МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА »

Кафедра “Техническая физика и теоретическая механика”

Д. А. ЧЕРНОУС, О. С. КОЛОМНИКОВА

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
Раздел «Динамика материальной системы»

(Обзор материала и задания для контрольных работ)

**Учебно-методическое пособие
для студентов технических специальностей**

Гомель 2006

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра “Техническая физика и теоретическая механика”

Д. А. ЧЕРНОУС, О. С. КОЛОМНИКОВА

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Раздел «Динамика материальной системы»

(Обзор материала и задания для контрольных работ)

Учебно-методическое пособие
для студентов технических специальностей

Одобрено методической комиссией факультета безотрывного обучения

Гомель 2006

УДК 531.1 (075.8)
ББК 22.21
Ч-49

Рецензент – канд. техн. наук, доцент кафедры “Техническая физика и теоретическая механика” А. О. Шимановский (УО «БелГУТ»).

Черноус, Д. А.

Ч49 Теоретическая механика. Раздел «Динамика материальной системы» (Обзор материала и задания для контрольных работ): учеб.-метод. пособие для студентов технических специальностей. / Д. А. Черноус, О. С. Коломникова; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель: БелГУТ, 2006. – 63 с.
ISBN 985-468-184-X

Изложены краткие сведения из раздела «Динамика материальной системы» курса теоретической механики в соответствии с программой технических вузов. Разобраны примеры решения задач по изучаемым темам. Приведены условия заданий контрольных работ по теоретической механике.

Предназначено для студентов факультета безотрывного обучения.

УДК 531.1 (075.8)
ББК 22.21

ISBN 985-468-184-X

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое пособие является продолжением работы [1] и содержит краткий обзор материала раздела «Динамика материальной системы» курса теоретической механики. Здесь же приводятся примеры решения задач и задания для контрольных работ студентов заочной формы обучения.

Перед выполнением каждого задания контрольной работы студент должен ознакомиться с теорией, опираясь не только на материал, изложенный в пособии, но и на учебники [2–4]. Затем он должен разобрать приведенный пример решения задачи, а уже после этого приступать к индивидуальному заданию.

Каждое задание содержит 30 вариантов задач. **Студент во всех заданиях выбирает номер варианта по двум последним цифрам учебного шифра** (см. страницу 5). Буква «Д» в номере задачи обозначает, что эта задача относится к разделу «Динамика».

По указанию преподавателя объем контрольной работы может быть сокращен для студентов отдельных специальностей.

Контрольная работа должна быть выполнена в отдельной ученической тетради. На обложке указываются: название кафедры, название дисциплины, номер работы, фамилия и инициалы студента, учебный шифр, специальность и адрес.

Решение каждой задачи обязательно следует начинать *с новой страницы*. Оформление задачи начинают с указания номера и варианта задачи, ее названия, далее делается чертеж и записывается, что дано и требуется определить (текст условия задачи полностью не переписывают). Чертеж должен быть выполнен в соответствии с требованиями инженерной графики с применением чертежных инструментов, а его размеры должны быть таковы, чтобы позволить ясно показать все векторы скоростей, ускорений и другие детали. Показывать все эти векторы и координатные оси на чертеже, а также указывать единицы измерения получаемых величин нужно *обязательно*. Все записи должны быть сделаны доступным для чтения шрифтом. Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т. д.) и подробно излагать весь ход расчетов. На каждой странице *должны оставляться поля* для замечаний рецензента.

Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, не проверяются и возвращаются для переоформления. К работе, предъявляемой к повторной проверке (если она выполнена в другой тетради), должна обязательно прилагаться незачтенная работа.

Ко дню экзамена (зачета) работа должна быть защищена у проверяющего ее преподавателя. При этом все отмеченные рецензентом погрешности должны быть исправлены.

Варианты заданий для выполнения контрольной работы

Учебный шифр	Варианты заданий				Учебный шифр	Варианты заданий				Учебный шифр	Варианты заданий				Учебный шифр	Варианты заданий			
	Д-4	Д-5	Д-6	Д-7		Д-4	Д-5	Д-6	Д-7		Д-4	Д-5	Д-6	Д-7		Д-4	Д-5	Д-6	Д-7
01	7	3	16	23	26	24	4	22	28	51	1	7	19	6	76	11	5	19	25
02	26	14	8	18	27	30	22	11	5	52	9	15	26	1	77	24	19	9	17
03	11	27	29	3	28	22	17	3	14	53	4	25	28	27	78	22	29	11	1
04	18	2	17	29	29	8	8	20	24	54	16	2	13	28	79	2	8	15	20
05	22	25	1	10	30	5	19	26	10	55	11	28	30	2	80	15	18	29	10
06	4	16	20	1	31	14	20	13	2	56	6	30	17	24	81	21	26	17	3
07	1	6	14	27	32	9	9	24	16	57	17	26	4	12	82	18	3	12	22
08	14	28	2	8	33	20	23	7	13	58	30	11	22	29	83	26	27	9	12
09	21	11	8	14	34	12	5	16	18	59	14	29	8	4	84	9	25	30	6
10	8	9	15	19	35	7	28	25	30	60	26	17	11	21	85	4	10	13	21
11	16	22	10	2	36	15	14	9	15	61	27	13	5	16	86	16	23	28	5
12	25	12	23	5	37	25	30	4	8	62	30	28	1	7	87	13	1	23	30
13	29	24	7	11	38	2	10	18	22	63	13	24	9	18	88	23	16	6	19
14	15	4	19	22	39	23	24	1	9	64	24	6	30	9	89	6	7	20	16
15	23	20	4	15	40	10	12	14	6	65	7	22	14	25	90	29	13	2	24
16	12	13	24	4	41	17	29	7	19	66	28	26	3	15	91	3	26	21	29
17	19	30	3	23	42	19	16	23	4	67	15	9	12	26	92	17	21	10	25
18	10	7	18	27	43	29	1	19	13	68	12	20	25	3	93	28	22	5	12
19	3	27	12	7	44	6	21	12	11	69	19	8	6	17	94	14	2	26	9
20	9	10	22	13	45	13	6	21	1	70	2	21	21	10	95	5	29	17	4
21	27	5	14	9	46	16	27	2	14	71	3	12	24	8	96	10	17	25	11
22	5	23	16	28	47	21	25	10	3	72	25	19	5	30	97	1	24	15	8
23	13	18	10	6	48	18	11	27	7	73	8	3	18	20	98	27	15	6	20
24	20	1	28	26	49	4	3	15	23	74	20	15	27	5	99	20	30	11	7
25	6	14	27	17	50	11	18	13	26	75	28	4	16	21	00	12	23	29	2

1 ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

1.1 Некоторые положения теории

Центром масс материальной системы называют точку, радиус-вектор $\bar{r}_C$ которой определяется по формуле

$$\bar{r}_C = \frac{1}{m_\Sigma} \sum m_i \bar{r}_i \ ,$$

где $m_\Sigma = \sum m_i$ – масса материальной системы;

m_i, $\bar{r}_i$ – масса и радиус-вектор i-й материальной точки.

Координаты центра масс системы:

$$x_C = \frac{1}{m_\Sigma} \sum m_i x_i ; \quad y_C = \frac{1}{m_\Sigma} \sum m_i y_i ; \quad z_C = \frac{1}{m_\Sigma} \sum m_i z_i \ ,$$

где x_i, y_i, z_i – координаты центра масс i-го тела системы.

При решении задач динамики материальной системы часто оказывается полезной **теорема о движении центра масс**: *произведение массы материальной системы* m_Σ *на ускорение ее центра масс* a_C *равно геометрической сумме внешних сил, приложенных к системе*:

$$m_\Sigma \bar{a}_C = \sum \bar{F}_i^{\text{внеш}} \ . \qquad (1.1)$$

В ходе решения выражение теоремы проецируют на оси координат. При этом получается система уравнений

$$\begin{cases} m_\Sigma a_{Cx} = \sum F_{ix}^{\text{внеш}} \ , \\ m_\Sigma a_{Cy} = \sum F_{iy}^{\text{внеш}} \ , \\ m_\Sigma a_{Cz} = \sum F_{iz}^{\text{внеш}} \ . \end{cases} \qquad (1.2)$$

Использование теоремы о движении центра масс материальной системы для решения задач динамики рекомендуется осуществлять по следующей методике:

1 Изображается материальная система, и указываются все внешние силы, действующие на нее.

2 Выбираются оси координат.

3 Внешние силы, действующие на систему, проецируются на выбранные оси.

4 Записываются выражения координат центра масс системы через координаты центров масс одного из тел системы.

5 Дифференцируя выражения координат центра масс по времени, получают зависимости для скорости и ускорения центра масс системы.

6 Полученные выражения подставляются в систему (1.2).

7 Решается дифференциальное уравнение относительно искомой координаты с учетом заданных начальных условий.

1.2 Пример выполнения задания контрольной работы

Задача 1

Квадратная плита 1 массой m_1 = 50 кг с длиной стороны b = 2 м движется с начальной скоростью v_0 = 0,8 м/с по гладкой наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 60°$. По имеющемуся на плите желобу под действием внутренних сил движется тело 2 массой $m_2 = 15$ кг по закону $s(t) = t^3 + \sin\frac{\pi}{3}t$ м. Принимая тело 2 за материальную точку, определить закон движения центра масс плиты и зависимость от времени силы давления плиты на плоскость. Начало отсчета совместить с начальным положением центра масс плиты.

Р е ш е н и е

1 *Изображаем систему двух тел и указываем действующие на нее внешние силы*: силы тяжести $\overline{G}_1, \overline{G}_2$ и нормальную реакцию $\overline{N}$ (рисунок 1.1).

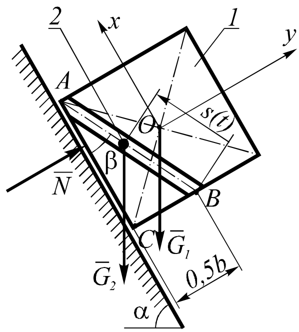

Рисунок 1.1

2 *Выбираем оси координат*. Ось x направим параллельно наклонной плоскости, ось y – перпендикулярно x. Начало отсчета поместим в начальном положении центра масс плиты.

3 *Определяем суммы проекций внешних сил на оси x и y:*

$$\sum F_{ix}^{\text{внеш}} = -G_1 \sin\alpha - G_2 \sin\alpha;$$

$$\sum F_{iy}^{\text{внеш}} = N - G_1 \cos\alpha - G_2 \cos\alpha.$$

Воспользуемся выражениями для сил тяжести $(G_1 = m_1 g, G_2 = m_2 g)$. Тогда суммы проекций приобретают вид

$$\sum F_{ix}^{\text{внеш}} = -(m_1 + m_2) g \sin\alpha; \qquad \sum F_{iy}^{\text{внеш}} = N - (m_1 + m_2) g \cos\alpha. \tag{1.3}$$

4 *Записываем выражения для координат центра масс системы двух тел*

$$x_C = \frac{1}{m_\Sigma}\sum m_i x_i = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}; \quad y_C = \frac{1}{m_\Sigma}\sum m_i y_i = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}, \tag{1.4}$$

где x_1, y_1 – координаты центра масс плиты (точки O);

x_2, y_2 – координаты тела 2, принятого за материальную точку.

Так как ось x проходит через центр масс плиты, а плита в процессе движения системы скользит по наклонной плоскости, то $y_1(t) = 0$. Координаты x_2, y_2 в произвольный момент времени выражаются через x_1:

$$x_2 = x_1 - \frac{b}{2} + s\cos\beta, \quad y_2 = -s\sin\beta .$$

Подставляя эти выражения в (1.4), получаем

$$x_C = \frac{1}{m_1 + m_2}\left[(m_1 + m_2)x_1 + m_2\left(s\cos\beta - \frac{b}{2}\right)\right], \quad y_C = \frac{-m_2}{m_1 + m_2} s\sin\beta .$$

Угол β определяем из треугольника ABC:

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{b/2}{b} = \frac{1}{2} .$$

Тогда

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\beta}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \frac{1}{\sqrt{5}} .$$

5 *Дифференцируя выражения координат центра масс по времени, определяем проекции скорости центра масс системы на оси координат:*

$$v_{Cx} = \frac{dx_C}{dt} = \frac{1}{m_1 + m_2}\left[(m_1 + m_2)\dot{x}_1 + m_2\dot{s}\cos\beta\right];$$

$$v_{Cy} = \frac{dy_C}{dt} = \frac{-m_2}{m_1 + m_2}\dot{s}\sin\beta.$$

Здесь точкой над символом обозначена производная по времени от соответствующей величины. Дифференцируя по времени еще раз, находим проекции ускорения центра масс системы на оси координат

$$\begin{aligned} a_{Cx} &= \frac{dv_{Cx}}{dt} = \ddot{x}_C = \frac{1}{m_1 + m_2}\left[(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2\ddot{s}\cos\beta\right], \\ a_{Cy} &= \frac{dv_{Cy}}{dt} = \ddot{y}_C = \frac{-m_2}{m_1 + m_2}\ddot{s}\sin\beta. \end{aligned} \tag{1.5}$$

6 *Подставляем полученные выражения сумм проекций внешних сил* (1.3) *и проекций ускорения* (1.5) *в теорему о движении центра масс системы* (1.2)

$$\begin{aligned} &(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2\ddot{s}\cos\beta = -(m_1 + m_2)g\sin\alpha; \\ &-m_2\ddot{s}\sin\beta = N - (m_1 + m_2)g\cos\alpha. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Из второго уравнения системы выражаем нормальную реакцию

$$N = (m_1 + m_2)g\cos\alpha - m_2\ddot{s}\sin\beta\ .$$

Из первого уравнения системы уравнений (1.6) выражаем проекцию ускорения центра масс плиты на ось x:

$$\ddot{x}_1 = -g\sin\alpha - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\ddot{s}\cos\beta\ . \qquad (1.7)$$

Так как $s(t) = t^3 + \sin\frac{\pi}{3}t$, то

$$\dot{s}(t) = 3t^2 + \frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}t; \quad \ddot{s}(t) = 6t - \frac{\pi^2}{9}\sin\frac{\pi}{3}t\ .$$

Подставляем полученное выражение для $\ddot{s}$ в формулу для ускорения центра масс плиты (1.7):

$$\ddot{x}_1 = \frac{d\dot{x}_1}{dt} = -g\sin\alpha - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\cos\beta\left(6t - \frac{\pi^2}{9}\sin\frac{\pi}{3}t\right).$$

7 *Решаем полученное дифференциальное уравнение.* Разделяем переменные и интегрируем в пределах от начального момента времени (t = 0) до произвольного момента *t:*

$$\int\limits_{\dot{x}_1(0)}^{\dot{x}_1(t)} d\dot{x}_1 = \int\limits_0^t -\left[g\sin\alpha + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\cos\beta\left(6t - \frac{\pi^2}{9}\sin\frac{\pi}{3}t\right)\right]dt\ .$$

где $\dot{x}_1(0)$ – начальная скорость центра масс плиты, $\dot{x}_1(0) = v_0$.

Определяем первообразные

$$\dot{x}_1\Big|_{v_0}^{\dot{x}_1(t)} = -\,gt\sin\alpha\Big|_0^t + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\cos\beta\left(3t^2\Big|_0^t + \frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}t\Big|_0^t\right).$$

После подстановки пределов получаем

$$\dot{x}_1(t) = -gt\sin\alpha - \frac{m_2}{(m_1 + m_2)}\cos\beta\left[3t^2 + \frac{\pi}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}t - 1\right)\right] + v_0\ .$$

Определяем зависимость от времени координаты x_1 центра масс плиты. Для этого требуется решить дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dx_1}{dt} = -gt\sin\alpha - \frac{m_2}{(m_1 + m_2)}\cos\beta\left[3t^2 + \frac{\pi}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}t - 1\right)\right] + v_0\ .$$

Разделяем переменные и интегрируем в пределах от начального момента времени (t = 0) до произвольного момента t:

$$\int_{x_1(0)}^{x_1(t)} dx_1 = \int_0^t \left[-gt\sin\alpha - \frac{m_2}{(m_1+m_2)}\cos\beta \left[3t^2 + \frac{\pi}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}t - 1\right)\right] + v_0 \right] dt.$$

Так как начало системы отсчета совпадает с начальным положением центра масс плиты, то x_1 = 0. После интегрирования получаем

$$x_1(t) = -g\frac{t^2}{2}\sin\alpha - \frac{m_2}{(m_1+m_2)}\cos\beta\left[t^3 + \sin\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}t \right] + v_0 t\ .$$

Подставляем численные значения величин:

$$x_1(t) = -9{,}8\cdot 0{,}5t^2\sin 60° - \frac{15}{65}\frac{2}{\sqrt{5}}\left(t^3 + \sin\frac{\pi}{3}t - 1{,}05t \right) + 0{,}8t =$$

$$= -4{,}24t^2 - 0{,}21t^3 - 0{,}21\sin\frac{\pi}{3}t + 1{,}02t\ (\text{м})\ .$$

Задача 2

Квадратная плита 1 массой m_1 = 80 кг с длиной стороны b = 3 м движется с начальной скоростью v_0 = 1 м/с по гладкой наклонной плоскости с углом наклона α = 30° (рисунок 1.2). По имеющемуся на плите желобу под действием внутренних сил движется тело 2 массой m_2 = 20 кг по закону $\varphi(t) = \frac{\pi}{3}t$ рад. Принимая тело 2 за материальную точку, определить закон движения центра масс плиты и зависимость от времени силы давления плиты на плоскость. Начало отсчета совместить с начальным положением центра масс плиты.

Р е ш е н и е

1 *Изображаем систему двух тел и указываем действующие на нее внешние силы*: силы тяжести $\overline{G_1}, \overline{G_2}$ и нормальную реакцию $\overline{N}$ (см. рисунок 1.2).

2 *Выбираем оси координат*. Ось x направляем параллельно наклонной плоскости, ось y – перпендикулярно x. Начало отсчета помещаем в начальном положении центра масс плиты.

3 *Определяем суммы проекций внешних сил на оси x и y:*

$$\sum F_{ix}^{\text{внеш}} = G_1\sin\alpha + G_2\sin\alpha;$$

$$\sum F_{iy}^{\text{внеш}} = N - G_1\cos\alpha - G_2\cos\alpha.$$

Поскольку $G_1 = m_1 g, G_2 = m_2 g$, то

$$\sum F_{ix}^{\text{внеш}} = (m_1 + m_2) g \sin\alpha;$$

$$\sum F_{iy}^{\text{внеш}} = N - (m_1 + m_2) g \cos\alpha.$$

4 *Записываем выражения для координат центра масс системы двух тел:*

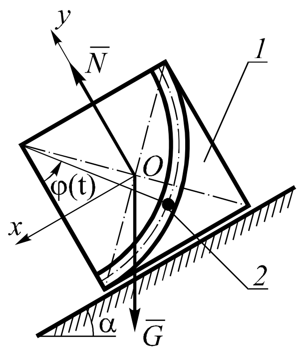

Рисунок 1.2

$$x_C = \frac{1}{m_\Sigma}\sum m_i x_i = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2};$$
$$y_C = \frac{1}{m_\Sigma}\sum m_i y_i = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}, \tag{1.8}$$

где x_1, y_1 – координаты центра масс плиты (точка O);

x_2, y_2 – координаты тела 2, принятого за материальную точку.

Так как ось x проходит через центр масс плиты, а плита в процессе движения системы скользит по наклонной плоскости, то $y_1(t) = 0$. Координаты x_2, y_2 можно определить так:

$$x_2 = x_1 + \frac{b}{2} - b\sin\varphi; \quad y_2 = \frac{b}{2} - b\cos\varphi .$$

Подставляем полученные выражения в формулы для координат центра масс системы (1.5):

$$x_C = \frac{1}{m_1 + m_2}\left[(m_1 + m_2)x_1 + m_2 b\left(\frac{1}{2} - \sin\alpha\right)\right]; \; y_C = \frac{1}{m_1 + m_2} m_2 b\left(\frac{1}{2} - \cos\alpha\right).$$

5 *Дифференцируем выражение координат центра масс по времени*. При этом определяем проекции скорости центра масс системы на оси координат:

$$v_{Cx} = \frac{dx_C}{dt} = \frac{1}{m_1 + m_2}\left[(m_1 + m_2)\dot{x}_1 - m_2 b\dot{\varphi}\cos\varphi\right];$$

$$v_{Cy} = \frac{dy_C}{dt} = \frac{1}{m_1 + m_2} m_2 b\dot{\varphi}\sin\varphi.$$

Дифференцируя по времени еще раз, находим проекции ускорения центра масс системы на оси координат:

$$a_{Cx} = \frac{dv_{Cx}}{dt} = \dot{v}_{Cx} = \frac{1}{m_1 + m_2}\left[(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 - m_2 b\ddot{\varphi}\cos\varphi + m_2 b\dot{\varphi}^2 \sin\varphi\right];$$

$$a_{Cy} = \frac{dv_{Cy}}{dt} = \dot{v}_{Cy} = \frac{1}{m_1 + m_2} m_2 b(\ddot{\varphi} \sin\varphi + \dot{\varphi}^2 \cos\varphi).$$

6 *Подставляем полученные соотношения для проекций ускорения и сумм проекций сил в выражение теоремы о движении центра масс системы* (1.2)

$$\begin{aligned} &(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 - m_2 b(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin\varphi) = (m_1 + m_2)g\sin\alpha; \\ &m_2 b(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi) = N - (m_1 + m_2)g\cos\alpha. \end{aligned} \qquad (1.9)$$

Из второго уравнения системы уравнений (1.9) выразим нормальную реакцию

$$N = m_2 b(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi) + (m_1 + m_2)g\cos\alpha .$$

Вторую производную по времени от искомой координаты центра масс первого тела (плиты) найдем из первого уравнения системы (1.9)

$$\ddot{x}_1 = g\sin\alpha + \frac{m_2 b}{m_1 + m_2}\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right).$$

Так как $\varphi(t) = \frac{\pi}{3}t$, то $\dot{\varphi}(t) = \frac{\pi}{3}$, $\ddot{\varphi}(t) = 0$. Тогда

$$\ddot{x}_1 = \frac{d\dot{x}_1}{dt} = g\sin\alpha + \frac{m_2 b}{m_1 + m_2}\left(0\cdot\cos\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi^2}{9}\sin\frac{\pi}{3}t\right).$$

7 *Решаем полученное дифференциальное уравнение.* Разделяем переменные и интегрируем в пределах от начального момента времени (t = 0) до произвольного момента t

$$\int_{\dot{x}_1(0)}^{\dot{x}_1(t)} d\dot{x}_1 = \int_0^t \left[g\sin\alpha - \frac{m_2 b}{m_1 + m_2}\frac{\pi^2}{9}\sin\frac{\pi}{3}t\right]dt ,$$

где $\dot{x}_1(0)$ – начальная скорость центра масс плиты $\dot{x}_1(0) = v_0$.

В результате интегрирования получаем

$$\dot{x}_1(t) = gt\sin\alpha - \frac{m_2 b\pi^2}{9(m_1 + m_2)}\frac{3}{\pi}\left[-\left(\cos\frac{\pi}{3}t - 1\right)\right] + v_0 .$$

Определяем зависимость от времени координаты x_1 центра масс плиты. Для этого требуется решить дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dx_1}{dt} = gt\sin\alpha - \frac{m_2 b\pi}{3(m_1 + m_2)}\left(1 - \cos\frac{\pi}{3}t\right) + v_0 .$$

Разделяем переменные и интегрируем еще раз:

$$\int_{x_1(0)}^{x_1(t)} dx_1 = \int_0^t \left[gt\sin\alpha - \frac{m_2 b\pi}{3(m_1+m_2)}\left(1-\cos\frac{\pi}{3}t\right) + v_0 \right] dt .$$

Так как начало системы отсчета совпадает с начальным положением центра масс плиты, то $x_1 = 0$. После интегрирования получаем

$$x_1(t) = g\frac{t^2}{2}\sin\alpha - \frac{m_2 b\pi}{3(m_1+m_2)}\left(t-\frac{3}{\pi}\sin\frac{\pi}{3}t\right) + v_0 t .$$

Подставляем известные численные значения:

$$x_1(t) = 9{,}8\cdot 0{,}5t^2\sin 30^\circ - 0{,}63\left(t - 0{,}96\sin\frac{\pi}{3}t\right) + 1t =$$

$$= 2{,}45t^2 + 0{,}37t + 0{,}6\sin\frac{\pi}{3}t \text{ (м).}$$

1.3 Условие задания Д-4

Использование теоремы о движении центра масс для анализа движения материальной системы

Квадратная плита 1 (рисунок 1.3) массой m_1 с длиной стороны b движется с начальной скоростью v_0 по гладкой наклонной плоскости с углом наклона α. По имеющемуся на плите желобу под действием внутренних сил перемещается тело 2 массой m_2 по закону $s(t)$ или $\varphi(t)$. Тело 2 принять за материальную точку. На основании исходных данных, приведенных в таблице 1.1, определить закон движения центра масс плиты и зависимость от времени силы давления плиты на плоскость. Начало отсчета совместить с начальным положением центра масс плиты.

Таблица 1.1 **– Исходные данные к заданию Д-4**

Вариант	Массы тел, кг		b, м	α, град	v_0, м/с	s, м	φ, рад
	m_1	m_2					
1	40	15	1	60	2,5	$t+t^2+t^3$	—
2	75	25	2	45	2	$2\sin\frac{\pi}{8}t$	—
3	80	20	3	–	1,5	—	$2t$
4	35	10	1	30	2	$t+0{,}4t^3$	—
5	40	15	1	–	0,5	$1{,}5\sin t$	—
6	70	10	3	30	1,5	$t^2+0{,}9t^3$	—

О к о н ч а н и е т а б л и ц ы 1.1

Вариант	Массы тел, кг		b, м	α, град	v_0, м/с	s, м	φ, рад
	m_1	m_2					
7	40	9	2	30	2,5	$5t^2 - t$	—
8	30	20	1	60	3	$1{,}5t + t^3$	—
9	35	5	1	–	1	$1{,}5\left(1 - \cos\frac{\pi}{2}t\right)$	—
10	45	12	2	45	2,5	$t^2(1 - t)$	—
11	30	7	1	–	2	$1{,}5\sin\frac{\pi}{3}t$	—
12	40	15	2	30	2,5	—	t
13	50	15	3	45	1	$t^2 + 0{,}2t^4$	—
14	75	30	3	60	2,5	$t(2 + t)$	—
15	40	15	2	–	3	—	$1{,}5t$
16	60	10	3	60	2,5	$4 + 2t^3$	—
17	75	25	3	45	2	—	$0{,}5t$
18	80	20	2	45	1	$0{,}8\sin\frac{\pi}{6}t$	—
19	40	10	1	60	2,5	$t^2(0{,}5 + 0{,}2t)$	—
20	60	20	1	30	2	$t + 0{,}1t^2$	—
21	80	15	3	–	1	$1 - \cos\frac{\pi}{3}t$	—
22	60	10	2	60	2,5	—	$0{,}8t$
23	45	10	1	–	1,5	$2\sin\frac{\pi}{4}t$	—
24	50	20	2	45	1,5	$t(3 + 0{,}1t)$	—
25	70	20	2	30	1	—	$\frac{\pi}{3}t$
26	35	5	1	45	3	$t + 0{,}5t^3$	—
27	60	10	3	–	2	$\sin \pi t$	—
28	40	15	2	30	1	$2 + t^2$	—
29	65	10	3	–	1,5	—	$2t$
30	60	15	2	–	2,5	—	$\frac{\pi}{4}t$

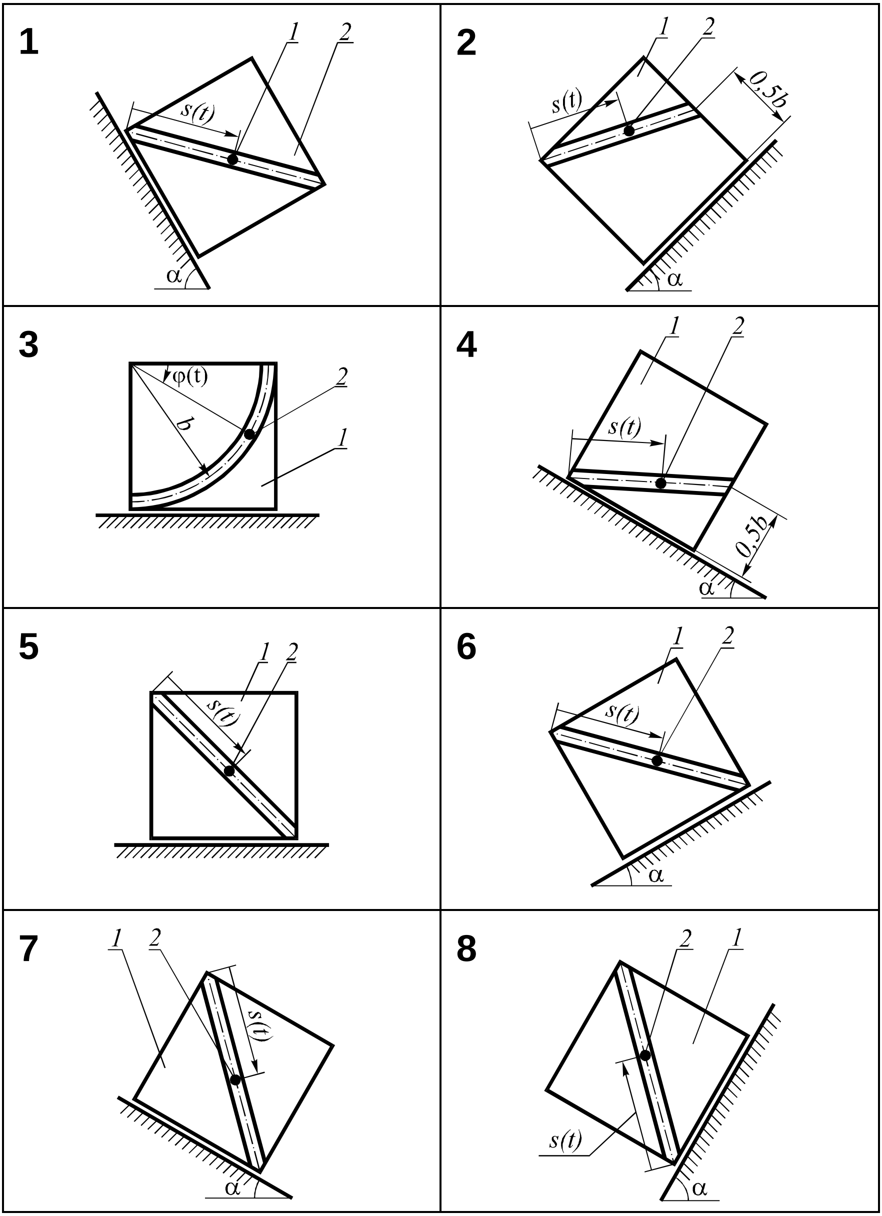

Рисунок 1.3 (начало)

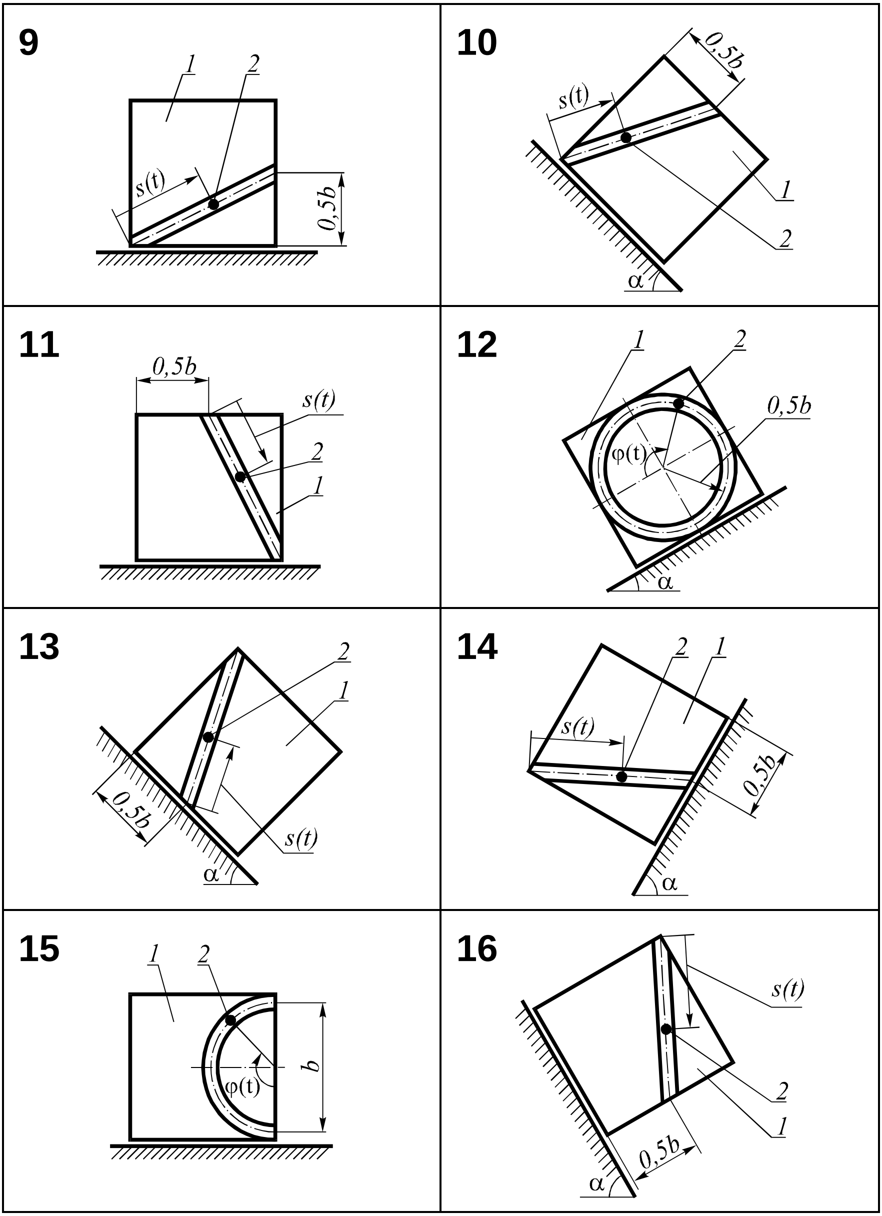

Рисунок 1.3 (продолжение)

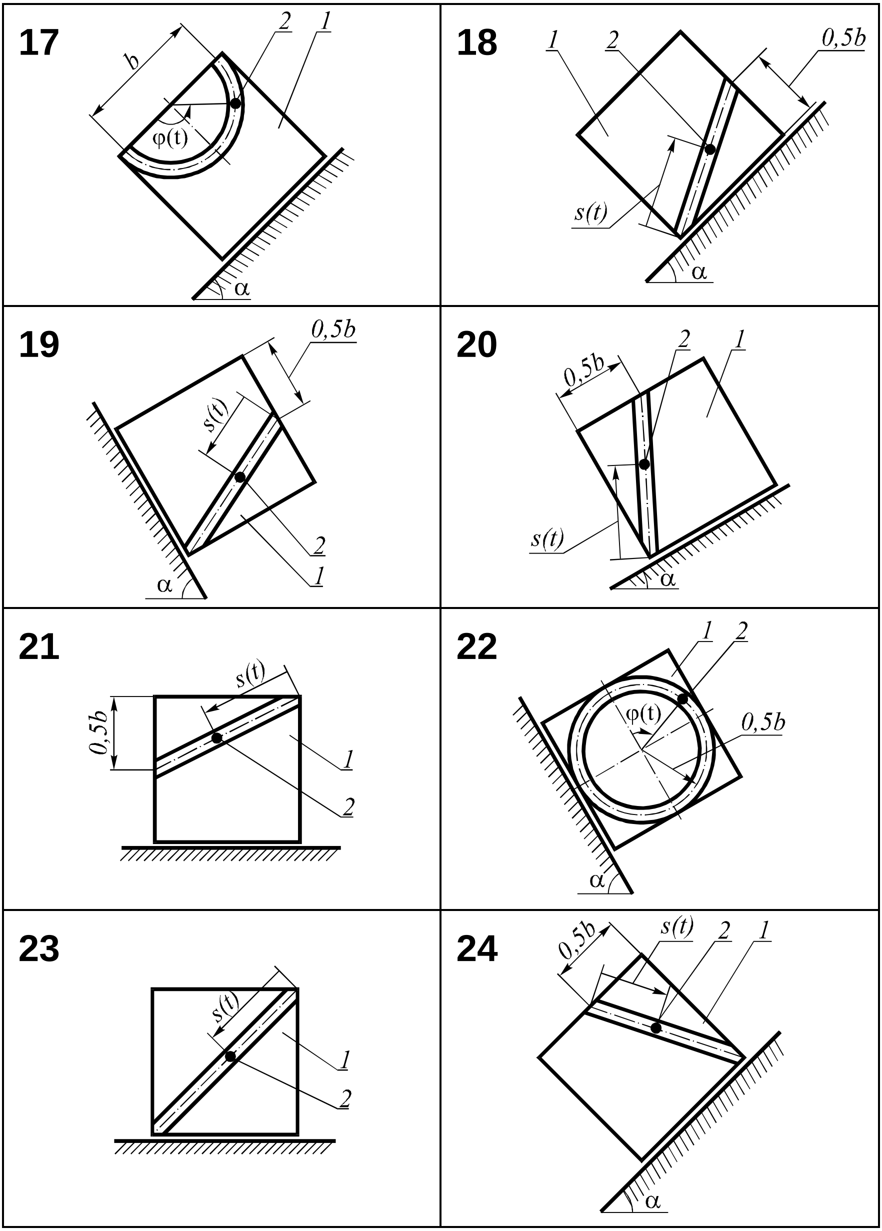

Рисунок 1.3 (продолжение)

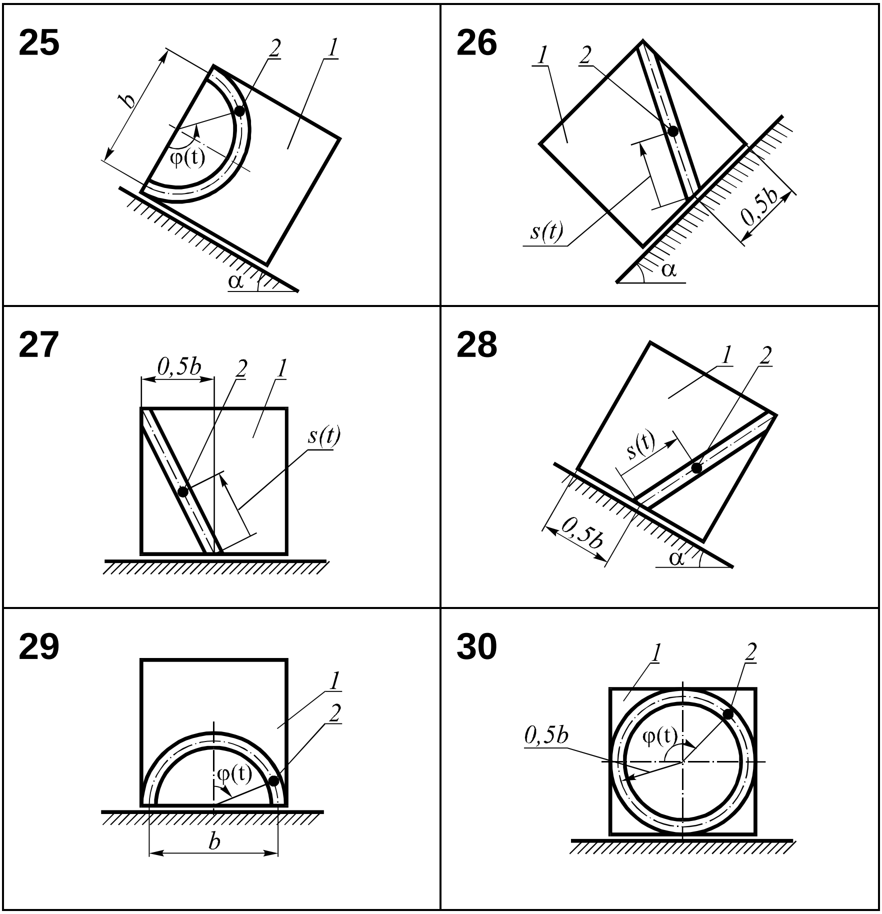

Рисунок 1.3 (окончание)

2 ДИНАМИКА ПРОСТЕЙШИХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

2.1 Некоторые положения теории

2.1.1 Динамические уравнения движения твердого тела

Динамические уравнения движения твердого тела устанавливают связь между кинематическими характеристиками движения тела и действующими на него силами.

Поступательное движение тела. В этом случае динамическое уравнение представляет собой следствие из теоремы о движении центра масс (4.1):

$$m\bar{a}_C = \sum \bar{F}_i \,, \qquad (2.1)$$

где m – масса тела;

$\bar{a}_C$ – ускорение центра масс тела;

$\bar{F}_i$ – i-тая сила, действующая на тело.

При решении задач динамическое уравнение поступательного движения тела проецируют на оси координат.

Вращательное движение тела. Для него динамическое уравнение имеет вид:

$$J_z \varepsilon = \sum M_{iz} \,, \qquad (2.2)$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси вращения z;

ε – угловое ускорение тела;

M_{iz} – момент i-й силы относительно оси вращения.

При составлении динамического уравнения вращательного движения тела выбирается направление отсчета угла поворота φ. Моменты сил, вращающих тело против выбранного направления, принимаются отрицательными, а по выбранному направлению – положительными.

Момент инерции J_z является мерой инертности тела при вращательном движении. Момент инерции материальной системы относительно данной оси Oz определяется как сумма произведений масс всех точек системы на квадраты их расстояний от этой оси:

$$J_z = \sum m_i h_1^2 \,.$$

Для абсолютно твердого тела суммирование по точкам системы заменяется интегрированием по объему

$$J_z = \iiint\limits_{(V)} \rho h^2 dV = \iiint\limits_{(V)} \rho h^2 dxdydz \,,$$

где ρ – плотность материала тела;

h – расстояние от точки с координатами x, y, z до оси Oz.

Момент инерции J_C тела относительно оси *Cz*, проходящей через центр масс *C*, называют *центральным моментом инерции*. Если для тела известен *радиус инерции i*, то центральный момент

$$J_C = mi^2 . \tag{2.3}$$

Центральные моменты инерции некоторых тел:

1 Тонкий однородный стержень с массой *m* и длиной *l*:

$$J_C = \frac{1}{12} ml^2 .$$

2 Тонкое круглое однородное кольцо с массой *m* и радиусом *R*:

$$J_C = mR^2 .$$

3 Круглый однородный диск с массой *m* и радиусом *R*:

$$J_C = \frac{1}{2} mR^2 .$$

2.1.2 Порядок решения задач об определении параметров движения материальной системы с использованием динамических уравнений движения твердого тела

Решение задач с использованием динамических уравнений движения твердого тела рекомендуется осуществлять по следующей методике:

1 Изображают рассматриваемую систему тел и устанавливают направление движения каждого тела.

2 Для каждого тела системы выполняют следующие действия:

а) отдельно изображают тело и указывают все силы, действующие на него;

б) выбирают оси координат. Если тело движется поступательно, то вводят оси координат, одну из которых направляют по скорости. Если тело вращается, то по направлению вращения указывают направление отсчета угла поворота φ;

в) записывают динамические уравнения движения тела. Подставляют известные выражения для величин, входящих в динамические уравнения и производят возможные преобразования.

3 Устанавливают связь между ускорениями звеньев. Все линейные и угловые ускорения, входящие в динамические уравнения, выражают через ускорение звена, параметры движения которого определяются.

4 Решают систему уравнений, составленную из динамических уравнений движения тел системы.

5 Определяют искомый параметр движения. При необходимости производят интегрирование и переходят от ускорений к скоростям.

2.2 Пример выполнения задания контрольной работы

Задача

Система трех тел (рисунок 2.1) движется под действием силы P = 4 кН. К телу 2 приложена пара сил, создающая момент сопротивления $M_{сопр}$ = 0,5 кН·м. Массы тел: m_1 = 50 кг, m_2 = 150 кг, m_3 = 120 кг. Радиусы колес: R_2 = 20 см, R_3 = 30 см, r_2 = 10 см, r_3 = 15 см. Радиусы инерции тел: i_2 = 15 см, i_3 = 20 см. Коэффициент трения скольжения для тела 1 о плоскость f = 0,2. Угол $\alpha = 60°$. Определить ускорение точки A в момент времени t_1 = 0,6 с, если в начальный момент времени система находилась в покое.

Решение

1 *Делаем рисунок к задаче* (рисунок 2.1). Определяем направление движения тел. Момент сопротивления, приложенный к телу 2, направлен по ходу часовой стрелки. Значит, тело 2 вращается против хода часовой. Тогда тело 3 будет вращаться по ходу часовой, а тело 1 – скользить вверх по наклонной плоскости.

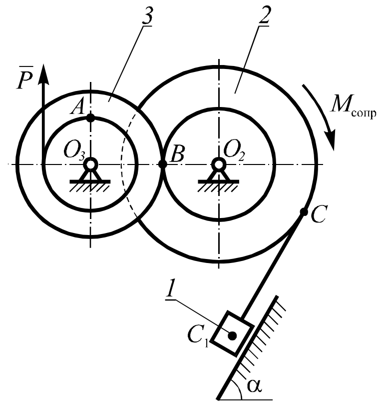

Рисунок 2.1

2 *Составляем динамические уравнения движения каждого тела системы.*

Рассматриваем тело 1:

а) *делаем рисунок и указываем силы, действующие на тело* (рисунок 2.2). На тело 1 действуют: сила тяжести $\overline{G}_1$; нормальная реакция $\overline{N}_1$; сила трения скольжения $\overline{F}_{тр}$; сила натяжения нити $\overline{T}_1$. Так как тело 1 движется вверх по наклонной плоскости, то силу трения надо направить вниз параллельно наклонной плоскости;

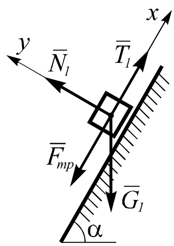

Рисунок 2.2

б) *выбираем оси координат.* Тело 1 движется поступательно. Следовательно, надо выбрать декартовы оси координат. При этом ось x направим вдоль движения, ось y – перпендикулярно x;

в) с*оставляем динамические уравнения движения*. Динамические уравнения поступательного движения (2.1) в проекциях на выбранные оси:

$$m_1 a_{C_1 x} = T_1 - F_{тр} - G_1 \sin\alpha;$$

$$m_1 a_{C_1 y} = N_1 - G_1 \cos\alpha,$$

где a_{C_1x}, a_{C_1y} – проекции ускорения центра масс тела 1 (точки C_1) на оси x, y. При поступательном движении ускорения всех точек тела одинаковы.

Так как все точки тела 1 движутся параллельно оси x, то $a_{C_1y} = 0$. Следовательно, проекция a_{C_1x} совпадает с полным ускорением центра масс тела 1 a_{C_1}. В соответствии с законом Кулона для силы трения скольжения можно записать: $F_{тр} = fN_1$, для силы тяжести – $G_1 = m_1g$. Подставим полученные выражения в динамические уравнения поступательного движения

$$m_1a_{C_1} = T_1 - fN_1 - m_1g\sin\alpha;$$

$$0 = N_1 - m_1g\cos\alpha.$$

Выражаем из второго уравнения модуль нормальной реакции N_1 и подставляем во второе:

$$m_1a_{C_1} = T_1 - m_1g(\sin\alpha + f\cos\alpha). \qquad (2.4)$$

Рассматриваем тело 2:

а) *делаем рисунок и указываем силы, действующие на тело* (рисунок 2.3). На тело 2 действуют: сила тяжести $\overline{G}_2$; реакция цилиндрического шарнира в точке O_2, раскладываемая на две составляющие $\overline{X}_2$ и $\overline{Y}_2$; сила натяжения нити $\overline{T}_2$; пара сил с моментом $M_{сопр}$. В точке сцепления колес 2 и 3 на тело 2 действуют нормальная реакция $\overline{N}_2$ и окружная сила $\overline{S}_2$. Нормальная реакция направлена перпендикулярно касательной к поверхности колеса. Следовательно, линия действия силы $\overline{N}_2$ должна проходить через центр масс тела 2 (точку O_2). Окружная сила направлена перпендикулярно силе $\overline{N}_2$;

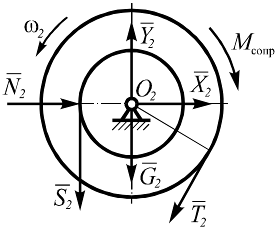

Рисунок 2.3

б) *выбираем оси координат* (см. рисунок 2.3). Тело 2 движется вращательно. Значит надо указать направление отсчета угла поворота. Как было установлено ранее, тело 2 вращается против хода часовой стрелки;

в) *записываем динамическое уравнение движения*. Тело 2 движется вращательно вокруг оси, проходящей через точку O_2. Следовательно, динамическое уравнение будет иметь вид (2.2):

$$J_{O_2}\varepsilon_2 = -T_2R_2 + S_2r_2 - M,$$

где J_{O_2} – момент инерции тела 2 относительно оси, проходящей через точку O;

ε_2 – угловое ускорение тела 2.

Сила тяжести, компоненты реакции цилиндрического шарнира и сила нормальной реакции не имеют момента относительно оси вращения.

В соответствии с формулой (2.3) $J_{O_2} = m_2 i_2^2$. Силы $\overline{T_1}$ и $\overline{T_2}$ – силы взаимодействия между телами 1 и 2. Следовательно $\overline{T_2} = -\overline{T_1}$, а модули этих сил равны. Динамическое уравнение движения тела 2 можно переписать в виде

$$m_2 i_2^2 \varepsilon_2 = -T_1 R_2 + S_2 r_2 - M \; . \tag{2.5}$$

Рассматриваем тело 3:

а) *делаем рисунок и указываем силы, действующие на тело* (рисунок 2.4). На тело 3 действуют: сила тяжести $\overline{G_3}$; реакция цилиндрического шарнира в точке O_3, раскладываемая на две составляющие $\overline{X_3}$ и $\overline{Y_3}$; активная сила $\overline{P}$; нормальная реакция $\overline{N_3}$ и окружная сила $\overline{S_3}$;

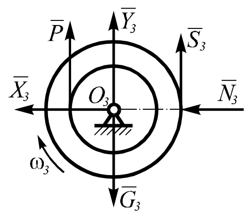

Рисунок 2.4

б) *выбираем оси координат* (рисунок 2.4). Направление вращения – по ходу часовой стрелки;

в) *записываем динамическое уравнение движения*. Тело 3 движется вращательно вокруг оси, проходящей через точку O_3. Следовательно, динамическое уравнение

$$J_{O_3} \varepsilon_2 = -S_3 R_3 + P r_3 \, ,$$

где J_{O_3} – момент инерции тела 3 относительно оси O_3;

ε_3 – угловое ускорение тела 3.

Сила тяжести, компоненты реакции цилиндрического шарнира и сила нормальной реакции не имеют момента относительно оси вращения.

В соответствии с формулой (2.3) $J_{O_3} = m_3 i_3^2$. Окружные силы $\overline{S_2}$ и $\overline{S_3}$ – силы взаимодействия между телами 2 и 3. Следовательно $\overline{S_3} = -\overline{S_2}$, а модули этих сил равны. Динамическое уравнение движения тела 3 можно переписать в виде

$$m_3 i_3^2 \varepsilon_3 = -S_2 R_3 + P r_3 \, . \tag{2.6}$$

3 *Устанавливаем связь между ускорениями звеньев* a_C, ε_2, ε_3. Воспользуемся методом общей точки. Вследствие нерастяжимости нитей скорость точки C (см. рисунок 2.1) равна скорости центра масс тела 1 $v_{C_1} = v_C$. Точка C принадлежит вращательно движущемуся телу 2. Значит, скорость этой точки определяется как произведение угловой скорости тела 2 на расстояние от точки C до оси вращения $v_C = \omega_2 CO_2 = \omega_2 R_2$. Следовательно, $v_{C_1} = \omega_2 R_2$. Продифференцируем последнее равенство по времени

$$\frac{dv_{C_1}}{dt} = \frac{d(\omega_2 R_2)}{dt}. \qquad (2.7)$$

Производная от модуля скорости центра масс первого тела по времени равна касательному ускорению этой точки. Так как центр масс тела 1 движется прямолинейно, то полное ускорение этой точки совпадает с касательным. Значит, $\frac{dv_{C_1}}{dt} = a_{C_1}^{\tau} = a_{C_1}$. Радиус R_2 – величина постоянная. Значит, $\frac{d(\omega_2 R_2)}{dt} = \frac{d\omega_2}{dt} R_2 = \varepsilon_2 R_2$. Тогда равенство (2.7) примет вид

$$a_1 = \varepsilon_2 R_2. \qquad (2.8)$$

Общей для тел 2 и 3 является точка B (см. рисунок 2.1). Точка B принадлежит двум вращательно движущимся телам. Для скорости этой точки можно записать:

$$v_B = \omega_2 BO_2 = \omega_2 r_2; \quad v_B = \omega_3 BO_3 = \omega_3 R_3.$$

Значит, $\omega_2 r_2 = \omega_3 R_3$. Продифференцируем данное равенство по времени $\frac{d(\omega_2 r_2)}{dt} = \frac{d(\omega_3 R_3)}{dt}$. С учетом того, что радиусы колес постоянны, получаем

$$\varepsilon_2 r_2 = \varepsilon_3 R_3. \qquad (2.9)$$

Точка A, ускорение которой надо найти по условию задачи, принадлежит телу 3. Значит, ускорения тел 1 и 2 (a_1, ε_2) надо выразить через ε_3. Из равенства (2.9)

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 \frac{R_3}{r_2}. \qquad (2.10)$$

Подставив это выражение в (2.8), для ускорения a_1 запишем

$$a_1 = \varepsilon_3 \frac{R_3 R_2}{r_2}. \qquad (2.11)$$

4 *Решаем систему динамических уравнений.* Для этого в уравнение (2.4) движения тела 1 подставляем полученное выражение (2.11) для ускорения точки C_1, а в динамическое уравнение (2.5) движения тела 2 – выражение (2.10) для углового ускорения ε_2. Тогда из уравнений (2.4) – (2.6) можно составить систему

$$\begin{cases} m_1\varepsilon_3 \dfrac{R_2R_3}{r_2} = T_1 - m_1 g(\sin\alpha + f\cos\alpha); \\ m_2 i_2{}^2 \varepsilon_3 \dfrac{R_3}{r_2} = -T_1R_2 + S_2r_2 - M; \\ m_3 i_3{}^2 \varepsilon_3 = -S_2R_3 + Pr_3. \end{cases} \tag{2.12}$$

В данной системе три неизвестные: угловое ускорение ε_3; сила натяжения T_1; окружная сила S_2. Из первого уравнения системы (2.12) выражаем силу

$$T_1 = m_1\varepsilon_3 \frac{R_2R_3}{r_2} + m_1 g(\sin\alpha + f\cos\alpha).$$

Из третьего уравнения системы (2.12) выражаем силу

$$S_2 = P\frac{r_3}{R_3} - m_3 i_3{}^2 \varepsilon_3 \frac{1}{R_3}.$$

Подставляем выражения для сил во второе уравнение системы (2.12)

$$m_2 i_2{}^2 \varepsilon_3 \frac{R_3}{r_2} = -m_1\varepsilon_3 \frac{R_2{}^2R_3}{r_2} - m_1 g(\sin\alpha + f\cos\alpha)R_2 +$$

$$+ P\frac{r_3}{R_3}r_2 - m_3 i_3{}^2 \varepsilon_3 \frac{r_2}{R_3} - M.$$

Из данного уравнения найдем угловое ускорение третьего тела

$$\varepsilon_3 = \frac{P\dfrac{r_3}{R_3}r_2 - m_1 g(\sin\alpha + f\cos\alpha)R_2 - M}{m_1\dfrac{R_2{}^2R_3}{r_2} + m_2 i_2{}^2\dfrac{R_3}{r_2} + m_3 i_3{}^2\dfrac{r_2}{R_3}}.$$

Подставляем известные численные значения

$$\varepsilon_3 = \frac{4000\cdot\dfrac{0{,}15}{0{,}3}\cdot 0{,}1 - 50\cdot 9{,}8\cdot(\sin 60^\circ + 0{,}2\cos 60^\circ)\cdot 0{,}2 - 50}{50\cdot\dfrac{0{,}2^2\cdot 0{,}3}{0{,}1} + 150\cdot 0{,}15^2\cdot\dfrac{0{,}3}{0{,}1} + 120\cdot 0{,}2^2\cdot\dfrac{0{,}1}{0{,}3}}.$$

В результате вычислений получаем

$$\varepsilon_3 = \frac{200 - 94{,}67 - 50}{6 + 10{,}13 + 1{,}6} = \frac{55{,}33}{17{,}73} = 3{,}12 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}\right).$$

5 *Определяем ускорение точки A, принадлежащей вращательно движущемуся телу 3.* Для этого надо найти угловую скорость тела 3 в заданный момент времени. Угловое ускорение тела равно производной по времени от угловой скорости $\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt}$. В данном дифференциальном уравнении разделим переменные и проинтегрируем от момента начала движения до заданного момента t_1

$$\int_{\omega_{30}}^{\omega_3} d\omega_3 = \int_0^{t_1} \varepsilon_3 dt .$$

Нижний предел интегрирования по ω_3 равен угловой скорости тела 3 в начальный момент времени. По условию задачи в начальный момент времени система находилась в покое. Значит, $\omega_{30} = 0$. Так как найденное ранее угловое ускорение третьего тела не зависит от времени, то в результате интегрирования получаем: $\omega_3 = \varepsilon_3 t_1$. Теперь определяем ускорение точки A

$$a_A = AO_3\sqrt{\varepsilon_3^2 + \omega_3^4} = r_3\sqrt{\varepsilon_3^2 + \varepsilon_3^4 t_1^4} .$$

Подставляем численные значения величин

$$a_A = 0{,}15\sqrt{3{,}12^2 + 3{,}12^4 \cdot 0{,}6^4} = 0{,}15\sqrt{9{,}73 + 12{,}23} = 0{,}7 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right).$$

2.3 Условие задания Д-5

Применение динамических уравнений движения твердого тела для анализа материальной системы

Система трех тел движется под действием силы P или пары сил с моментом M (рисунок 2.5). Кроме того, на систему действует пара сил, создающая момент сопротивления $M_{\text{сопр}}$. Массы тел: m_1, m_2, m_3. Радиусы колес: R_2, R_3, r_2, r_3. Радиусы инерции тел: i_2, i_3. Коэффициент трения скольжения f. На основании исходных данных, приведенных в таблице 2.1, определить ускорение точки A в момент времени t_1, если в начальный момент времени система находилась в покое. Радиусы инерции вращательно движущихся тел связаны с радиусом R: $i = \frac{1}{\sqrt{2}} R$.

Т а б л и ц а 2 . 1 – **Исходные данные к заданию Д-5**

Вариант	Массы тел, кг			Радиусы, см				α, град	*f*	*P*, кН	*M*, кН·м	$M_{сопр}$, кН·м
	m_1	m_2	m_3	R_2	r_2	R_3	r_3					
1	90	120	100	30	20	50	20	–	–	1	–	0,1
2	60	80	120	60	40	40	15	60	0,2	–	2	0,5
3	100	100	150	50	25	70	20	30	0,1	4	–	1,1
4	100	130	160	60	45	50	25	30	0,2	3	–	0,9
5	65	200	100	40	20	40	10	–	–	2,5	–	0,4
6	80	150	170	50	30	60	—	45	0,3	–	6	1
7	100	120	110	80	30	60	20	–	–	5	–	1,4
8	50	125	150	70	40	40	20	–	0,1	4	–	0,8
9	90	100	170	40	20	80	30	60	0,15	–	3	0,6
10	60	110	150	50	20	60	45	30	0,2	6	–	2
11	100	130	130	40	30	40	25	45	0,4	7	–	2,1
12	55	100	80	60	15	30	20	60	0,1	–	4	0,9
13	70	130	165	50	20	70	30	–	0,05	5	–	1,3
14	100	170	120	80	60	60	30	30	0,25	6	–	2.4
15	130	90	180	40	10	80	40	–	–	4	–	0,4
16	60	100	40	60	45	90	50	60	0,3	4	–	0,2
17	90	180	110	80	40	50	—	30	0,1	–	2	0,1
18	80	100	100	80	50	80	40	–	0,2	2	–	0,7
19	100	130	90	60	30	40	20	30	0,05	3	–	1,4
20	110	160	70	80	40	30	25	45	0,15	5	–	1,6
21	50	120	100	80	55	60	40	60	0,3	–	3	0,7
22	100	140	60	100	70	50	30	–	–	2,5	–	0,3
23	75	100	65	70	35	40	20	–	0,15	1,8	–	0,1
24	60	130	100	90	40	60	30	60	0,1	–	2,5	0,6
25	45	100	85	80	30	50	35	45	0,2	–	0,9	0,1
26	100	90	130	70	55	100	40	–	–	3	–	1
27	75	100	60	80	40	40	30	30	0,1	2,2	–	0,2
28	80	110	110	60	30	60	35	45	0,2	4,4	–	1,4
29	100	160	200	50	20	70	45	–	0,22	2	–	0,5
30	90	180	210	60	25	90	40	–	–	1,7	–	0,1

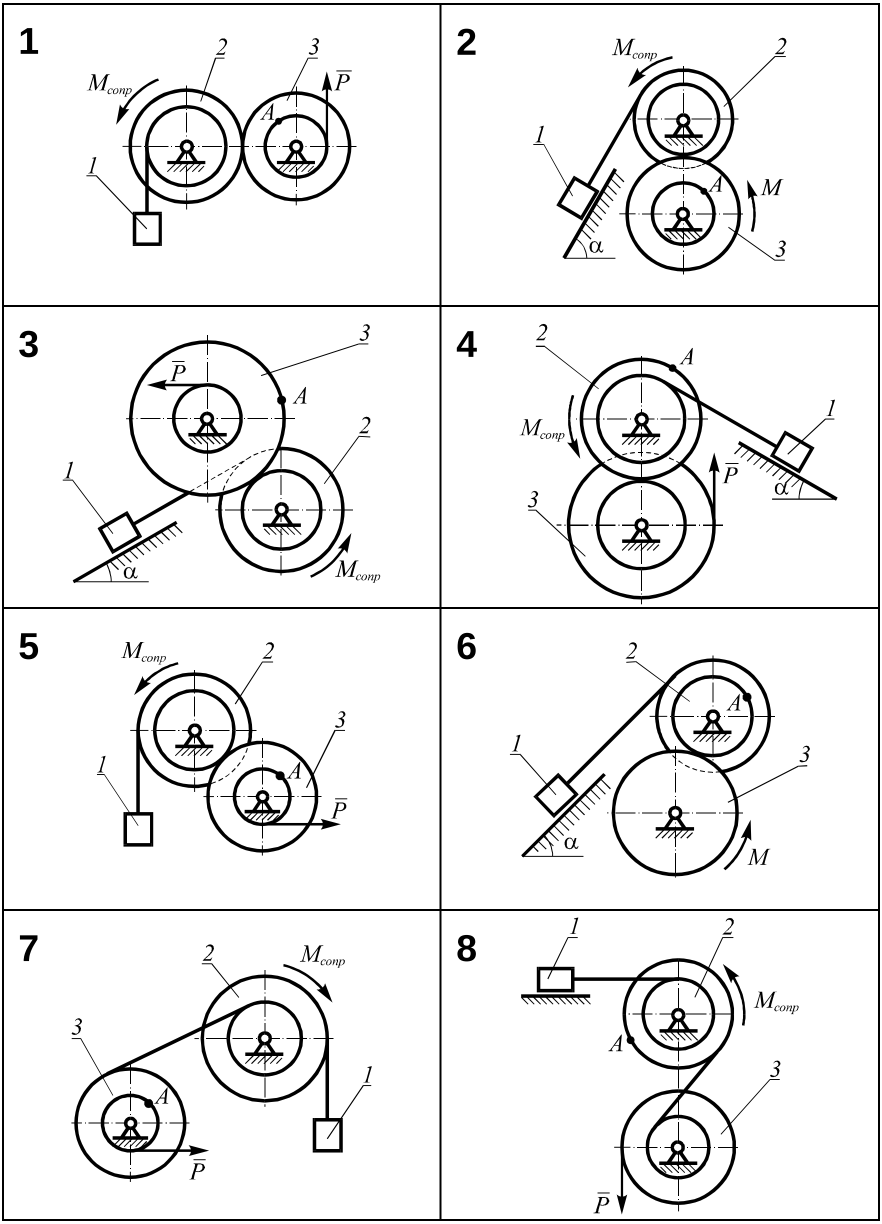

Рисунок 2.5 (начало)

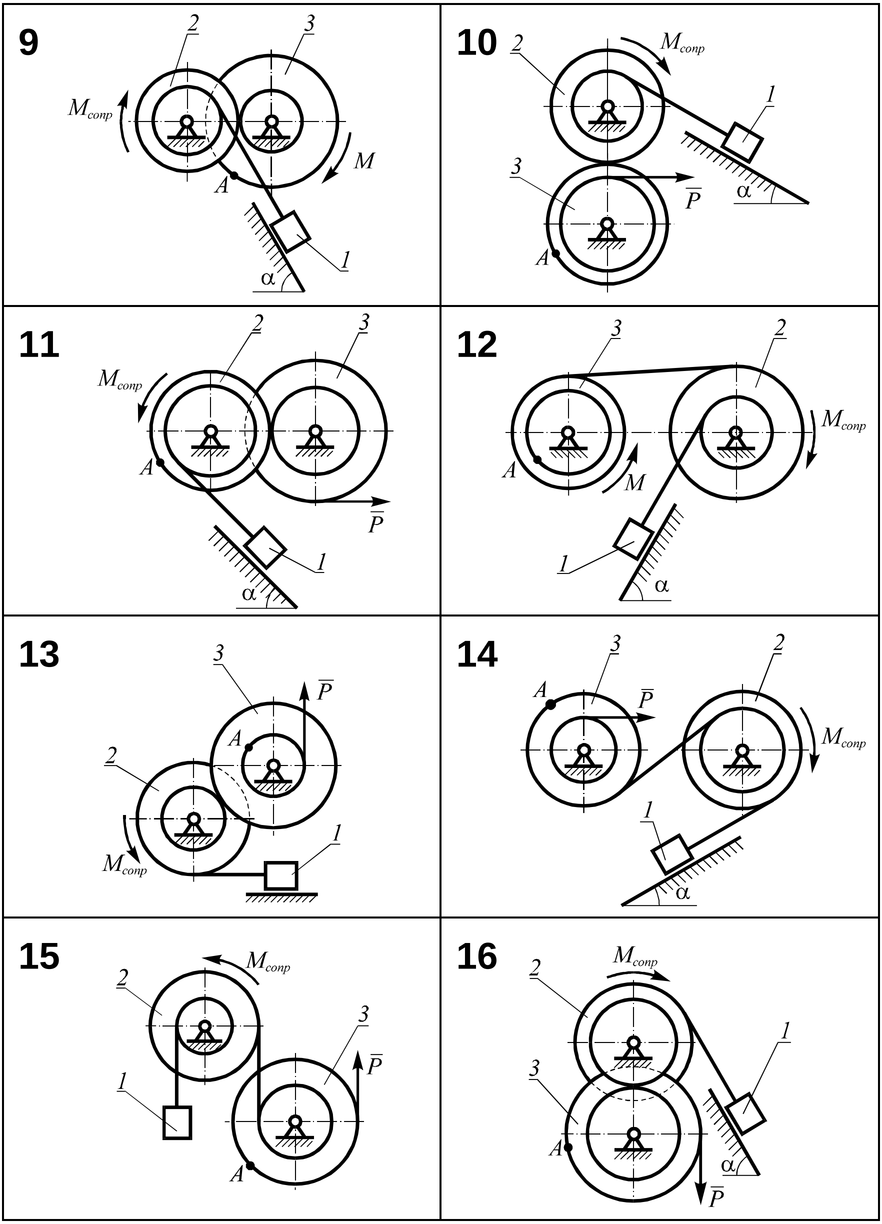

Рисунок 2.5 (продолжение)

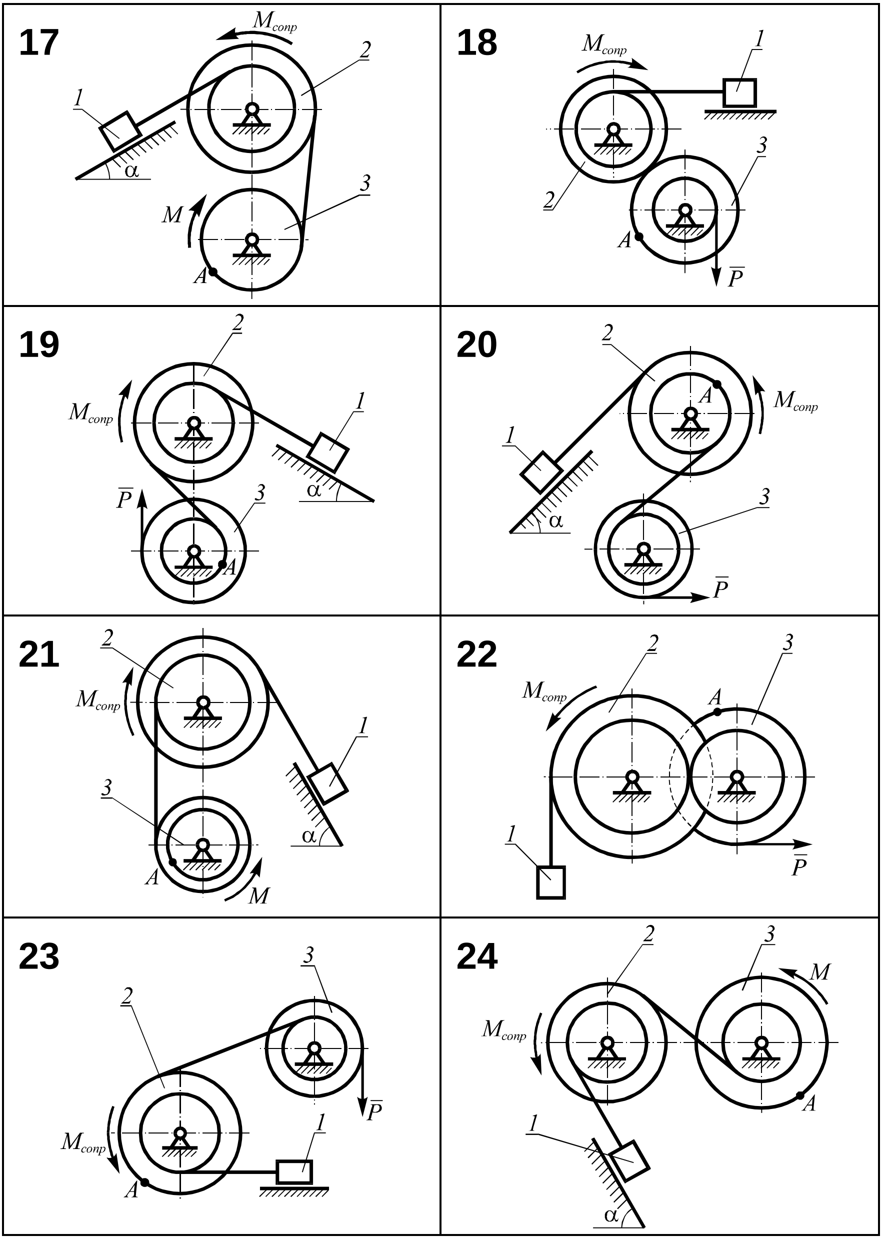

Рисунок 2.5 (продолжение)

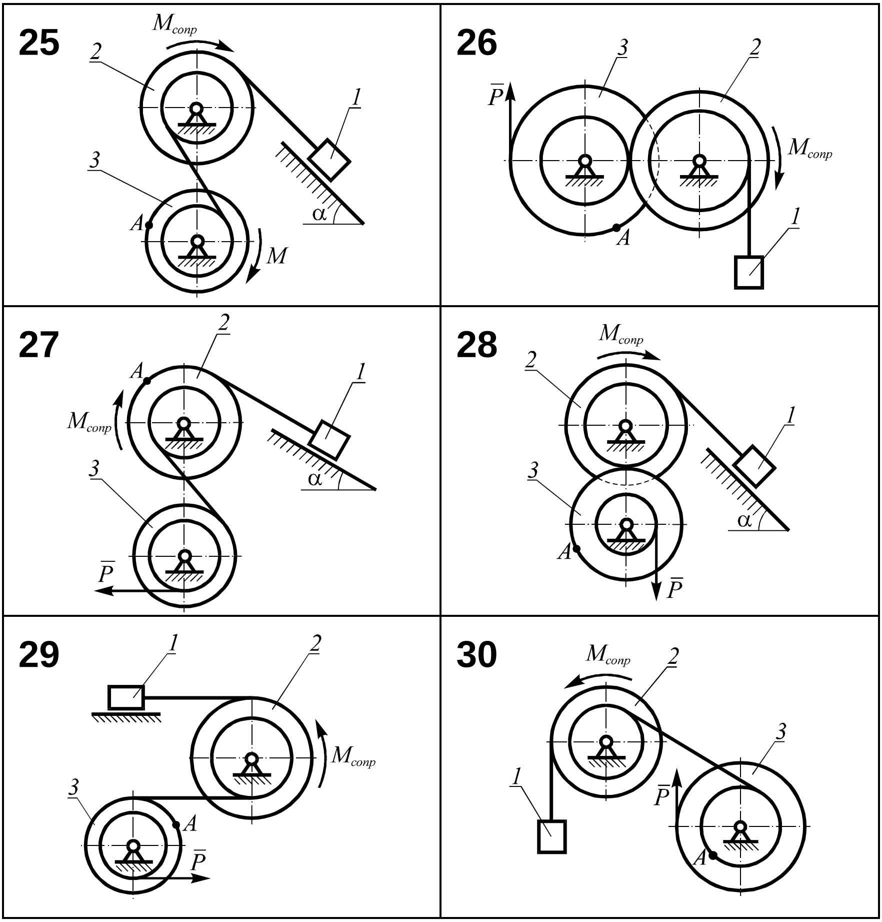

Рисунок 2.5 (окончание)

3 ДИНАМИКА ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

3.1 Некоторые положения теории

Положение тела, движущегося плоскопараллельно, в любой момент времени определяется положением точки этого тела, принимаемой за полюс, и углом поворота тела. При решении задач динамики в качестве полюса, как правило, принимают центр масс тела. Для плоскопараллельно движущегося тела, как и для любой материальной системы, выполняется теорема о движении центра масс (1.1)

$$m\bar{a}_C = \sum \bar{F}_i \,, \qquad (3.1)$$

где m, $\bar{a}_C$ – масса и ускорение центра масс тела;

$\bar{F}_i$ – i-тая сила, действующая на тело.

Для рассматриваемого тела выполняется также теорема об изменении момента количества движения. Эту теорему в данном случае можно привести к виду

$$J_C \varepsilon = \sum M_{iC} \,.$$

Здесь J_C – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс;

ε – угловое ускорение тела;

M_{iC} – момент i-й силы относительно оси, проходящей через центр масс. Записав равенство (3.1) в проекциях на оси координат, приходим к системе трех уравнений

$$\begin{cases} ma_{Cx} = \sum F_{ix}, \\ ma_{Cy} = \sum F_{iy}, \\ J_C \varepsilon = \sum M_{iC} \,. \end{cases} \qquad (3.2)$$

Система (3.2) представляет собой **динамические уравнения плоскопараллельного движения твердого тела**.

Решение задач с использованием динамических уравнений движения твердого тела рекомендуется осуществлять по следующей методике:

1 Делают рисунок к задаче. Указывают все активные силы и реакции связей, действующие на тело.

2 Выбирают оси координат. Ось x направляют по движению центра масс, ось y – перпендикулярно x. По вращению тела указывают направление отсчета угла поворота.

3 Записывают динамические уравнения плоскопараллельного движения.

4 Считая, что качение происходит без проскальзывания, устанавливают связь между угловым ускорением тела и ускорением центра масс.

5 Решают полученную систему уравнений.

6 Проверяют условие качения без проскальзывания.

7 Определяют ускорение центра масс тела и угловое ускорение.

8 Определяют величины, требуемые по условию задачи. Для этого переходят от ускорения a_C к скорости центра масс, от углового ускорения к угловой скорости ω.

Замечание — Напомним некоторые теоретические положения, использование которых потребуется при решении задачи контрольной работы.

При решении задач динамики для катящегося колеса следует учитывать, что при качении одного тела по поверхности другого возникает пара сил, препятствующая качению. Момент этой пары M_c называется моментом сопротивления качению

$$M_c = \delta N ,$$

где δ – коэффициент сопротивления качению;

N – сила нормального давления, действующая со стороны поверхности на катящееся тело.

На катящееся тело в точке контакта с поверхностью также действует сила сцепления $\overline{F}_{\text{сц}}$. Вектор $\overline{F}_{\text{сц}}$ перпендикулярен вектору силы $\overline{N}$. Если качение колеса происходит без проскальзывания, то направление и модуль силы сцепления определяются активными силами, приложенными к колесу. При этом мгновенный центр скоростей колеса находится в точке касания с неподвижной поверхностью. Если модуль силы сцепления достигает предельного значения $F_{\text{сц}}^*$, то сцепление с поверхностью нарушается и колесо катится с проскальзыванием. Предельное значение силы сцепления определяется по закону Кулона

$$F_{\text{сц}}^* = f_{\text{сц}} N ,$$

где $f_{\text{сц}}$ – коэффициент трения покоя (сцепления).

При наличии проскальзывания точка касания с поверхностью не является мгновенным центром скоростей колеса, а сила сцепления совпадает по модулю с предельной

$$\left|F_{\text{сц}}\right| = F_{\text{сц}}^* \quad \Rightarrow \quad F_{\text{сц}} = \pm f_{\text{сц}} N . \qquad (3.3)$$

Знак выбирается тот же, что и для силы сцепления, определенной в предположении качения без проскальзывания.

Для определения скоростей точек катящегося колеса следует использовать известные из кинематики соотношения. Скорость произвольной точки A плоскопараллельно движущегося тела геометрически складывается из скорости точки, принятой за полюс, и скорости, которую имеет точка A при вращении тела вокруг полюса. Если за полюс принят центр масс тела C, то для скорости точки A можно записать

$$\overline{v}_A = \overline{v}_C + \overline{v}_{AC} .$$

Величина $\bar{v}_{AC}$ – скорость точки A относительно точки C. Относительная скорость направлена перпендикулярно отрезку AC, соединяющему точку A с полюсом C. Модуль относительной скорости равен произведению угловой скорости тела ω на расстояние от точки A до полюса:

$$v_{AC} = \omega AC\ .$$

Если для плоскопараллельно движущегося тела известно положение мгновенного центра скоростей, то модуль скорости точки A можно рассчитать также по формуле

$$v_A = \omega h_A\ ,$$

где h_A – расстояние от точки A до мгновенного центра скоростей тела.

3.2 Пример выполнения задания контрольной работы

Задача

Колесо массой $m = 300$ кг катится по шероховатой поверхности под действием силы тяжести и активной силы $F = 1$ кН (рисунок 3.1). Радиусы колеса равны соответственно $R = 40$ см и $r = 20$ см. Радиус инерции $i = 30$ см. Коэффициент сопротивления качению $\delta = 3$ см, коэффициент трения сцепления $f = 0,2$. Углы $\alpha = 60°, \beta = 30°$. Определить скорость точки A в момент времени $t_1 = 0,4$ с. В начальный момент времени колесо покоилось.

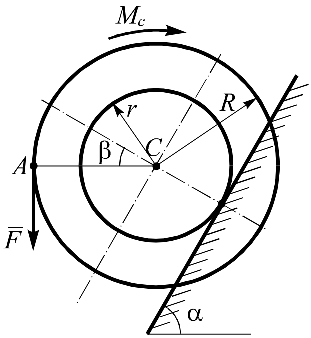

Рисунок 3.1

Р е ш е н и е

1 *Делаем рисунок и указываем силы, действующие на тело* (рисунок 3.2). На тело действуют: активная сила $\bar{F}$; сила тяжести $\bar{G}$; нормальная реакция $\bar{N}$; сила сцепления $\bar{F}_{сц}$; момент сопротивления качению M_c. Под действием перечисленных сил колесо будет катиться вниз по наклонной плоскости, а вращение будет происходить против хода часовой стрелки. Момент сопротивления качению M_c направлен противоположно вращению. Сила сцепления может быть направлена как по движению центра масс колеса, так и противоположно движению. Примем, что сила $F_{сц}$ направлена вниз по наклонной плоскости.

2 *Выбираем оси координат.* Ось x направим вдоль наклонной плоскости, ось y — перпендикулярно x. Укажем также направление вращения тела (рисунок 3.2).

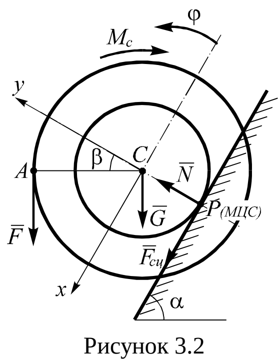

Рисунок 3.2

3 *Записываем динамические уравнения движения тела.* Так как тело движется плоскопараллельно, то следует записать уравнения вида (3.2)

$$\begin{cases} ma_{Cx} = \sum F_{ix}, \\ ma_{Cy} = \sum F_{iy}, \\ J_C\varepsilon = \sum M_{iC}; \end{cases} \qquad \begin{cases} ma_{Cx} = F\cos\beta + G\sin\alpha + F_{\text{сц}}, \\ ma_{Cy} = N - G\cos\alpha + F\sin\beta, \\ J_C\varepsilon = FR + F_{\text{сц}}r - M_c. \end{cases} \tag{3.4}$$

Так как точка C движется параллельно оси x, то $a_{Cy} = 0$. Следовательно, $a_C = a_{Cx}$. Сила тяжести $G = mg$. Момент сопротивления качению связан с нормальной реакцией $M_c = \delta N$. Так как известен радиус инерции, то для момента инерции относительно оси, проходящей через центр масс, можно записать: $J_C = mi^2$.

4 *Устанавливаем связь между угловым ускорением тела и ускорением центра масс*. Предположим, что тело движется без проскальзывания. Тогда точка касания с неподвижной поверхностью (точка P) является мгновенным центром скоростей, а для скорости точки C можно записать $v_C = \omega CP$. Здесь ω – угловая скорость тела; CP – расстояние от точки C до мгновенного центра скоростей тела. В рассматриваемом случае $CP = r$. Отсюда $\omega = v_C/r$. Дифференцируя последнее равенство по времени, получаем связь между угловым ускорением тела и линейным ускорением его центра масс

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{r}\frac{dv_C}{dt} = \frac{a_C}{r}. \tag{3.5}$$

Подставляя полученные соотношения для силы тяжести, момента сопротивления качению, момента инерции и углового ускорения в систему (3.4), получаем

$$\begin{cases} ma_C = F\cos\beta + mg\sin\alpha + F_{\text{сц}}, \\ 0 = N - mg\cos\alpha - F\sin\beta, \\ mi^2\dfrac{a_C}{r} = FR - F_{\text{сц}}r - \delta N. \end{cases} \tag{3.6}$$

5 *Решаем полученную систему уравнений* (3.6). Из второго уравнения выражаем нормальную реакцию

$$N = mg\cos\alpha + F\sin\beta. \tag{3.7}$$

Из первого уравнения системы находим силу сцепления

$$F_{\text{сц}} = -F\cos\beta - mg\sin\alpha + ma_C. \tag{3.8}$$

Подставляем полученные выражения для сил N и $F_{\text{сц}}$ в третье уравнение системы (3.6):

$$mi^2\frac{a_C}{r} = FR + Fr\cos\beta + mgr\sin\alpha - ma_C r - \delta F\sin\beta - \delta mg\cos\alpha .$$

Из последнего равенства можно найти ускорение центра масс

$$a_C = \frac{F\left(R + r\cos\beta - \delta\sin\beta\right) + mg\left(r\sin\alpha - \delta\cos\alpha\right)}{m\left(\frac{i^2}{r} + r\right)}.$$

Подставляем это выражение в формулу для силы сцепления (3.8):

$$F_{\text{сц}} = -F\cos\beta - mg\sin\alpha +$$

$$+\frac{r}{i^2 + r^2}\left[F(R + r\cos\beta - \delta\sin\beta) + mg(r\sin\alpha - \delta\cos\alpha)\right].$$

Определяем численное значение силы сцепления

$$F_{\text{сц}} = -1000\cos 30° - 294\sin 60° + \frac{0{,}2}{0{,}04 + 0{,}09}\times$$

$$\times\left[1000\cdot(0{,}4 + 0{,}2\cos 30° - 0{,}03\sin 60°) + 294\cdot(0{,}2\sin 30° - 0{,}03\cos 60°)\right] =$$

$$= -866{,}03 - 254{,}61 + 1{,}54\cdot\left[547{,}22 + 24{,}99\right] = -239{,}44 \text{ (Н)}.$$

Знак минус означает, что сила сцепления $\overline{F}_{\text{сц}}$ направлена вверх по наклонной плоскости.

6 *Проверяем выполнение условия качения без проскальзывания.* Для этого подставляем в выражение (3.7) численные значения величин и определяем нормальную реакцию

$$N = 1000\sin 30° + 300\cdot 9{,}8\cos 60° = 647 \text{ (Н)}.$$

Затем вычислим предельное значение силы сцепления

$$F^*_{\text{сц}} = fN = 0{,}2\cdot 647 = 129{,}4 \text{ (Н)}.$$

Таким образом, сила сцепления, вычисленная в результате решения системы, оказалась по модулю выше предельного значения. Значит, колесо катится с проскальзыванием. При этом связь между угловым ускорением тела и ускорением центра масс (3.5) не выполняется.

7 *Определяем ускорения для плоско движущегося тела.* Так как условие качения без проскальзывания не выполняется, то необходимо вернуться к системе динамических уравнений (3.4). В эти уравнения можно подставить выражения для силы тяжести ($G = mg$); момента инерции ($J_C = mi^2$); проекций ускорения центра масс ($a_{Cy} = 0, a_{Cx} = a_C$). Но $\varepsilon \neq \frac{a_C}{r}$.

Воспользуемся тем, что при качении с проскальзыванием модуль силы сцепления определяется по закону Кулона (3.3) $\left|F_{сц}\right| = fN$. Так как ранее определенная сила сцепления отрицательна, то $-F_{сц} = fN$. После подстановки выражений для силы тяжести, силы сцепления, момента инерции и проекций ускорения в (3.4) получаем систему

$$\begin{cases} ma_C = F\cos\beta + mg\sin\alpha - fN, \\ 0 = N - F\sin\beta - mg\cos\alpha, \\ mi^2\varepsilon = FR + fNr - \delta N. \end{cases} \tag{3.9}$$

В этой системе трех уравнений три неизвестные: N, a_C, ε. Из второго уравнения (3.9) следует, что N = 647 Н. Из первого уравнения находим ускорение точки C, а из третьего – угловое ускорение тела:

$$a_C = \frac{F}{m}\cos\beta + g\sin\alpha - f\,\frac{N}{m},$$

$$\varepsilon = \frac{1}{mi^2}\left[FR + N\left(fr - \delta\right)\right]$$

Подставляем известные численные значения

$$a_C = \frac{1000}{300}\cos 30° + 9{,}8\sin 60° - 0{,}2\cdot\frac{647}{300} = 2{,}87 + 8{,}49 - 0{,}43 = 10{,}93\left(\frac{м}{с^2}\right).$$

$$\varepsilon = \frac{1}{300\cdot 0{,}09}\cdot\left[1000\cdot 0{,}4 + 647\cdot(0{,}04 - 0{,}03)\right] = 0{,}037\cdot\left[400 + 6{,}47\right] = 15{,}05\left(\frac{рад}{с^2}\right).$$

Замечание – Если бы качение происходило без проскальзывания, то ускорения a_C и ε следовало бы определять из системы уравнений (3.6).

8 *Определяем скорость точки А.* Для этого необходимо знать скорость точки тела, принятой за полюс. За полюс принят центр масс (точка C). Так как точка C движется прямолинейно, то ее полное ускорение a_C совпадает с касательным. Касательное ускорение точки равно производной по времени от модуля скорости $a_C = a_C^\tau = \dfrac{dv_C}{dt}$. Разделяем переменные и интегрируем в пределах от начального момента времени t = 0 до заданного по условию t_1

$$\int_{v_{C0}}^{v_C(t_1)} dv_C = \int_0^{t_1} a_C dt\,,$$

где v_{C0} – начальная скорость центра масс колеса. Так как по условию задачи в начальный момент времени колесо покоилось, то v_{C0} = 0.

Ранее определенное ускорение a_C не зависит от времени. Значит,

$$v_C(t_1) = a_C t_1 = 10{,}93 \cdot 0{,}4 = 4{,}37 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right).$$

Вектор скорости точки *C* направлен параллельно наклонной плоскости.

Для определения скорости точки *A* необходимо знать также угловую скорость тела в заданный момент времени. Угловое ускорение и угловая скорость связаны между собой следующим образом: $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$. Разделим переменные и проинтегрируем от $t = 0$ до t_1. С учетом того, что начальная угловая скорость тела равна нулю, а угловое ускорение не зависит от времени, для $\omega(t_1)$ находим:

$$\omega(t_1) = \int_0^{t_1} \varepsilon dt = \varepsilon t_1 = 15{,}05 \cdot 0{,}4 = 6{,}02 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right).$$

Теперь можно определить скорость точки *A*. В соответствии с выражением (3.2)

$$\overline{v}_A = \overline{v}_C + \overline{v}_{AC}.$$

Относительная скорость $\overline{v}_{AC}$ равна по модулю произведению угловой скорости на расстояние от точки *A* до центра масс $v_{AC} = \omega AC = \omega R =$ $= 6{,}02 \cdot 0{,}4 = 2{,}41$ (м/с). Вектор относительной скорости направлен перпендикулярно отрезку *AC* (рисунок 3.3).

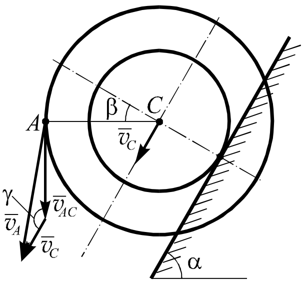

Рисунок 3.3

Векторное суммирование осуществим по правилу треугольника. Для этого путем параллельного переноса совмещаем начало вектора $\overline{v}_C$ с концом вектора $\overline{v}_{AC}$. Тогда вектор скорости $\overline{v}_A$ будет соединять точку *A* с концом вектора $\overline{v}_C$ (см. рисунок 3.3). Модуль скорости $\overline{v}_A$ находим из векторного треугольника по теореме косинусов

$$v_A = \sqrt{v_C^2 + v_{AC}^2 - 2 v_C v_{AC} \cos(180° - \beta)}.$$

Здесь учтено, что угол между векторами $\overline{v}_{AC}$ и $\overline{v}_C$ составляет $180° - \beta$. После подстановки ранее найденных численных значений получаем

$$v_A = \sqrt{4{,}37^2 + 2{,}41^2 + 2 \cdot 4{,}37 \cdot 2{,}41 \cdot \cos 30°} = \sqrt{19{,}1 + 5{,}81 + 18{,}24} = 6{,}57 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right).$$

3.3 Условие задания Д-6

Использование динамических уравнений плоскопараллельного движения

Колесо массой m катится по шероховатой поверхности под действием силы тяжести и активной силы F (рисунок 3.4). Радиусы колеса равны соответственно R и r. Радиус инерции i. Коэффициент сопротивления качению δ, коэффициент трения сцепления f. На основании исходных данных, приведенных в таблице 3.1, определить скорость точки A в момент времени t_1. В начальный момент времени колесо покоилось.

Таблица 3.1 – **Исходные данные к заданию Д-6**

Вариант	m, кг	Радиусы, см			Углы, град		f	δ, см	F, кН	t_1, с
		R	r	i	α	β				
1	250	65	20	40	30	—	0,4	1,5	3,5	0,8
2	370	45	10	20	60	—	0,1	2,5	4	2,5
3	100	65	30	40	30	—	0,5	3	1	2
4	210	60	20	35	45	60	0,15	4	2,2	0,4
5	335	35	25	30	30	—	0,2	3,5	2,8	0,7
6	450	70	15	45	45	30	0,6	5	1,6	1,8
7	300	55	40	50	30	—	0,5	1,5	2,5	0,5
8	420	50	30	40	60	30	0,3	3	2	0,2
9	280	75	25	50	45	—	0,35	1	0,7	1,3
10	400	50	40	45	30	60	0,3	0,9	4,3	0,6
11	300	55	30	45	45	30	0,5	3,5	3,4	2,5
12	350	70	35	50	30	—	0,4	3	4,5	1
13	235	40	20	30	60	30	0,05	2	1,1	1,2
14	360	80	45	60	60	—	0,15	5	2,3	2,4
15	270	65	40	55	30	45	0,4	2	3	0,6
16	190	40	20	30	30	45	0,3	4	1,9	3
17	400	70	25	60	60	—	0,2	3	4,2	1,7
18	160	55	30	40	45	30	0,4	2,5	2,1	2,5
19	315	30	15	25	30	60	0,6	0,8	3,9	0,7
20	380	60	35	50	60	—	0,15	2,6	0,9	2,8
21	120	55	10	30	60	—	0,1	3,5	3,3	0,6
22	100	70	45	55	30	—	0,3	6	0,8	1,5
23	370	65	35	45	45	30	0,4	3,5	4,1	0,9
24	275	75	40	60	60	30	0,6	4,5	2,9	1,2
25	480	30	15	20	30		0,1	2	3,1	2,5
26	150	40	15	25	30	45	0,2	3	1,4	0,5
27	430	45	20	30	45	60	0,35	1,5	3,6	1,4
28	180	35	10	20	60	30	0,2	2,5	1,5	0,8
29	430	70	35	50	30	45	0,45	5	1,7	2,1
30	165	60	30	40	30	60	0,1	1	1,2	1,9

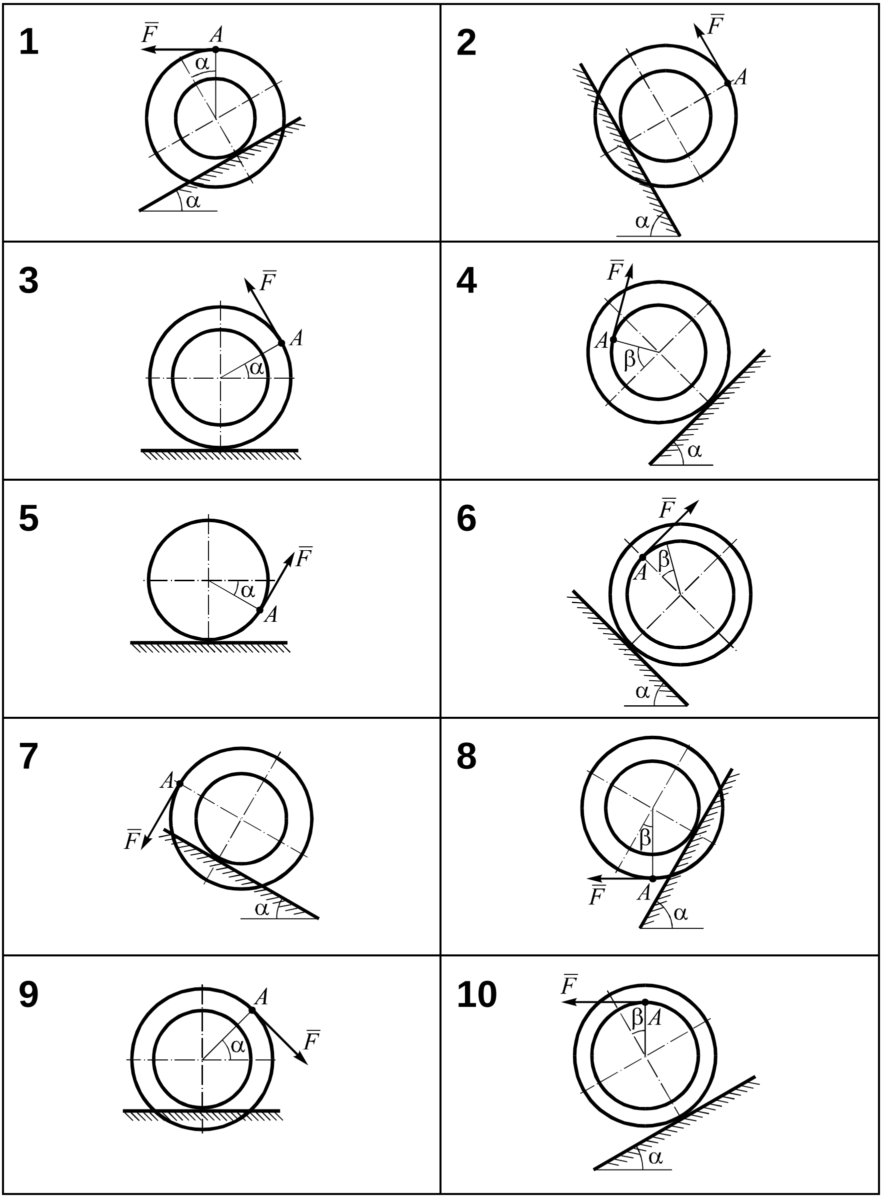

Рисунок 3.4 (начало)

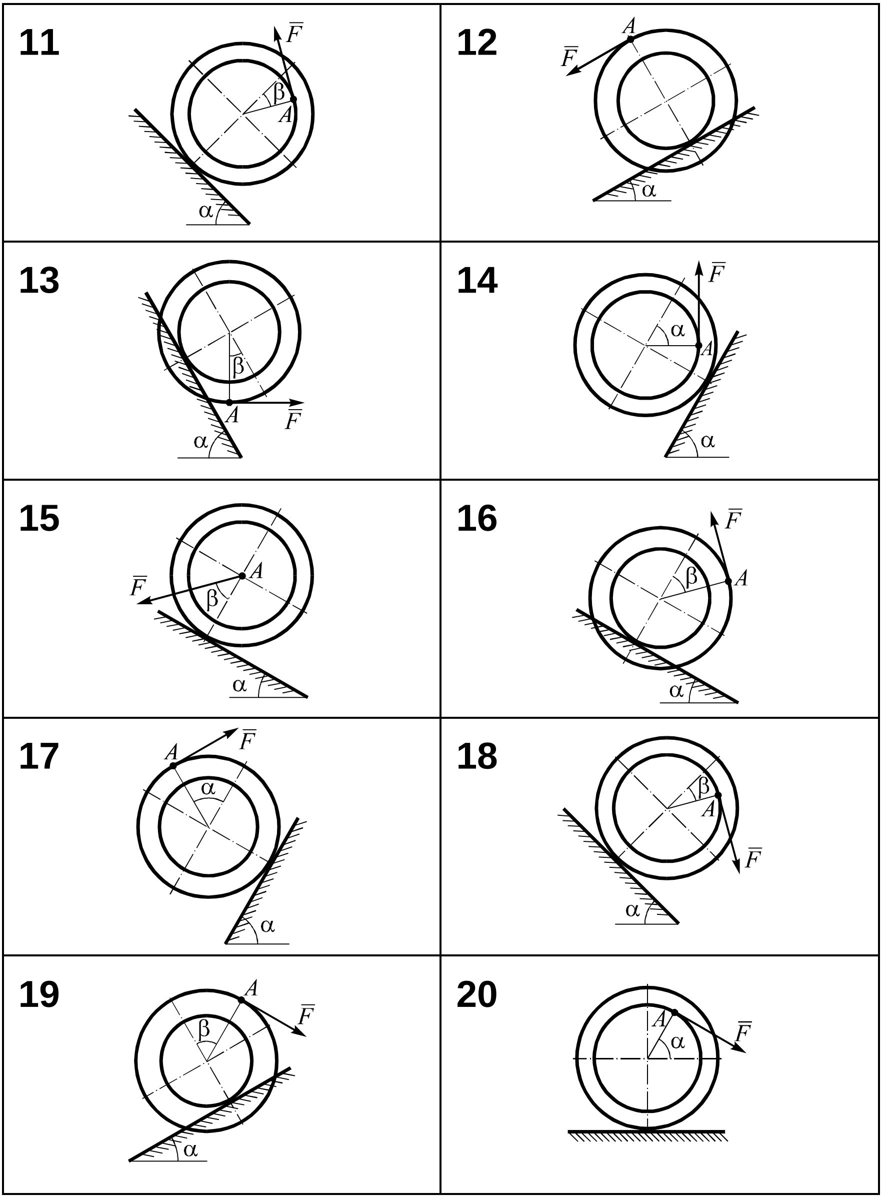

Рисунок 3.4 (продолжение)

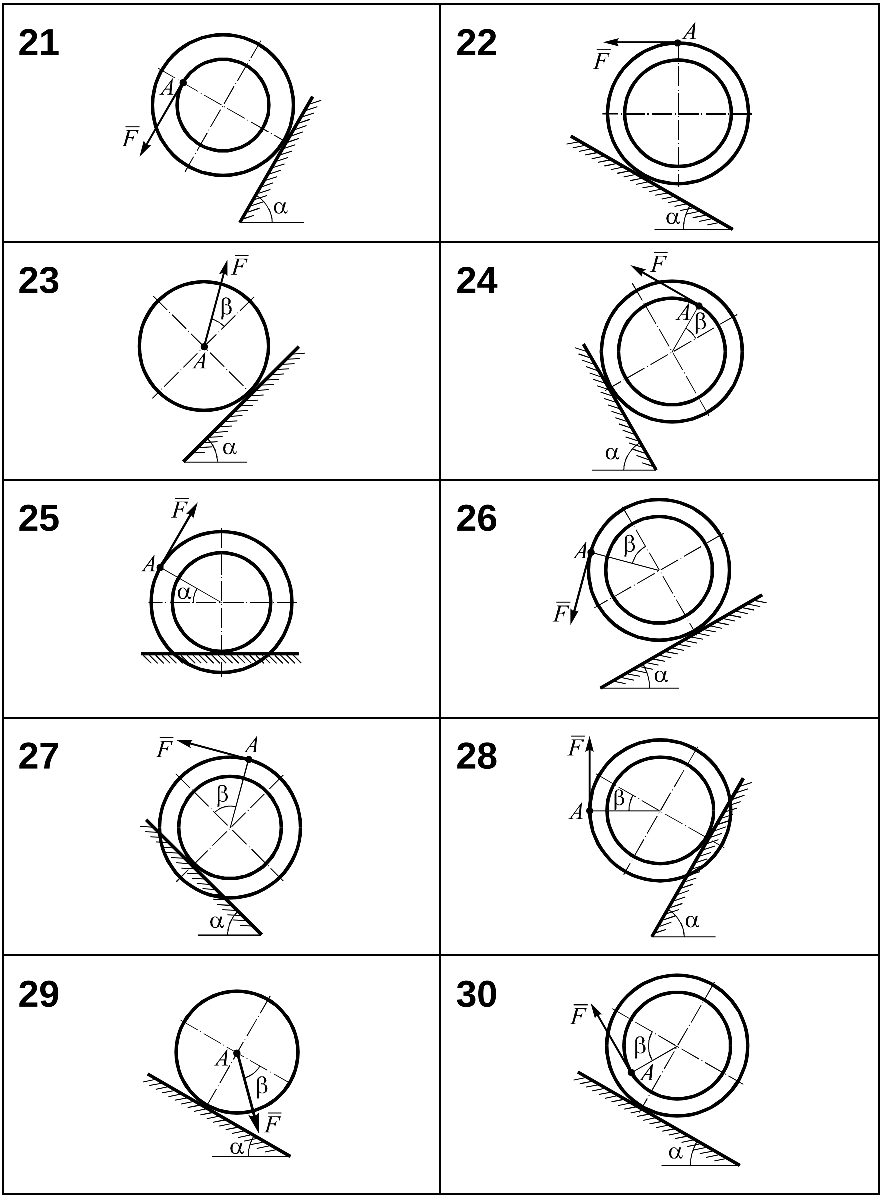

Рисунок 3.4 (окончание)

4 ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

4.1 Некоторые положения теории

4.1.1 Теоремы об изменении количества движения и момента количества движения материальной системы

Количеством движения материальной системы $\overline{Q}$ называют векторную величину, равную геометрической сумме количеств движения всех точек системы,

$$\overline{Q} = \sum m_i \overline{v}_i ,$$

где m_i, v_i – масса и скорость i-й материальной точки соответственно. Количество движения системы можно найти так же, как произведение массы системы на скорость ее центра масс:

$$\overline{Q} = m_\Sigma \overline{v}_C .$$

Для материальной системы выполняется теорема об изменении количества движения. Данная теорема в дифференциальной форме формулируется так: *производная по времени от количества движения системы равна геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил*

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum \overline{F}_j^{\text{внеш}} .$$

Теорема об изменении количества движения системы имеет также интегральную форму: *изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени t_1 равно сумме импульсов, действующих на систему внешних сил за тот же промежуток времени*,

$$\overline{Q} - \overline{Q}_0 = \sum \overline{S}_j^{\text{внеш}} ,$$

где $\overline{S}_j^{\text{внеш}}$ – импульс внешней силы $\overline{F}_j^{\text{внеш}}$ за промежуток времени t_1,

$$\overline{S}_j^{\text{внеш}} = \int_0^{t_1} \overline{F}_j^{\text{внеш}} dt .$$

Главным моментом количества движения (или кинетическим моментом) материальной системы относительно данного центра O называют векторную величину, равную геометрической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно этого центра,

$$\overline{L}_O = \sum \overline{L}_{iO} = \sum \overline{r}_i \times m_i \overline{v}_i ,$$

где $\bar{r}_i$ – радиус-вектор *i*-й точки.

Смысл теоремы об изменении кинетического момента материальной системы состоит в следующем: *производная по времени от кинетического момента системы относительно некоторого центра равна главному моменту внешних сил, действующих на систему, относительно того же центра*

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \sum \bar{M}_{jO}^{\text{внеш}} ,$$

где $\bar{M}_{jO}^{\text{внеш}}$ – вектор момента внешней силы $\bar{F}_j^{\text{внеш}}$ относительно центра *O*,

$$\bar{M}_j^{\text{внеш}} = \bar{r}_j \times \bar{F}_j^{\text{внеш}} ,$$

где $\bar{r}_j$ – радиус-вектор точки приложения внешней силы $\bar{F}_j^{\text{внеш}}$.

4.1.2 Теорема об изменении кинетической энергии материальной системы

Кинетическая энергия материальной системы, состоящей из *n* точек, определяется в результате суммирования их кинетических энергий:

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} .$$

Поскольку при поступательном движении скорости всех точек одинаковы, то кинетическая энергия поступательно движущегося твердого тела равна половине произведения массы тела *m* на квадрат скорости *v* любой его точки:

$$T = \frac{mv^2}{2} .$$

При вращательном движении кинетическую энергию тела можно рассчитать по формуле

$$T = \frac{J_z \omega^2}{2} ,$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси вращения;

ω – угловая скорость.

Плоскопараллельное движение можно представить как комбинацию поступательного движения вместе с центром масс и вращения вокруг центра масс. Поэтому кинетическую энергию плоскопараллельно движущегося тела можно записать в виде

$$T = \frac{m v_C{}^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2},$$

где v_C – скорость центра масс тела;

J_C – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс.

Кинетическая энергия системы, состоящей из нескольких тел, определяется суммированием их кинетических энергий:

$$T = \sum T_i .$$

Для материальной системы справедлива теорема об изменении кинетической энергии: *изменение кинетической энергии материальной системы на перемещении из начального положения в конечное равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на эту систему,*

$$T - T_0 = \sum A_j^{\text{внеш}} + \sum A_j^{\text{внут}} , \qquad (4.1)$$

где T_0, T – кинетическая энергия системы в начальном и конечном положениях соответственно;

$\sum A_j^{\text{внеш}}$ – суммы работ внешних сил и моментов;

$\sum A_j^{\text{внут}}$ – суммы работ внутренних сил и моментов.

Сумма работ внутренних сил не равна нулю, если в процессе движения системы изменяются расстояния между ее взаимодействующими точками. Следовательно, сумма работ внутренних сил, действующих в твердом теле равна нулю. Сумма работ внутренних сил также равна нулю в системе, состоящей из твердых тел и нерастяжимых связей.

Рассмотрим некоторые частные случаи определения работ сил, действующих на тела материальной системы:

1 *Работа силы тяжести тела*. Работа силы тяжести, действующей на тело системы, равна произведению модуля силы тяжести G на вертикальное перемещение h_C центра тяжести тела:

$$A(G) = G h_C .$$

2 *Работа пары сил.* Работа пары сил с постоянным моментом M, действующих на твердое тело, при повороте тела на угол φ

$$A(M) = M\varphi .$$

3 *Работы сил, приложенных к катящемуся телу*. При качении колеса без проскальзывания по неподвижной поверхности мгновенный центр скоростей колеса находится в точке контакта с поверхностью. К этой точке приложены сила сцепления $\overline{F}_{\text{сц}}$ (направленная по касательной к поверхности) и нормальная реакция $\overline{N}$ (направленная перпендикулярно

поверхности). Поскольку МЦС – точка, неподвижная в данный момент времени, то работы сил, приложенных к ней, равны нулю:

$$A(\overline{F}_{\text{сц}}) = A(\overline{N}) = 0 .$$

4.1.3 Порядок решения задач с использованием теоремы об изменении кинетической энергии материальной системы

Решение задач с использованием теоремы об изменении кинетической энергии материальной системы рекомендуется осуществлять по следующей методике:

1 Изображается изучаемая система. Записывается выражение кинетической энергии системы в начальном положении.

2 Определяется конечное положение системы. Если соотношение между скоростями точек системы со временем не изменяется, то ее конечное положение можно не изображать.

3 Определяется кинетическая энергия системы в конечном положении как сумма кинетических энергий отдельных тел. Все скорости, входящие в записанные формулы, выражаются через искомую (заданную) скорость.

4 Определяются работы всех сил, действующих на тела системы на перемещениях точек их приложения.

5 Полученные выражения для кинетических энергий и работ подставляются в формулу (4.1), представляющую теорему об изменении кинетической энергии системы. Из получившегося уравнения определяется скорость v_1 при заданном смещении *s*.

4.2 Пример выполнения задания контрольной работы

Задача

Определить зависимость скорости тела 1 от пройденного пути *s*, если массы тел: $m_1 = 4m$, $m_2 = 3m$, $m_3 = 2m$, $m_4 = 2m$, $m_5 = m$, а радиусы: $r_2 = 0{,}5$ м; $r_3 = 0{,}4$ м; $r_4 = 0{,}4$ м; $r_5 = 0{,}2$ м. Тела 2 – 5 являются однородными дисками. Коэффициент трения скольжения тела 1 по наклонной плоскости $f = 0{,}2$. Углы $\alpha = 30°, \beta = 60°$. К телу 2 приложен вращающий момент $M_{\text{вр}} = mgr_2$. На тело 4 действует момент сил сопротивления $M_{\text{с}} = 2mgr_5$. В начальный момент система находилась в покое.

Р е ш е н и е

1 *Изображаем исследуемую систему (рисунок 4.1) и определяем кинетическую энергию в начальном положении*. По условию задачи в начальном положении система находилась в покое, т. е.

$$T_0 = 0 . \qquad (4.2)$$

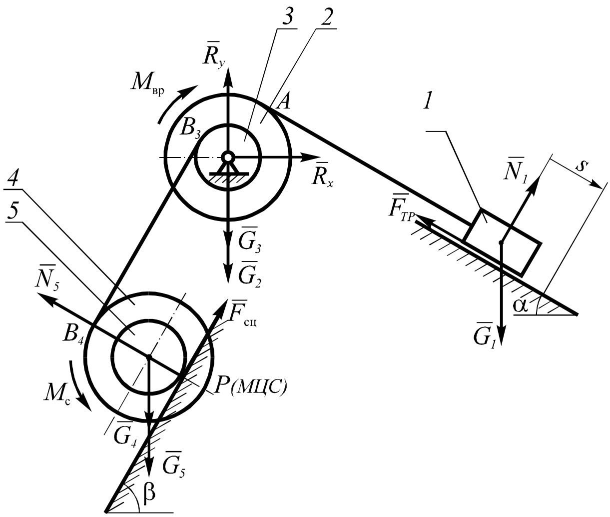

Рисунок 4.1

2 *Определяем конечное положение системы*. Из схемы видно, что соотношения между скоростями точек системы не изменяются в процессе ее движения, поэтому изображение конечного положения системы не требуется.

3 *Определяем кинетическую энергию системы в конечном положении.* Так как система состоит из пяти тел, то

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 ,$$

где T_i – кинетическая энергия i-го тела (i = 1, .., 5).

Определим кинетические энергии каждого тела системы в конечном положении, т. е. в тот момент, когда тело 1 будет иметь скорость v_1.

Тело 1 движется поступательно. Следовательно,

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} .$$

Тело 2 движется вращательно:

$$T_2 = \frac{J_2 \omega_2^2}{2} ,$$

где J_2 – момент инерции тела 2 относительно оси, проходящей через центр масс (точку O);

ω_2 – угловая скорость тела 2.

Тело 2 является однородным диском с масссой m_2 и радиусом r_2, поэтому $J_2 = \frac{1}{2} m_2 r_2^2$. Угловая скорость ω_2 связана со скоростью первого тела. Для определения этой связи воспользуемся методом общей точки. Для тел 1 и 2 общей является точка *A* (см. рисунок 4.1). В силу нерастяжимости нитей скорость точки *A* совпадает со скоростями всех точек поступательно движущегося тела 1, $v_A = v_1$. Так как точка *A* принадлежит вращательно движущемуся телу 2, то $v_A = \omega_2 AO = \omega_2 r_2$. Значит,

$$v_1 = \omega_2 r_2 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{v_1}{r_2}. \tag{4.3}$$

Подставляем полученные выражения в формулу для кинетической энергии второго тела

$$T_2 = \frac{1}{4} m_2 r_2^2 \frac{v_1^2}{r_2^2} = \frac{1}{4} m_2 v_1^2 .$$

Тело 3 движется вращательно:

$$T_3 = \frac{J_3 \omega_3^2}{2}.$$

Так как тело 3 – однородный диск с массой m_3 и радиусом r_3, то $J_3 = \frac{1}{2} m_3 r_3^2$. Тела 2 и 3 жестко связаны между собой. Следовательно, их угловые скорости будут одинаковы: $\omega_3 = \omega_2 = \frac{v_1}{r_2}$. Тогда для кинетической энергии тела 3 можно записать

$$T_3 = \frac{1}{4} m_3 r_3^2 \frac{v_1^2}{r_2^2} = \frac{1}{4} m_3 v_1^2 \left(\frac{r_3}{r_2} \right)^2 .$$

Тело 4 движется плоскопараллельно. Его кинетическая энергия

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 v_C^2 + \frac{1}{2} J_4 \omega_4^2 ,$$

где v_C – скорость центра масс тела 4 (см. рисунок 4.1);

J_4 – момент инерции тела 4 относительно центра масс.

Так как это тело является однородным диском с массой m_4 и радиусом r_4, то $J_4 = \frac{1}{2} m_4 r_4^2$. Поскольку тело 4 движется плоскопараллельно, то скорость его центра масс v_C равна произведению угловой скорости ω_4 на длину отрезка, соединяющего точку C с мгновенным центром скоростей P, $v_C = \omega_4 CP$.

Плоскопараллельно движущиеся тела 4 и 5 жестко связаны. Следовательно, их мгновенные центры скоростей (МЦС) будут совпадать. МЦС тела 5, катящегося без проскальзывания по неподвижной поверхности, находится в точке касания с поверхностью (см. рисунок 4.1). Тогда $CP = r_5$ и

$$v_C = \omega_4 r_5 . \tag{4.4}$$

Для кинетической энергии тела 4 запишем

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 \omega_4^2 r_5^2 + \frac{1}{4} m_4 r_4^2 \omega_4^2 = \frac{1}{2} m_4 \omega_4^2 \left(r_5^2 + \frac{1}{2} r_4^2 \right) = \frac{1}{4} m_4 \omega_4^2 \left(r_4^2 + 2 r_5^5 \right).$$

Угловую скорость ω_4 можно выразить через угловую скорость тела 3. Для этого рассмотрим точки B_3 и B_4 (см. рисунок 4.1). В силу нерастяжимости нитей скорости этих точек равны, т.е. $v_{B_3} = v_{B_4}$. Точка B_3 принадлежит вращательно движущемуся телу 3. Следовательно, $v_{B_3} = \omega_3 B_3 O = \omega_3 r_3$. Точка B_4 принадлежит телу 4, движущемуся плоскопараллельно, $v_{B_4} = \omega_4 B_4 P = \omega_4 (r_4 + r_5)$. Следовательно,

$$\omega_3 r_3 = \omega_4 (r_4 + r_5) \quad \Rightarrow \quad \omega_4 = \omega_3 \frac{r_3}{r_4 + r_5} .$$

Используем ранее установленную связь угловой скорости ω_3 со скоростью первого тела. Тогда

$$\omega_4 = \frac{v_1}{r_2} \frac{r_3}{(r_4 + r_5)} . \tag{4.5}$$

Подставляем данное выражение в формулу для кинетической энергии 4-го тела

$$T_4 = \frac{1}{4} m_4 v_1^2 \frac{r_3^2 \left(r_4^2 + 2 r_5^2 \right)}{r_2^2 (r_4 + r_5)^2} .$$

Тело 5 движется плоскопараллельно:

$$T_5 = \frac{1}{2} m_5 v_C^2 + \frac{1}{2} J_5 \omega_5^2 ,$$

где v_C – скорость центра масс тела 5;

J_5 – момент инерции тела 5 относительно центра масс, $J_5 = \frac{1}{2} m_5 r_5^2$.

Мгновенный центр скоростей тела 5 расположен в точке *P*. Следовательно, $v_C = \omega_5 CP = \omega_5 r_5$. Тогда

$$T_5 = \frac{1}{2} m_5 \omega_5^2 r_5^2 + \frac{1}{4} m_5 r_5^2 \omega_5^2 = \frac{3}{4} m_5 \omega_5^2 r_5^2 .$$

Так как тела 4 и 5 жестко соединены, то их угловые скорости будут равны между собой:

$$\omega_5 = \omega_4 = v_1 \frac{r_3}{r_2 (r_4 + r_5)} .$$

Тогда

$$T_5 = \frac{3}{4} m_5 v_1^2 \left(\frac{r_3 r_5}{r_2 (r_4 + r_5)} \right)^2 .$$

Суммируя полученные выражения для кинетических энергий тел системы в конечном положении, получаем

$$T = \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{4} v_1^2 + \frac{m_3}{4} v_1^2 \left(\frac{r_3}{r_2} \right)^2 + \frac{m_4}{4} v_1^2 \frac{r_3^2 \left(r_4^2 + 2 r_5^2 \right)}{r_2^2 (r_4 + r_5)^2} +$$

$$+ \frac{3}{4} m_5 v_1^2 \left(\frac{r_3 r_5}{r_2 (r_4 + r_5)} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m v_1^2 \left[4 + \frac{3}{2} + \left(\frac{r_3}{r_2} \right)^2 + \frac{r_3^2 \left(r_4^2 + 2 r_5^2 \right)}{r_2^2 (r_4 + r_5)^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{r_3 r_5}{r_2 (r_4 + r_5)} \right)^2 \right].$$

Подставляем известные численные значения радиусов и производим вычисления:

$$T = 0{,}5 m v_1^2 \left[4 + 1{,}5 + \left(\frac{0{,}4}{0{,}5} \right)^2 + \frac{0{,}16(0{,}16 + 0{,}08)}{0{,}25 \cdot 0{,}6^2} + 1{,}5 \left(\frac{0{,}4 \cdot 0{,}2}{0{,}5 \cdot 0{,}6} \right)^2 \right] = \tag{4.6}$$

$$= 0{,}5 m v_1^2 \left[5{,}5 + 0{,}64 + 0{,}43 + 0{,}11 \right] = 3{,}34 m v_1^2 .$$

4 *Определяем сумму работ внутренних и внешних сил, действующих на систему*. Так как система состоит из абсолютно твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями и стержнями, то сумма работ внутренних сил

$$\sum A_j^{\text{внут}} = 0 . \tag{4.7}$$

На систему действуют следующие внешние силы: силы тяжести $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \overline{G}_3, \overline{G}_4, \overline{G}_5$; сила трения скольжения $\overline{F}_{тр}$; сила сцепления колеса 5 с поверхностью $\overline{F}_{сц}$; нормальные реакции $\overline{N}_1$, $\overline{N}_5$; компоненты реакции цилиндрического шарнира $\overline{R}_x$, $\overline{R}_y$; пары сил с моментами $M_{вр}$ и $M_с$. Значит,

$$\sum A_j^{внеш} = A(\overline{G}_1) + A(\overline{F}_{тр}) + A(\overline{N}_1) + A(\overline{R}_x) + A(\overline{R}_y) + A(\overline{G}_2) + A(\overline{G}_3) +$$
$$+ A(M_{вр}) + A(\overline{G}_4) + A(\overline{G}_5) + A(\overline{N}_5) + A(M_с) + A(\overline{F}_{сц}).$$

Так как сила нормальной реакции $\overline{N}_1$ направлена перпендикулярно смещению точки своего приложения, то работа этой силы $A(\overline{N}_1) = 0$. Силы $\overline{R}_x, \overline{R}_y, \overline{G}_2, \overline{G}_3$ приложены к неподвижной точке *O*. Следовательно, эти силы не совершают работы при движении системы $A(\overline{R}_x) = A(\overline{R}_y) = A(\overline{G}_2) = A(\overline{G}_3) = 0$. Так как сила сцепления $\overline{F}_{сц}$ и нормальная реакция $\overline{N}_5$ приложены к мгновенному центру скоростей тела 5, то работы этих сил равны нулю $A(\overline{F}_{сц}) = A(\overline{N}_5) = 0$. Таким образом, для суммы работ внешних сил можно записать

$$\sum A_j^{внеш} = A(\overline{G}_1) + A(\overline{F}_{тр}) + A(M_{вр}) + A(\overline{G}_4) + A(\overline{G}_5) + A(M_с) .$$

Работа силы тяжести $\overline{G}_1$ определяется следующим образом: $A(\overline{G}_1) = G_1 h_1$. Здесь h_1 – изменение вертикальной координаты центра масс первого тела. Если тело 1 прошло по наклонной плоскости путь *s*, то $h_1 = s \sin\alpha$. Тогда

$$A(\overline{G}_1) = m_1 g s \sin\alpha .$$

Сила трения скольжения $\overline{F}_{тр}$ направлена противоположно вектору смещения точки своего приложения. Следовательно,

$$A(\overline{F}_{тр}) = -F_{тр} s .$$

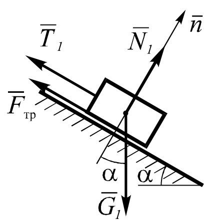

Рисунок 4.2

В соответствии с законом Кулона для силы трения скольжения $F_{тр} = fN_1$. Для определения нормальной реакции N_1 спроецируем все силы, действующие на тело 1, на ось $\overline{n}$ (рисунок 4.2):

$$\sum_i F_{in} = N_1 - G_1 \cos\alpha .$$

Так как тело 1 движется вдоль наклонной плоскости, то проекции ускорений его точек на ось $\overline{n}$ равны нулю. Следовательно, $\sum F_{in} = 0$.

Таким образом, $N_1 - G_1 \cos\alpha = 0$. Значит $N_1 = m_1 g \cos\alpha$. Тогда для работы силы трения получаем

$$A(\overline{F}_{\text{тр}}) = -fN_1 s = -fm_1 gs\cos\alpha .$$

Работа пары сил с моментом $M_{\text{вр}}$, действующих на вращательно движущееся тело 2,

$$A(M_{\text{вр}}) = M_{\text{вр}}\varphi_2 .$$

Здесь φ_2 – угол, на который повернется тело 2, если тело 1 пройдет путь s. Смещения звеньев механизма связаны между собой так же, как и соответствующие им скорости. Значит, воспользовавшись соотношением (4.3), можно определить связь между величинами φ_2 и s: $\varphi_2 = \dfrac{s}{r_2}$. Тогда

$$A(M_{\text{вр}}) = M_{\text{вр}} \frac{s}{r_2} .$$

Сила тяжести $\overline{G}_4$ приложена к центру масс тела 4 – точке C. Для работы этой силы можно записать

$$A(\overline{G}_4) = -G_4 h_C ,$$

где h_C — изменение вертикальной координаты точки C.

При движении системы точка C поднимается, т. е. движется против действия силы тяжести. В связи с этим работа силы тяжести отрицательна. Если центр масс тела 4 прошел по наклонной плоскости путь s_C, то $h_C = s_C \sin\beta$. Для установления зависимости s_C от перемещения s определяем связь между скоростями v_C и v_1. Воспользовавшись соотношениями (4.4) и (4.5), можно записать $v_C = v_1 \dfrac{r_3 r_5}{r_2(r_4 + r_5)}$. Следовательно, $s_C = s\dfrac{r_3 r_5}{r_2(r_4 + r_5)}$. Тогда для работы силы тяжести $\overline{G}_4$ запишем

$$A(\overline{G}_4) = -G_4 h_C = -m_4 g s_C \sin\beta = -m_4 gs\sin\beta \frac{r_3 r_5}{r_2(r_4 + r_5)} .$$

Так как сила тяжести $\overline{G}_5$ приложена к точке C, то

$$A(\overline{G}_5) = -m_5 gs\sin\beta \frac{r_3 r_5}{r_2(r_4 + r_5)} .$$

Работу пары сил с моментом M_c определяем по углу поворота φ_4 тела 4

$$A(M_c) = -M_c \varphi_4 .$$

Здесь учтено, что M_c – момент сопротивления и направлен противоположно направлению вращения тела 4. Следовательно, работа момента будет отрицательной.

Связь угла поворота φ_4 со смещением s можно определить, воспользовавшись соотношением (4.3),

$$\varphi_4 = s \frac{r_3}{r_2 (r_4 + r_5)} .$$

Тогда

$$A(M_c) = -M_c s \frac{r_3}{r_2 (r_4 + r_5)} .$$

Просуммируем работы внешних сил

$$\sum A_j^{\text{внеш}} = m_1 g s \sin\alpha - f m_1 g s \cos\alpha + M_{\text{вр}} s \frac{1}{r_2} -$$

$$-(m_4 + m_5) g s \sin\beta \frac{r_3 r_5}{r_2 (r_4 + r_5)} - M_c s \frac{r_3}{r_2 (r_4 + r_5)}.$$

Используем выражения для моментов пар сил и масс тел

$$\sum A_j^{\text{внеш}} = mgs \left[4\sin\alpha - 4f\cos\alpha + 1 - 3\sin\beta \frac{r_3 r_5}{r_2 (r_4 + r_5)} - 2\frac{r_3 r_5}{r_2 (r_4 + r_5)} \right].$$

После подстановки известных численных значений радиусов и углов получаем

$$\sum A_j^{\text{внеш}} = 9{,}8ms \left[4\sin 30^\circ - 4 \cdot 0{,}2\cos 30^\circ + 1 - (3\sin 60^\circ + 2) \cdot \frac{0{,}4 \cdot 0{,}2}{0{,}5 \cdot 0{,}9} \right] = \quad (4.8)$$

$$= 10{,}68ms .$$

5 *Подставляем полученные выражения для кинетических энергий и работ в формулировку теоремы об изменении кинетической энергии системы*. Теорема об изменении кинетической энергии материальной системы записывается следующим образом:

$$T - T_0 = \sum A_j^{\text{внеш}} + \sum A_j^{\text{внут}} .$$

После подстановки ранее выведенных соотношений (4.2), (4.6) – (4.8) получим

$$3{,}34 m v_1^2 = 10{,}68ms .$$

Из последнего равенства выражаем искомую скорость

$$v_1 = \sqrt{\frac{10{,}68}{3{,}34} s} = 1{,}79\sqrt{s}\ .$$

4.3 Условие задания Д-7

Использование теоремы об изменении кинетической энергии материальной системы

На основании исходных данных, приведенных в таблице 4.1, определить зависимость скорости тела 1 (рисунок 4.3) от пройденного пути *s*. Массы тел 1, 2, 3, 4 равны соответственно m_1, m_2, m_3, m_4, а радиусы – r_1, r_2, r_3, r_4. Массы непронумерованных тел не учитывать. Коэффициент трения скольжения тел по наклонной плоскости равен *f*. К вращающимся телам приложены либо вращающие моменты $M_{вр}$, либо моменты сопротивления $M_с$. Шкивы и катки считать сплошными однородными цилиндрами. В начальный момент система находилась в покое.

Таблица 4.1 – **Исходные данные к заданию Д-7**

Вариант	Массы тел				Радиусы валов, см			Моменты, Н·м		*f*	α, град
	m_1	m_2	m_3	m_4	R_2	r_3	r_4	$M_{вр}$	$M_с$		
1	$3m$	$3m$	m	—	30	15	—	—	mgr_2		
2	$2m$	$2m$	m	$2m$	40	10	30	mgr_2	—	0,3	60
3	$5m$	m	$2m$	m	10	20	15	—	mgr_4	—	45
4	$4m$	m	$3m$	m	20	15	—	mgr_3	—	0,1	30
5	$3m$	$2m$	m	$2m$	40	20	20	$2mgr_2$	—	—	—
6	$5m$	m	m	$2m$	15	20	30	—	mgr_4	0,2	45
7	$5m$	m	$2m$	m	20	40	10	—	$2mgr_4$	0,1	60
8	$2m$	$3m$	m	m	15	30	10	—	$3mgr_4$	—	—
9	$3m$	m	$2m$	$2m$	10	20	10	mgr_3	mgr_4	—	45
10	$6m$	m	$2m$	$3m$	15	20	20	—	mgr_4	0,3	60
11	$2m$	$3m$	$2m$	m	40	30	10	—	mgr_4	0,1	60
12	$3m$	m	m	$2m$	20	20	30	—	mgr_3	—	—

О к о н ч а н и е т а б л и ц ы 4.1

Вариант	Массы тел				Радиусы валов, см			Моменты, Н·м		f	α, град
	m_1	m_2	m_3	m_4	r_2	r_3	r_4	$M_{вр}$	$M_с$		
13	$4m$	$2m$	$3m$	$2m$	30	40	25	—	$2mgr_4$	0,2	30
14	$5m$	m	$2m$	$2m$	25	30	30	$2mgr_3$	mgr_4	—	—
15	$6m$	m	$3m$	$2m$	20	40	20	$2mgr_2$	—	0,1	30
16	$2m$	$4m$	$2m$	m	40	15	65	—	$2mgr_4$	—	—
17	$3m$	$2m$	$3m$	m	30	40	25	—	mgr_4	0,3	45
18	$4m$	m	$3m$	$2m$	20	40	30	mgr_3	—	0,2	60
19	$2m$	$2m$	$2m$	$3m$	20	30	40	$3mgr_2$	—	—	—
20	$4m$	$2m$	$3m$	$2m$	35	50	20	—	mgr_4	—	—
21	$6m$	$2m$	$2m$	m	60	40	30	—	mgr_3	—	60
22	M	$3m$	$2m$	$2m$	40	50	20	—	$2mgr_4$	—	—
23	$3m$	$3m$	$4m$	$2m$	30	40	30	—	mgr_4	—	—
24	$4m$	m	$2m$	$3m$	10	20	30	—	mgr_4	0,2	45
25	$2m$	$3m$	$4m$	$2m$	25	30	20	—	$3mgr_4$	—	—
26	$3m$	m	$2m$	$5m$	30	50	20	mgr_3	—	—	60
27	$6m$	$2m$	m	$3m$	40	15	30	—	$2mgr_3$	0,1	30
28	$5m$	m	$2m$	m	30	40	—	mgr_2	—	0,2	60
29	$7m$	$3m$	$2m$	$3m$	50	30	—	—	mgr_2	0,3	60
30	$6m$	m	$2m$	$2m$	20	40	15	—	mgr_4	—	45

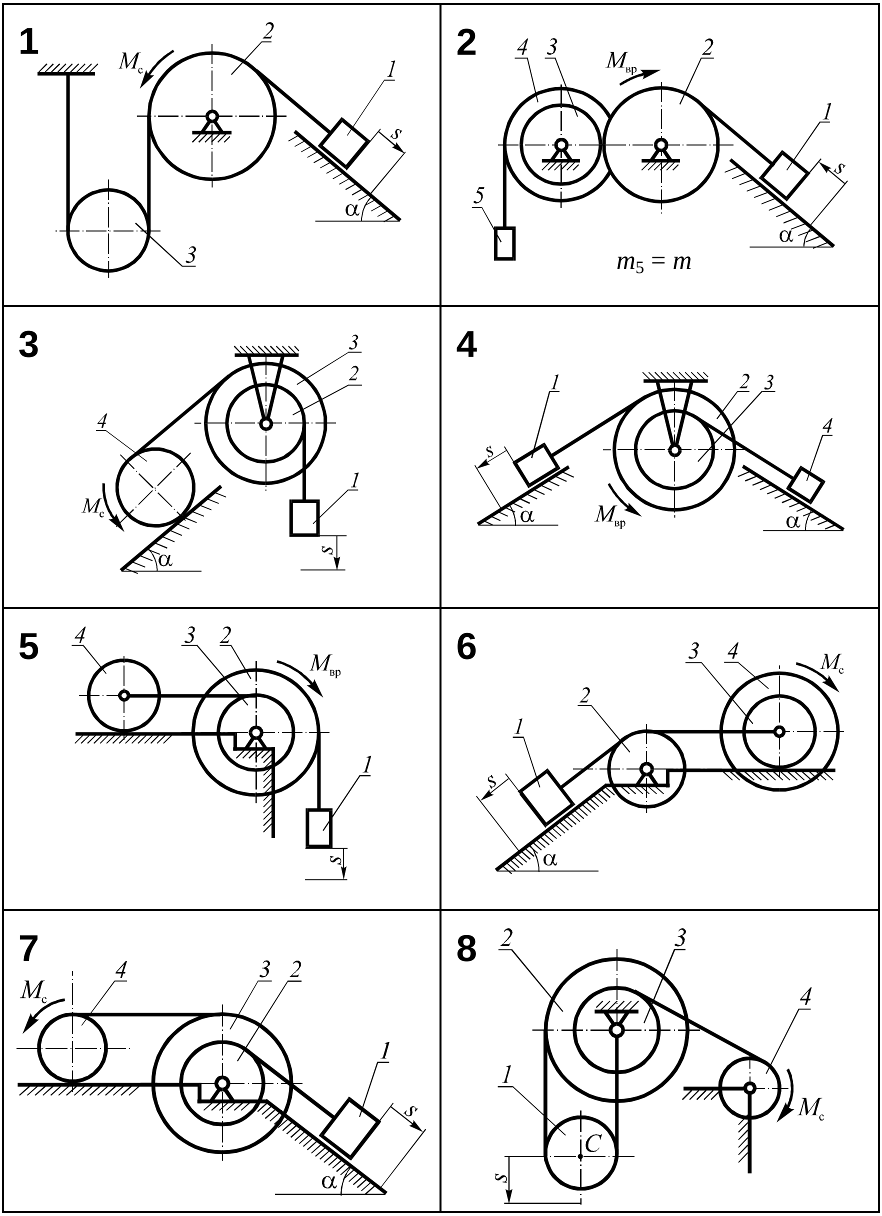

Рисунок 4.3 (начало)

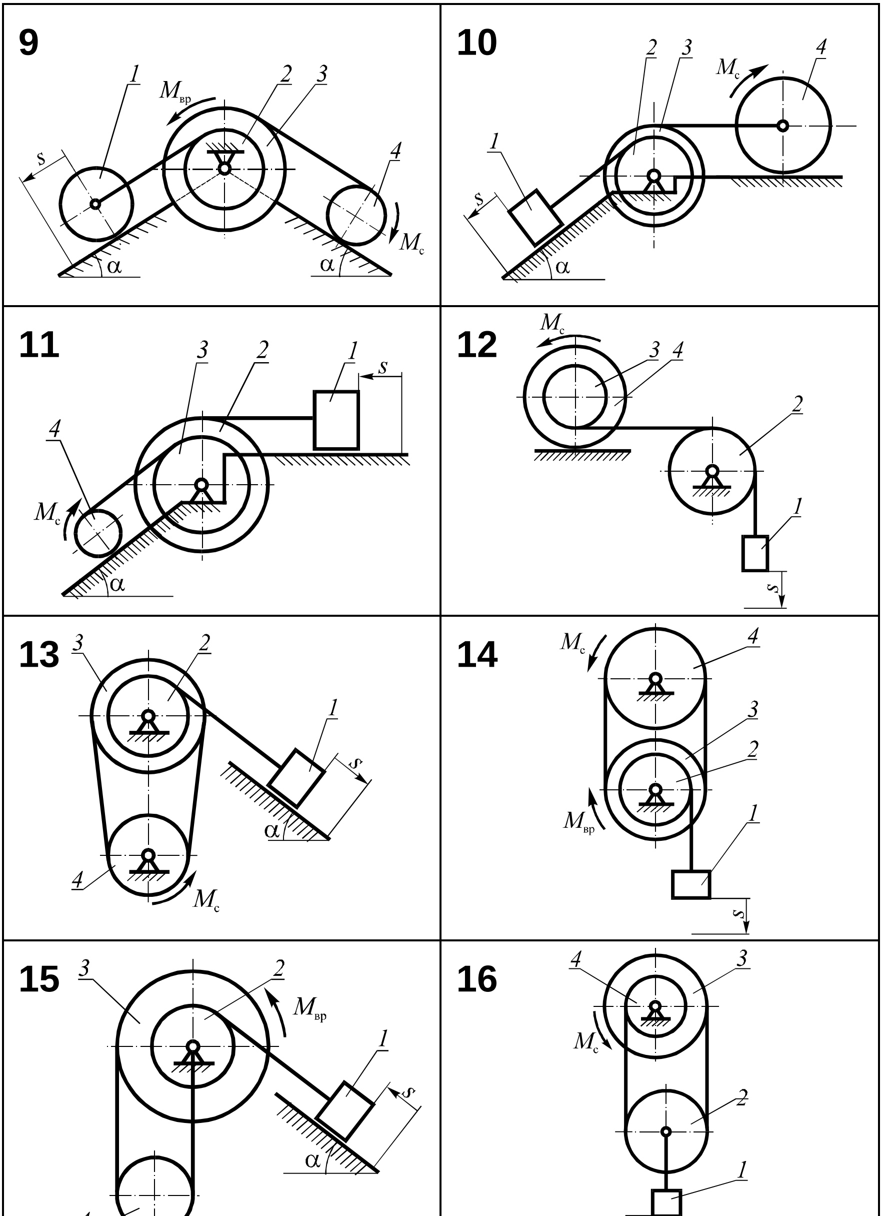

Рисунок 4.3 (продолжение)

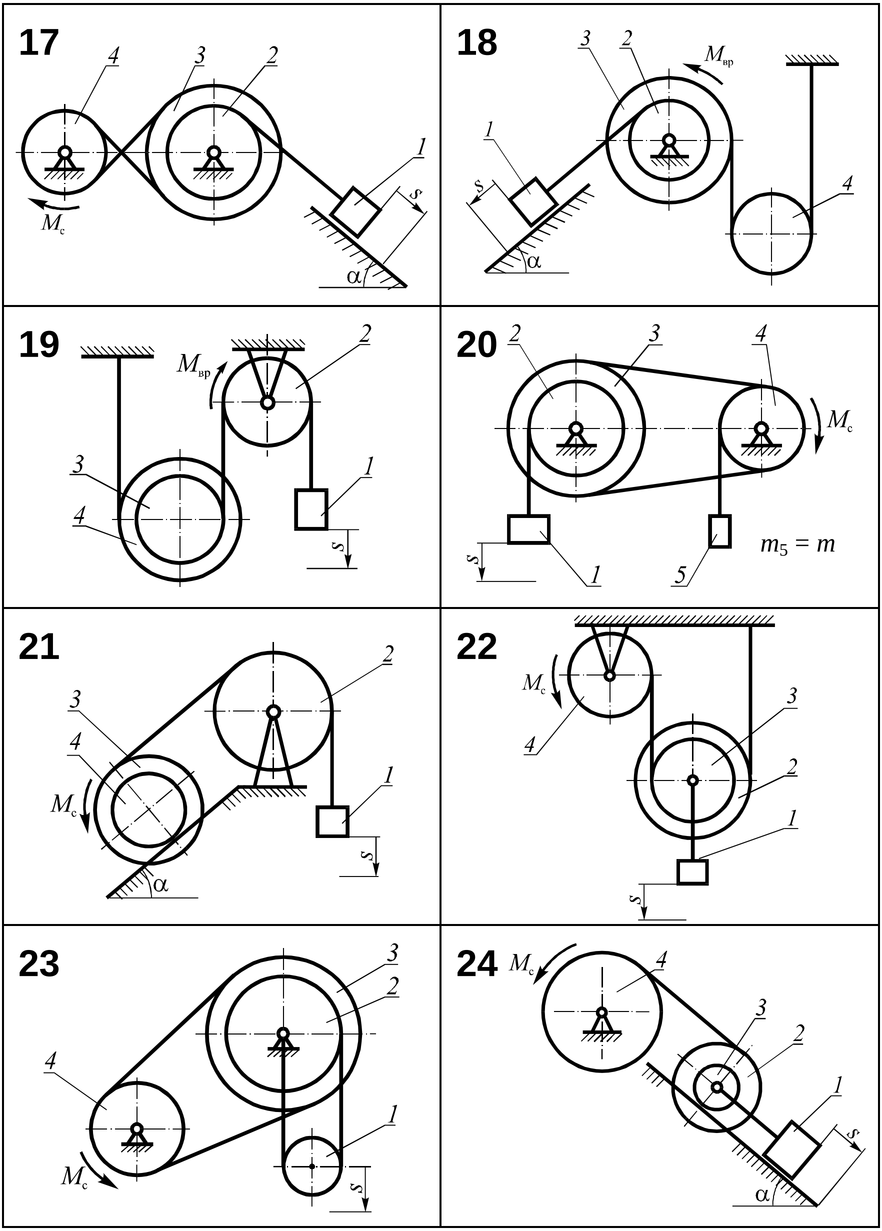

Рисунок 4.3 (продолжение)

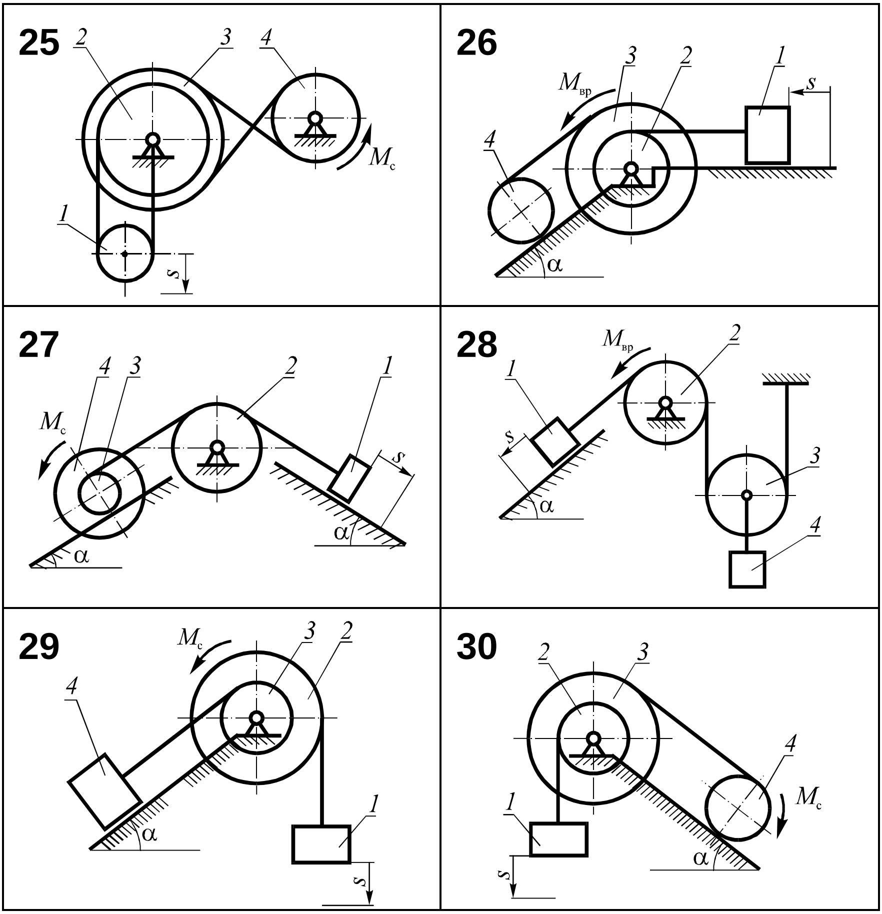

Рисунок 4.3 (окончание)

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Ефремова, З. Г.** Теоретическая механика. Раздел «Динамика материальной точки» (Обзор материала и задания для контрольных работ): пособие для студентов технических специальностей / З. Г. Ефремова, Д. А. Черноус, О. С. Коломникова. – Гомель: УО «БелГУТ», 2005. – 49 с.

2 **Бутенин, Н. В.** Курс теоретической механики / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – СПб.: Изд-во. «Лань», 1998. – 736 с.

3 **Тарг, С. М.** Краткий курс теоретической механики / С. М. Тарг. – М.: Высшая школа, 1995. – 416 с.

4 **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 2. Динамика / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – М.: Наука, 1990. – 670 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
(*справочное*)

Программа курса «Теоретическая механика»

1 Механическое движение как одна из форм движения материи. Предмет механики – изучение механического движения и механического взаимодействия материальных тел. Объективный характер законов механики. Значение теоретической механики как научной базы большинства областей современной техники. Связь механики с производством и ее роль в решении народнохозяйственных задач. Значение механики для специалистов данного профиля. Основные исторические этапы развития механики.

2 Основные понятия механики: абсолютно твердое тело, сила, эквивалентные и уравновешенные системы сил, равнодействующая, силы внешние и внутренние. Связи и реакции связей. Трение скольжения при покое (сцепление) и при движении. Законы трения скольжения. Реакция шероховатой поверхности.

3 Предмет статики. Аксиомы статики. Геометрический и аналитический способы сложения сил. Проекция силы на ось и на плоскость. Равнодействующая сходящихся сил. Геометрическое и аналитические условия равновесия сходящихся сил.

4 Момент силы относительно центра. Свойства момента. Момент силы относительно центра как вектор. Момент силы относительно оси. Зависимость между моментами силы относительно центра и относительно оси, проходящей через этот центр.

5 Понятие о паре сил. Момент пары сил. Момент пары сил как вектор. Теорема о сумме моментов пары сил относительно центра. Теоремы об эквивалентности пар. Сложение пар сил, расположенных в плоскости и пространстве. Условия равновесия пар сил.

6 Приведение силы и системы сил к данному центру. Метод Пуансо и основная теорема статики. Главный вектор и главный момент системы сил. Частные случаи приведения системы сил. Статически определимые и статически неопределимые системы. Условия равновесия тел, находящихся под действием различных систем сил. Равновесие системы тел.

7 Приведение системы параллельных сил к равнодействующей. Центр параллельных сил, его радиус-вектор и координаты. Центр тяжести твердого тела; центр тяжести объема, площади и линии. Способы определения положения центров тяжести тел.

8 Предмет кинематики. Относительность механического движения. Система отсчета. Задачи кинематики.

9 Кинематика простого движения точки. Векторный, координатный и естественный способ задания движения точки. Траектория точки. Связь между различными способами задания движения. Скорость точки при векторном, координатном (декартовы координаты) и естественном способах задания движения. Ускорение точки при векторном, координатном и естественном способах задания движения. Касательное и нормальное ускорения точки. Частные случаи движения точки.

10 Простейшие движения твердого тела. Понятие числа степеней свободы твердого тела. Поступательное движение твердого тела. Теорема о траекториях, скоростях и ускорениях точек твердого тела при поступательном движении. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Уравнение вращательного движения тела. Угловая скорость и угловое ускорение тела. Скорость и ускорение точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Векторы угловой скорости и углового ускорения тела.

11 Кинематика сложного движения точки. Абсолютное и относительное движения точки; переносное движение. Теорема о сложении скоростей. Теорема Кориолиса о сложении ускорений; определение кориолисова ускорения.

12 Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела и движение плоской фигуры в ее плоскости. Уравнения движения плоской фигуры. Разложение движения плоской фигуры на поступательное вместе с полюсом и вращательное вокруг полюса. Определение скорости любой точки фигуры как геометрической суммы скорости полюса и скорости этой точки при вращении фигуры вокруг полюса. Теорема о проекциях скоростей двух точек фигуры. Мгновенный центр скоростей; определение с его помощью скоростей точек плоской фигуры. Определение ускорения любой точки плоской фигуры как геометрической суммы ускорения полюса и ускорения этой точки при вращении фигуры вокруг полюса.

13 Основные понятия и определения: масса, материальная точка, сила, постоянные и переменные силы. Законы классической механики или законы Галилея – Ньютона. Инерциальная система отсчета. Задачи динамики.

14 Дифференциальные уравнения движения материальной точки в декартовых прямоугольных координатах и в проекциях на оси естественного трехгранника. Две основные задачи динамики для материальной точки, их решение.

15 Механическая система. Масса системы. Центр масс системы и его координаты. Классификация сил, действующих на механическую систему: силы внешние и внутренние, задаваемые (активные) силы и реакции связей. Свойства внутренних сил.

16 Общие теоремы динамики системы. Дифференциальные уравнения движения механической системы. Теорема о движении центра масс системы.

Закон сохранения движения центра масс. Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела.

17 Количество движения механической системы; его выражение через массу системы и скорость центра масс. Теорема об изменении количества движения системы в дифференциальной и конечной формах. Закон сохранения количества движения системы.

18 Главный момент количества движения механической системы относительно центра и оси. Кинетический момент вращающегося твердого тела относительно оси вращения. Теорема об изменении кинетического момента системы. Закон сохранения кинетического момента. Дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

19 Моменты инерции системы и твердого тела относительно оси и полюса. Радиус инерции. Теорема о моментах инерции относительно параллельных осей. Осевые моменты инерции некоторых однородных тел: стержень, полый и сплошной цилиндры, шар.

20 Кинетическая энергия механической системы. Вычисление кинетической энергии твердого тела в различных случаях его движения. Работа и мощность сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси. Равенство нулю суммы работ внутренних сил, действующих в твердом теле или в неизменяемой механической системе. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы. Закон сохранения механической энергии системы при действии на нее потенциальных сил.

21 Принцип Даламбера для материальной точки; сила инерции. Принцип Даламбера для механической системы. Главный вектор и главный момент сил инерции. Определение с помощью принципа Даламбера динамических реакций при движении точки и механической системы.

22 Возможные или виртуальные перемещения системы. Число степеней свободы системы. Идеальные связи. Принцип возможных перемещений. Принцип Даламбера – Лагранжа; общее уравнение динамики системы.

23 Малые колебания механической системы, с одной степенью свободы около положения устойчивого равновесия: свободные незатухающие колебания и их свойства; частота и период колебаний; амплитуды и фазы колебаний; свободные затухающие колебания при сопротивлении, пропорциональном скорости; период и декремент этих колебаний; случай апериодического движения; вынужденные колебания при гармонической вынуждающей силе и сопротивлении, пропорциональном скорости; коэффициент динамичности, резонанс.

24 Колебания систем с несколькими степенями свободы. Свободные и собственные колебания.

Учебное издание

ЧЕРНОУС Дмитрий Анатольевич

КОЛОМНИКОВА Оксана Сергеевна

Теоретическая механика. Раздел «Динамика материальной системы»
(Обзор материала и задания для контрольных работ)
Учебно-методическое пособие для студентов технических специальностей

Редактор *Т. М. Ризевская*
Технический редактор *В. Н. Кучерова*
Корректор *М. П. Дежко*

Подписано в печать 15.11.2006 г. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать на ризографе.
Усл. печ. л.3,72. Уч.-изд. л. 3,41. Тираж 500 экз.
Зак. № . Изд. № 4251.

Издатель и полиграфическое исполнение
Белорусский государственный университет транспорта:
ЛИ № 02330/0133394 от 19.07.2004 г.
ЛП № 02330/0148780 от 30.04.2004 г.
246053, г. Гомель, ул. Кирова, 34