрела по мишени. Вероятность поражения мишени в каждом выстреле равна 0,6. Случайная величина ξ – число попаданий в серии из трёх выстрелов.

8.4 Прибор состоит из трёх элементов. Вероятность выхода из строя за время t для первого элемента равна 0,01, для второго – 0,04, для третьего – 0,02. Случайная величина ξ – число элементов прибора, вышедших из строя за время t.

8.5 Вероятность того, что при проверке деталь окажется стандартной, равна 0,8. Случайная величина ξ – число стандартных деталей из четырех.

8.6 Вероятности появления брака на каждой из трёх операций соответственно равны 0,05; 0,04; 0,02. Случайная величина ξ – число операций, при которых был допущен брак.

8.7 Вероятность того, что в течение одной смены возникнет неполадка станка, равна 0,03. Случайная величина ξ – число неполадок за четыре смены.

8.8 В партии из 40 деталей имеется 10 нестандартных. Случайная величина ξ – число стандартных деталей из трёх наугад извлеченных.

8.9 Вероятность выхода из строя трансмиссии в течение года для каждой из трех автомашин равна 0,05. Случайная величина ξ – число машин, у которых в течение года вышла из строя трансмиссия.

8.10 Стрелок производит три выстрела по мишени. Вероятность поражения мишени первым выстрелом равна 0,8, вторым – 0,7, третьим – 0,6. Случайная величина ξ – число попаданий в серии из трёх выстрелов.

8.11 В партии из 25 деталей имеется 5 нестандартных. Случайная величина ξ – число нестандартных деталей из трёх наугад извлечённых.

8.12 Вероятности безотказной работы в течение времени t для каждого из трёх приборов равны соответственно 0,7; 0,9 и 0,8. Случайная величина ξ – число приборов, вышедших из строя за время t.

8.13 Вероятность возникновения опасной для прибора перегрузки в каждом опыте равна 0,3. Случайная величина ξ – число опасных перегрузок в серии из четырёх экспериментов.

8.14 Из 30 лотерейных билетов 5 выигрышных. Случайная величина ξ – число выигрышных билетов из трёх наугад выбранных.

8.15 Для данного студента вероятности успешной сдачи каждого из трёх экзаменов соответственно равны 0,9; 0,8; 0,7. Случайная величина ξ – число успешно сданных экзаменов.

8.16 В данной организации 40 % всех заказов – это заказы на установку балконных рам. Случайная величина ξ – число заказов на установку рам из четырёх поступивших в организацию.

8.17 Вероятности утечки воды на каждом из трёх участков водопровода соответственно равны 0,2; 0,1 и 0,15. Случайная величина ξ – число участков водопровода, на которых произойдет утечка воды.

8.18 Предприятие приобрело 4 монитора. Вероятность повреждения монитора при транспортировке равна 0,02. Случайная величина ξ – число поврежденных мониторов.

8.19 Вероятности выхода из строя двигателя в течение года для каждой из трех строительных машин соответственно равны 0,01; 0,02 и 0,03. Случайная величина ξ – число машин, у которых в течение года случится поломка двигателя.

8.20 Из 10 водонагревательных приборов 4 бракованных. Случайная величина ξ – число бракованных приборов из трёх наугад выбранных.

8.21 Сигнальное охранное устройство предприятия состоит из трёх независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в течение месяца равна 0,2. Случайная величина ξ – число отказавших элементов.

8.22 Вероятности выдержать испытания на разрыв для каждой из трех асбестоцементных труб соответственно равны 0,8; 0,9 и 0,95. Случайная величина ξ – количество труб, которые выдержали испытания на разрыв.

8.23 Вероятности утечки воды на каждом из трех участков водопровода соответственно равны 0,1; 0,05 и 0,2. Случайная величина ξ – число участков водопровода, на которых произойдет утечка воды.

8.24 Вероятность выхода из строя электрооборудования в течение года для каждой из трёх строительных машин равна 0,01. Случайная величина ξ – число машин, у которых в течение года выйдет из строя электрооборудование.

8.25 В партии из 6 изделий имеется 4 стандартных. Наудачу отобрали 3 изделия. Случайная величина ξ – число стандартных изделий среди отобранных.

8.26 Для трех проверяемых образцов вероятности выдержать многоступенчатые испытания прочности соответственно равны 0,5; 0,6 и 0,3. Случайная величина ξ – число образцов, выдержавших испытания.

8.27 Вероятность выхода из строя двигателя в течение года для каждой из трех автомашин равна 0,01. Случайная величина ξ – число машин, у которых в течение года вышел из строя двигатель.

8.28 Оптовая база обслуживает 3 магазина, занимающихся продажей строительных материалов. От каждого из этих магазинов может поступить заявка на товары на следующий день с вероятностью 0,7. Случайная величина ξ – число поступивших заявок.

8.29 Предприятие приобрело 10 компьютеров и 20 ноутбуков. Для подразделения выделяют 3 ПЭВМ. Случайная величина ξ – число ноутбуков среди ПЭВМ, выделенных для подразделения.

8.30 Вероятности выхода из строя ходовой части в течение года для каждой из трёх строительных машин соответственно равны 0,25; 0,17 и 0,2. Случайная величина ξ – число машин, у которых в течение года случится поломка ходовой части.

Задание 9

Закон распределения непрерывной случайной величины задан функцией плотности $f(x)$. Требуется:

1 Определить значение параметра C, построить график функции плотности.

2 Найти функцию распределения данной случайной величины и построить её график.

3 Вычислить числовые характеристики случайной величины ξ: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану.

4 Найти вероятность того, что случайная величина ξ примет значение, принадлежащее отрезку $[a; b]$.

9.1 $f(x)=\begin{cases} Cx, & x\in[0;1];\\ 0, & x\notin[0;1].\end{cases}$ $a=0,\ b=0{,}5.$

9.2 $f(x)=\begin{cases} Cx^2, & x\in[-2;2];\\ 0, & x\notin[-2;2].\end{cases}$ $a=-1,\ b=1.$

9.3 $f(x)=\begin{cases} C, & x\in[2;8];\\ 0, & x\notin[2;8].\end{cases}$ $a=4,\ b=6.$

9.4 $f(x)=\begin{cases} x+C, & x\in[3;6];\\ 0, & x\notin[3;6].\end{cases}$ $a=4,\ b=5.$

9.5 $f(x)=\begin{cases} Cx^3, & x\in[0;2];\\ 0, & x\notin[0;2].\end{cases}$ $a=0{,}5,\ b=1{,}5.$

9.6 $f(x)=\begin{cases} C(x^2+x), & x\in[0;1];\\ 0, & x\notin[0;1].\end{cases}$ $a=0,\ b=0{,}5.$

9.7 $f(x)=\begin{cases} Cx, & x\in[-3;0];\\ 0, & x\notin[-3;0].\end{cases}$ $a=-2,\ b=-1.$

9.8 $f(x)=\begin{cases} C(x^2-x), & x\in[0;1];\\ 0, & x\notin[0;1].\end{cases}$ $a=0,\ b=0{,}5.$

9.9 $f(x)=\begin{cases} Cx+1/3, & x\in[0;1];\\ 0, & x\notin[0;1].\end{cases}$ $a=0,\ b=0{,}5.$

9.10 $f(x)=\begin{cases} Cx^4, & x\in[-1;1];\\ 0, & x\notin[-1;1].\end{cases}$ $a=-1,\ b=0.$

9.11 $f(x)=\begin{cases} C(x+1), & x\in[1;3];\\ 0, & x\notin[1;3].\end{cases}$ $a=1{,}5,\ b=2.$

9.12 $f(x)=\begin{cases} C|x|, & x\in[-2;2];\\ 0, & x\notin[-2;2].\end{cases}$ $a=-1{,}5,\ b=0{,}5.$

9.13 $f(x)=\begin{cases} Cx, & x\in[-2;0];\\ 0, & x\notin[-2;0].\end{cases}$ $a=-1,\ b=-0{,}5.$

9.14 $f(x)=\begin{cases} x-C, & x\in[1;2];\\ 0, & x\notin[1;2].\end{cases}$ $a=1,\ b=1{,}5.$

9.15 $f(x)=\begin{cases} Cx^2, & x\in[-2;0];\\ 0, & x\notin[-2;0].\end{cases}$ $a=-1,\ b=0.$

9.16 $f(x)=\begin{cases} C, & x\in[-5;5];\\ 0, & x\notin[-5;5].\end{cases}$ $a=0,\ b=3.$

9.17 $f(x)=\begin{cases} C(x+1), & x\in[0;1];\\ 0, & x\notin[0;1].\end{cases}$ $a=0{,}5,\ b=0{,}8.$

9.18 $f(x)=\begin{cases} C/x^2, & x\in[1;3];\\ 0, & x\notin[1;3].\end{cases}$ $a=2,\ b=2{,}5.$

9.19 $f(x)=\begin{cases} C|x|, & x\in[-1;1];\\ 0, & x\notin[-1;1].\end{cases}$ $a=-0{,}5,\ b=0{,}8.$

9.20 $f(x)=\begin{cases} Cx^2, & x\in[2;4];\\ 0, & x\notin[2;4].\end{cases}$ $a=2,\ b=3{,}5.$

9.21 $f(x)=\begin{cases} Cx^3, & x\in[-2;0];\\ 0, & x\notin[-2;0].\end{cases}$ $a=-1{,}5,\ b=-0{,}5.$

9.22 $f(x)=\begin{cases} C(x+2), & x\in[0;2];\\ 0, & x\notin[0;2].\end{cases}$ $a=1{,}5,\ b=2.$

9.23 $f(x)=\begin{cases} C\sqrt{x}, & x\in[0;4];\\ 0, & x\notin[0;4].\end{cases}$ $a=1,\ b=3.$

9.24 $f(x)=\begin{cases} C(x^2+1), & x\in[-1;1];\\ 0, & x\notin[-1;1].\end{cases}$ $a=-0{,}5,\ b=0{,}5.$

9.25 $f(x)=\begin{cases} C(x+4), & x\in[-1;1]; \\ 0, & x\notin[-1;1]. \end{cases}$
$a = 0$, $b = 0{,}5$.

9.26 $f(x)=\begin{cases} C(x-2), & x\in[2;4]; \\ 0, & x\notin[2;4]. \end{cases}$
$a = 2{,}5$, $b = 3{,}5$.

9.27 $f(x)=\begin{cases} C, & x\in[4;10]; \\ 0, & x\notin[4;10]. \end{cases}$
$a = 4$, $b = 6$.

9.28 $f(x)=\begin{cases} C(x^2+2), & x\in[0;1]; \\ 0, & x\notin[0;1]. \end{cases}$
$a = 0$, $b = 0{,}5$.

9.29 $f(x)=\begin{cases} Cx, & x\in[0;9]; \\ 0, & x\notin[0;9]. \end{cases}$
$a = 1$, $b = 5$.

9.30 $f(x)=\begin{cases} C/x^2, & x\in[2;4]; \\ 0, & x\notin[2;4]. \end{cases}$
$a = 2$, $b = 2{,}5$.

Задание 10

10.1 Вероятность того, что мост в течение года потребует усиления, равна 0,2. В городе 10 мостов. Найти вероятность того, что в течение года усиления потребуют не более 3 мостов.

10.2 Предполагая, что число дефектов на данном железнодорожном перегоне имеет закон распределения Пуассона с параметром $a = 2$, найти вероятность того, что количество дефектов будет не более двух.

10.3 Проводится осмотр деталей. Каждая деталь может оказаться бракованной с вероятностью 0,02. Найти среднее количество деталей, которые будут проверены до первого выявления брака.

10.4 Число мест утечки воды на 100 км водопровода имеет распределение Пуассона с параметром $a = 5$. Найти наиболее вероятное число мест утечки воды и вероятность того, что количество мест утечки будет не более трёх.

10.5 Вероятность возникновения опасной для прибора перегрузки в каждом опыте оценивается как 0,4. Исследования проводятся до возникновения первой опасной перегрузки. Найти среднее количество опытов, которые необходимо провести.

10.6 По данным длительной проверки качества запчастей определённого вида брак составляет 4 %. Найти среднее количество бракованных запчастей в партии из 200 штук и вероятность того, что в указанной партии бракованных запчастей будет не более 5 штук.

10.7 Среднее количество остановок станков в неделю равно 3. Считая, что число остановок станков в неделю имеет распределение Пуассона, найти вероятность того, что число остановок станков будет не более четырёх.

10.8 В строительной организации главный инженер снимается с должности в случае, если объект не будет сдан в срок. Вероятность сдачи в срок для каждого объекта оценивается как 0,95. Найти среднее количество объектов, которые организация сдаст в срок при нынешнем главном инженере.

10.9 Вероятность безотказной работы в течение смены для строительной машины данного типа равна 0,8. В ремонтно-строительной организации 20 машин такого типа. Найти среднее число машин, вышедших из строя в течение смены, и вероятность того, что в течение смены выйдут из строя не более 2 машин.

10.10 Поток грузовых железнодорожных составов, прибывающих на станцию, можно считать простейшим с интенсивностью 2 состава в час. Найти вероятность того, что в течение 30 минут на станцию прибудет хотя бы один состав.

10.11 Для асбестоцементной трубы вероятность выдержать испытания на разрыв равна 0,9. Испытания продолжаются до выявления первой трубы, не выдержавшей нагрузку. Найти среднее число испытаний.

10.12 Вероятность поставки в срок технологического оборудования каждого типа равна 0,9. На данный объект организацией должно быть поставлено 10 видов оборудования. Найти вероятность того, что все виды оборудования будут поставлены в срок.

10.13 Число дефектов на 100 мм сварочного шва характеризуется случайной величиной, распределённой по закону Пуассона с параметром $a = 1$. Определить вероятность того, что на 100 мм сварочного шва будет более четырёх дефектов.

10.14 Для строительного механизма вероятность безотказной работы в течение дня равна 0,87. Найти среднее число дней в неделю, в течение которых механизм проработает безотказно, и вероятность того, что механизм проработает безотказно в течение 5 дней.

10.15 Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,85. Произведено 100 деталей. Найти наиболее вероятное и среднее количество стандартных деталей.

10.16 Вероятность того, что на 50 км водопровода будет хотя бы одно место утечки воды, равна 0,9. Предполагая, что число мест утечки воды имеет распределение Пуассона, найти среднее количество мест утечки воды.

10.17 Для испытания строительных материалов на воспламеняемость изготовили 12 образцов. Каждый из образцов успешно проходит испытания с вероятностью 0,8. Определить среднее значение, дисперсию и моду случайной величины, характеризующей число образцов, успешно прошедших испытания.

10.18 В строительной организации прораб снимается с должности в случае, если объект не будет сдан в срок. Вероятность сдачи в срок для каждого объекта оценивается как 0,89. Найти вероятность того, что число объектов, которые организация сдаст в срок при нынешнем прорабе, будет не более трех.

10.19 Фирма занимается продажей строительных материалов. Число заказов в день имеет распределение Пуассона с параметром $a = 7$. Найти вероятность того, что в определённый день поступит не более пяти заказов.

10.20 При демонтаже строительных конструкций вероятность повторного использования каждой из конструкций равна 0,6. Организации нужно демонтировать 10 конструкций. Найти наиболее вероятное и среднее число конструкций, которые можно будет повторно использовать.

10.21 Для проведения испытаний прочности на растяжение армирующего материала выбирают 100 образцов. Известно, что каждый из них выдерживает испытания с вероятностью 0,97. Определить вероятность того, что испытания выдержат не менее 96 образцов.

10.22 Среднее число отказов оборудования на предприятии в месяц равно 3. Поток отказов оборудования можно считать простейшим. Найти вероятность того, что в течение месяца на предприятии произойдет не более 2 отказов оборудования.

10.23 Известно, что 2 % бордюрных камней не выдерживают испытание на водопоглощение. Проверяется партия из 100 камней. Определить наиболее вероятное число камней, не прошедших испытание, и вероятность того, что испытание не выдержат менее двух.

10.24 При испытаниях строительных материалов на воспламеняемость каждый образец успешно проходит испытание с вероятностью 0,7. Испытания проводятся до первой неудачи. Определить среднее значение, дисперсию и моду случайной величины, характеризующей число образцов, успешно прошедших испытания.

10.25 Поток пассажирских железнодорожных составов, прибывающих на станцию, можно считать простейшим с интенсивностью 4 состава в час. Найти вероятность того, что в течение 20 минут на станцию прибудет не менее двух составов.

10.26 При каждом включении зажигания двигатель начинает работать с вероятностью 0,99. Найти среднее значение и моду случайной величины, характеризующей число попыток включения до первого отказа.

10.27 Испытывается 10 однотипных приборов. Вероятность отказа каждого не зависит от отказов остальных и составляет 0,2. Найти наиболее вероятное и среднее число отказавших приборов.

10.28 Строительная организация заказала партию из 5000 кирпичей. Вероятность того, что при перевозке кирпич будет испорчен, равна 0,0002. Найти среднее значение и моду случайной величины, характеризующей число кирпичей, повреждёных при перевозке.

10.29 Испытание на истираемость выдерживают 98,5 % бордюрных камней. Определить вероятность того, что из 100 камней испытание не выдержат не более двух.

10.30 Среднее число неполадок станка в течение месяца равно 5. Поток возникновения неполадок станка можно считать простейшим. Найти вероятность того, что в течение месяца произойдет не менее 3 неполадок станка.

Задание 11

11.1 При определении толщины рулонных материалов для полов используется оптическое устройство, снабжёное измерительной шкалой с ценой деления 0,1 мм. Какова вероятность того, что при измерении абсолютная ошибка не превысит 0,02 мм?

11.2 Высота грузовой платформы после года эксплуатации имеет нормальный закон распределения с математическим ожиданием 1100 мм и средним квадратическим отклонением 30 мм. По правилам технической эксплуатации допускаются изменения высоты до 20 мм в сторону увеличения и 50 мм в сторону уменьшения. Найти вероятность того, что через год эксплуатации высота платформы будет соответствовать правилам технической эксплуатации.

11.3 Время, необходимое для капитального ремонта жилого здания, распределено по показательному закону с параметром $\lambda = 0{,}4$ мес$^{-1}$. Определить среднее время, необходимое для капитального ремонта. Какова вероятность того, что для ремонта понадобится более трёх месяцев?

11.4 Ошибка при измерении диаметра диска имеет равномерный закон распределения с параметрами $a = -0{,}02$ и $b = 0{,}02$. Найти вероятность того, что ошибка при одном измерении будет по абсолютной величине меньше, чем 0,01.

11.5 Номинальный размер ширины колеи равен 1520 мм, а фактический размер имеет нормальный закон распределения с математическим ожиданием, равным 1520 мм, и средним квадратическим отклонением 10 мм. Колея не требует ремонта, если отклонение её ширины от номинального размера не превышает по сужению 4 мм, по уширению 8 мм. Найти вероятность того, что колею не придется ремонтировать.

11.6 Время проверки двух главных путей путеизмерительным вагоном имеет показательный закон распределения с параметром $\lambda = 0{,}025$ мин$^{-1}$. Найти вероятность того, что время проверки будет менее 1 часа.

11.7 При определении прочности бетона методом пластических деформаций используется штангенциркуль, обеспечивающий измерения с абсолютной погрешностью, не превосходящей 0,1 мм. Какова вероятность того, что при измерении ошибка превысит 0,04 мм?

11.8 Расстояние от оси пути для высоких платформ имеет нормальный закон распределения со средним значением, равным 1920 мм, и средним квадратическим отклонением 20 мм. Найти вероятность того, что указанное расстояние будет соответствовать нормативам, т.е. находиться в пределах от 1895 до 1950 мм.

11.9 Расход воды предприятием на поливку территории имеет показательный закон распределения со средним значением 350 м^3/год. Найти вероятность того, что расход воды будет менее 400 м^3/год.

11.10 Фактический объём строительно-монтажных работ в месяц имеет нормальный закон распределения со средним квадратическим отклонением, равным 5 млн руб., и средним квадратическим отклонением 0,3 млн руб. Найти вероятность того, что объём работ будет находиться в пределах от 1 до 6 млн руб.

11.11 Время поставки технологического оборудования на объект ремонтно-строительной организации имеет показательный закон распределения с параметром $\lambda = 0{,}2$ суток$^{-1}$. Найти вероятность того, что указанное время будет не менее 5 и не более 10 суток.

11.12 Плановая стоимость ремонтно-строительных работ на данный месяц равна 4 млн руб. Фактическая стоимость имеет нормальный закон распределения со средним значением равным 4 млн руб, и средним квадратическим отклонением 0,2 млн руб. Найти вероятность того, что фактическая стоимость будет находиться в пределах от 3 до 5 млн руб.

11.13 Высота грузовой платформы после года эксплуатации имеет нормальный закон распределения с параметрами $a = 200$ мм и $\sigma = 25$ мм. По правилам технической эксплуатации допускаются изменения высоты до 20 мм в сторону увеличения и 50 мм в сторону уменьшения. Найти вероятность того, что через год эксплуатации высота платформы будет соответствовать правилам.

11.14 Случайная величина, характеризующая время, необходимое для уширения и усиления мостовых сооружений, распределена по показательному закону с математическим ожиданием, равным 4 суткам. Какова вероятность того, что на уширение и усиление сооружений понадобится не менее 3 суток, но не более 6 суток?

11.15 Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,1. Показания прибора округляются до ближайшего целого деления. Считая, что ошибки измерения распределены равномерно, найти вероятность того, что при измерении будет сделана ошибка, не превышающая по абсолютной величине 0,02.

11.16 Изменение уровня воды в реке в весенний период имеет нормальный закон распределения с математическим ожиданием, равным 1 м, и средним квадратическим отклонением 0,5 м. Найти вероятность того, что изменение уровня воды будет находиться в пределах от 0 до 2 метров.

11.17 Случайная величина, характеризующая продолжительность непрерывного пламенного горения негорючих строительных материалов, распределена по показательному закону с математическим ожиданием, равным 1 с. Определить вероятность того, что взятый наугад образец будет гореть не менее 5 секунд.

11.18 При испытаниях цемента допускается использование песка с содержанием оксида кремния не менее 96 %. Процент содержания оксида кремния в песке – случайная величина, равномерно распределённая в промежутке от $a = 92$ % до $b = 99$ %. Определить вероятность того, что выбранная партия песка может быть использована при испытаниях цемента.

11.19 Плотность материала, применяемого в звукоизоляционных прослойках, является нормально распределённой случайной величиной с математическим ожиданием a = 20 кг/м^3 и средним квадратическим отклонением σ = 3 кг/м^3. Определить вероятность того, что плотность исследуемого образца будет не менее 15 кг/м^3 и не более 25 кг/м^3.

11.20 Время на установку одной балконной рамы имеет показательный закон распределения со средним значением, равным 5 ч. Найти вероятность того, что на установку рамы понадобится не более 6 часов.

11.21 Предположим, что объём воды, израсходованной предприятием в месяц на бытовые нужды, равномерно распределён в промежутке от 20 до 50 м^3. Найти вероятность того, что объём воды, израсходованной предприятием в данный месяц, будет находиться в промежутке от 15 до 30 м^3.

11.22 Процент содержания органических добавок в цементе – нормально распределённая случайная величина с параметрами a = 0,25 % и σ^2 = 0,006. Согласно государственному стандарту Республики Беларусь содержание органических добавок не должно превышать 0,5 %. Определить вероятность того, что содержание добавок соответствует стандарту.

11.23 Срок службы сверла для перфоратора представляет собой случайную величину, подчинённую показательному закону распределения с параметром λ = 0,1 суток$^{-1}$. Найти вероятность того, что сверло прослужит не менее 10 суток.

11.24 Для определения содержания вредных серосодержащих примесей в песке используют весы аналитические с погрешностью измерения 0,0002 г. Считая, что ошибки измерения распределены равномерно, определить вероятность того, что погрешность по абсолютной величине не превысит 0,0001 г.

11.25 Содержание диоксида кремния в 1 килограмме песка, применяемого для испытаний цемента, – нормально распределённая случайная величина с параметрами a = 950 г и σ^2 = 25 г^2. Определить вероятность того, что содержание диоксида кремния в выборочной пробе песка будет не менее 93 % (песок, содержащий менее 93 % диоксида кремния, к испытаниям не допускается).

11.26 Предположим, что объём воды, израсходованной предприятием в месяц на производственные нужды, равномерно распределён в промежутке от 100 до 200 м^3. Найти вероятность того, что объём воды, израсходованной предприятием в данный месяц, будет находиться в промежутке от 150 до 180 м^3.

11.27 Время ремонта пути имеет показательный закон распределения со средним значением 6 часов. Найти вероятность того, что ремонт пути будет длиться не более 8 часов.

11.28 При взвешивании проб гравия используются весы с ценой деления 200 г. Показания округляются до ближайшего целого деления. Считая, что ошибки при округлении распределены равномерно, найти вероятность того, что будет сделана ошибка, не превышающая по абсолютной величине 50 г.

11.29 Расстояние от оси пути для низких платформ имеет нормальный закон распределения со средним значением, равным 1745 мм, и средним квадратическим отклонением 20 мм. Найти вероятность того, что указанное расстояние будет соответствовать нормативам, т.е. находиться в пределах от 1720 до 1775 мм.

11.30 Случайная величина, характеризующая время, необходимое для доведения габаритов моста до нормы, распределена по показательному закону с математическим ожиданием, равным 1 суткам. Какова вероятность того, что указанное время будет не более 3 суток?

ПРИЛОЖЕНИЕ А
(справочное)

Значения функции плотности стандартного нормального распределения $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
4,0	0,000134									

ПРИЛОЖЕНИЕ Б
(справочное)

Значения функции Лапласа $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,499952									
4,0	0,499968									
4,5	0,499997									
5,0	0,49999971									

ПРИЛОЖЕНИЕ В
(*справочное*)
Рабочая программа по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика»
Раздел 1 Теория вероятностей

Случайные события и их вероятности

Предмет и задачи теории вероятностей. Вероятностный эксперимент. Пространство элементарных исходов. Случайные события и операции над ними. Относительная частота случайного события. Вероятность случайного события. Аксиомы теории вероятностей. Вероятностное пространство. Методы вычисления вероятностей. Классический метод определения вероятности. Свойства вероятностей. Элементы комбинаторики. Условная вероятность. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Независимость событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Последовательность независимых испытаний. Формула Бернулли. Теоремы Муавра-Лапласа, Пуассона.

Одномерные случайные величины

Случайная величина. Дискретные и непрерывные случайные величины. Закон распределения случайной величины. Формы задания закона распределения дискретной случайной величины (ряд распределения, функция распределения). Формы задания закона распределения непрерывной случайной величины (функция плотности, функция распределения). Основные дискретные распределения (биномиальное, геометрическое, Пуассона). Основные непрерывные распределения (нормальное, равномерное, показательное). Числовые характеристики случайной величины.

Многомерные случайные величины

Многомерная случайная величина. Закон распределения многомерной случайной величины. Многомерные дискретные, непрерывные и смешанные случайные величины. Независимые случайные величины. Ковариация. Коэффициент корреляции.

ПРИЛОЖЕНИЕ Г
(*справочное*)
Вопросы к зачету по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика»

1. Предмет и задачи теории вероятностей.
2. Вероятностный эксперимент. Пространство элементарных исходов.
3. Случайное событие. Примеры. Операции над событиями.
4. Относительная частота события. Свойства относительной частоты.
5. Вероятность. Аксиоматика теории вероятностей.
6. Методы вычисления вероятностей. Классический метод.
7. Элементы комбинаторики.
8. Свойства вероятностей случайных событий.
9. Теорема сложения вероятностей.
10. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей.
11. Независимость событий.
12. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
13. Последовательность независимых испытаний. Формула Бернулли.
14. Теорема Пуассона.
15. Локальная теорема Муавра-Лапласа.
16. Интегральная теорема Муавра-Лапласа.
17. Случайная величина. Примеры.
18. Дискретные и непрерывные случайные величины. Примеры.
19. Закон распределения случайной величины. Функция распределения.
20. Закон распределения дискретной случайной величины (ряд распределения, функция распределения).
21. Закон распределения непрерывной случайной величины (функция плотности, функция распределения).
22. Числовые характеристики дискретной случайной величины (математическое ожидание, мода, медиана, дисперсия, среднее квадратическое отклонение).
23. Числовые характеристики непрерывной случайной величины (математическое ожидание, мода, медиана, дисперсия, среднее квадратическое отклонение).

24. Биномиальный закон распределения.
25. Закон распределения Пуассона.
26. Равномерный закон распределения.
27. Показательный закон распределения.
28. Нормальный закон распределения.
29. Предмет и задачи математической статистики.
30. Выборочный метод. Генеральная и выборочная совокупности. Репрезентативность выборки. Вариационный ряд.
31. Статистический закон распределения дискретной случайной величины. Сгруппированный статистический ряд.
32. Статистический закон распределения непрерывной случайной величины. Интервальный статистический ряд.
33. Эмпирическая функция распределения.
34. Точечные оценки числовых характеристик случайной величины.
35. Интервальные оценки числовых характеристик случайной величины. Доверительная вероятность.
36. Статистические гипотезы. Параметрические гипотезы. Проверка гипотез о математическом ожидании случайной величины, имеющей нормальный закон распределения.
37. Статистические гипотезы. Непараметрические гипотезы. Применение критерия согласия χ^2 – Пирсона для проверки гипотезы о виде закона распределения случайной величины.
38. Регрессионный анализ. Основные положения.
39. Метод наименьших квадратов. Нахождение оценок параметров линейного уравнения регрессии.
40. Метод наименьших квадратов. Нахождение оценок параметров нелинейного уравнения регрессии.
41. Проверка адекватности уравнения регрессии выборочным данным. Прогноз по регрессии.
42. Корреляционный анализ. Коэффициент корреляции и его свойства. Оценка коэффициента корреляции.
43. Корреляционный анализ. Коэффициент детерминации и его свойства. Оценка коэффициента детерминации.
44. Проверка значимости коэффициента корреляции.
45. Проверка значимости коэффициента детерминации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Вентцель, Е.С.** Теория вероятностей : учеб. для вузов / Е.С. Вентцель. – М. : Высш. шк., 1998. – 576 с.

2 **Колемаев, В.А.** Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. / В.А. Колемаев, И.Н. Калинина. – М : ИНФРА – М, 1997. – 301 с.

3 **Гмурман, В.Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие для вузов / В.Е. Гмурман. – М. : Высш.шк., 1998. – 400 с.

4 **Бородин, А.Н.** Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики / А.Н. Бородин. – СПб. : «Лань», 1998. – 224 с.

5 **Гнеденко, Б.В.** Курс теории вероятностей / Б.В. Гнеденко. – М. : Наука, 1980. – 400 с.

6 **Пугачев, В.С.** Теория вероятностей и математическая статистика / В.С. Пугачев. – М. : Наука, 1979. – 496 с.

7 **Феллер, В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения / В. Феллер. – В 2 т. Т.1 / пер. с англ. – М. : Мир, 1984. – 528 с.

8 **Мацкевич, И.П.** Сборник задач и упражнений по высшей математике. Теория вероятностей и математическая статистика / И.П. Мацкевич, Г.П. Свирид, Г.М. Булдык. – Минск : Вышэйшая школа, 1996. – 318 с.

9 **Малинковский, Ю.В.** Теория вероятностей и математическая статистика. В 2 ч. Ч. 1: Теория вероятностей : учеб. пособие / Ю.В. Малинковский. – Гомель : УО «ГГУ им. Ф.Скорины», 2004. – 355 с.

10 **Чжун, К.Л.** Элементарный курс теории вероятностей. Стохастические процессы и финансовая математика / К.Л. Чжун, Ф. АитСахлиа / пер. с англ. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 455 с.

11 **Сазонова, Е.Л.** Теория вероятностей и математическая статистика. Ч. 1: Теория вероятностей : пособие для студентов ФБО. 2-е изд., испр. / Е.Л. Сазонова ; под ред. В.С. Серёгиной. – Гомель : БелГУТ, 2003. – 95 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ГАВРИЛЮК Александр Александрович
СТАРОВОЙТОВ Александр Николаевич

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебно-методическое пособие
для студентов строительных специальностей

Редактор *Н. А. Дашкевич*
Технический редактор *В. Н. Кучерова*

Подписано в печать 29.11.2010 г. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 10,93. Уч.-изд. л. 9,21. Тираж 600 экз.
Зак. № . Изд. 89.

Издатель и полиграфическое исполнение
Белорусский государственный университет транспорта:
ЛИ № 02330/0552508 от 09.07.2009 г.
ЛИ № 02330/0494150 от 03.04.2009 г.
246653, г. Гомель, ул. Кирова, 34.