

НОВЫЕ МАТЕРИАЛЫ И ТЕХНОЛОГИИ

УДК 621.534.833.886.6

С. В. ЕЛИСЕЕВ, доктор технических наук, А. И. АРТЮНИН, доктор технических наук, Иркутский государственный университет путей сообщения, Российская Федерация

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТА ЗАСТРЕВАНИЯ МАЯТНИКОВ НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ РОТОРЕ

Приведены результаты исследования нового эффекта при движении жесткого ротора в упругих опорах с четырьмя автобалансирами маятникового типа, при котором ротор вращается с рабочей скоростью, а маятники – с частотой вращения, равной одной из двух критических скоростей ротора, обусловленных, соответственно, его линейными или угловыми движениями. Предложена методика построения математической модели для системы с восьмью степенями свободы. Обсуждаются особенности динамических взаимодействий между парциальными системами, принимающими определенные формы самоорганизации движений группы свободно подвешенных маятников.

Ключевые слова: автоматическая балансировка, маятниковые балансиры, критические скорости, динамика роторных систем.

Введение. В механике хорошо известны случаи, когда вибрационное воздействие на механические системы приводит к особым режимам движения, называемым механическими эффектами. Как правило, в состав таких механических систем входят механизмы, содержащие основание на упругих опорах, маятники, вращающиеся роторы. К числу таких режимов, в частности, может быть отнесен эффект Зоммертельда [1], в котором наблюдается «застревание» двигателя с неуравновешенным ротором на угловых скоростях вблизи резонансных частот колебаний двигателя на упругих опорах. Другие примеры связаны с явлениями устойчивости маятника в его верхнем положении при определенных частотах и амплитудах колебаний оси его подвеса [2]; самосинхронизации маятников на общем упругоустановленном основании [3]; явление захватывания и вибрационного поддержания вращения неуравновешенного ротора, установленного на вибрирующем основании [4].

I Общие положения. Постановка задачи исследования. К механическим эффектам можно отнести новое явление «застревания», обнаруженное одним из авторов [4] при экспериментальных исследованиях возможностей автоматической балансировки жестких роторов на упругих опорах с помощью вращающихся маятников. Исследования проводились не только для ротора со статической неуравновешенностью и двумя маятниками, но и для ротора, имеющего статическую и моментную неуравновешенности, снабженного четырьмя маятниками, попарно установленными на валу ротора с обеих его сторон. Установлено (например, во втором случае), что при определенном соотношении между моментами сил сопротивления в опорах маятников, расположенных на горизонтальном роторе с возможностью свободного вращения, и их статическими моментами, имеет место такой режим движения, когда ротор вращается с заданной угловой скоростью, а угловая скорость вращения маятников близка

или совпадает с одной из критических скоростей ротора. Угловые скорости маятников и ротора в эксперименте измерялись с помощью стробоскопического тахометра и фотодатчиков. Причем, если ротор вращается с заданной угловой скоростью, а угловая скорость маятников близка к первой критической скорости, на которой преобладают линейные колебания ротора, то все четыре маятника направлены в одну сторону. Когда же маятники вращаются с угловой скоростью, близкой ко второй критической скорости ротора, на которой происходят в основном угловые колебания маятника, то маятники в разных парах направлены при движении противоположно друг другу, образуя вращающуюся пару. И в том, и в другом случаях амплитуды и реакции в опорах ротора значительно возрастают, вынужденные колебания происходят с наложением заданных частот вращения ротора и частот, соответствующих первой или второй критической скорости вращения ротора.

Целью настоящей работы является обнаружение эффекта «застревания» маятников при механико-математическом моделировании динамики разгона и стационарного вращения ротора со статической неуравновешенностью и двумя маятниками и ротора, имеющего статическую и моментную неуравновешенность с четырьмя маятниками.

II. Построение математической модели. Динамическая модель ротора со статической неуравновешенностью и двумя маятниками приведена на рисунке 1. Предполагается, что горизонтальный ротор, состоящий из жесткого вала и диска, расположен симметрично относительно своих опор. Опоры изотропны и имеют одинаковую жесткость. На валу симметрично установлены с возможностью свободного вращения два маятника. Для описания движения использовались координаты: y, z – перемещение центра симметрии диска от положения статического равновесия, φ_1, φ_2 – углы поворота маятников.

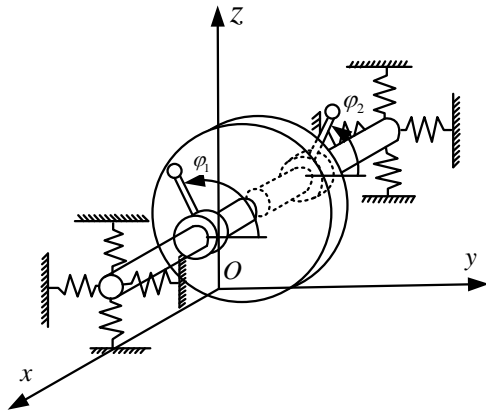


Рисунок 1 – Динамическая модель жесткого ротора на упругих опорах со статической неуравновешенностью и двумя маятниками

Предполагается также, что сопротивление колебаниям ротора носит характер «вязкого» трения, а разгон ротора происходит с постоянным угловым ускорением ε . Уравнение движения модели при выборе внешних обобщенных координатах имеет вид

$$[A]\{\ddot{q}\} = \{F\}, \quad (1)$$

где $\{\ddot{q}\} = \{\ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_2\}^T$.

$$[A] = \begin{bmatrix} M^* & 0 \\ 0 & M^* \\ -ml \sin \varphi_1 & ml \cos \varphi_1 \\ -ml \sin \varphi_2 & ml \cos \varphi_2 \\ -ml \sin \varphi_1 & -ml \sin \varphi_2 \\ ml \cos \varphi_1 & ml \cos \varphi_2 \\ ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\{F\} = \begin{cases} Me\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + Me\ddot{\varphi} \sin \varphi - \beta \dot{y} - cy + ml\dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1 + ml\dot{\varphi}_2^2 \cos \varphi_2; \\ Me\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - Me\ddot{\varphi} \cos \varphi - \beta \dot{z} - cz + ml\dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1 + ml\dot{\varphi}_2^2 \cos \varphi_2; \\ M_1 - mgl \cos \varphi_1; \\ M_2 - mgl \cos \varphi_2. \end{cases} \quad (3)$$

В (2), (3) приняты обозначения: M – масса ротора; m – масса маятника; l – длина маятника; β – коэффициент демпфирования; c – суммарный коэффициент жесткости упругих опор; e – эксцентриситет массы ротора; M_1, M_2 – моменты сопротивления вращению маятников, $M^* = M + 2m$.

При разгоне ротора принималось: $\ddot{\varphi} = \varepsilon$, $\dot{\varphi} = \omega = \varepsilon t$, $\varphi = \varepsilon t^2 / 2$, при вращении ротора с постоянной угловой скоростью ω_p : $\ddot{\varphi} = 0$, $\dot{\varphi} = \omega_p$; $\varphi = \omega_p(t - t_1 / 2)$, где t_1 – время разгона. Так же, как в большинстве работ по автоматической балансировке, используется гипотеза о том, что сопротивление вращению маятников пропорционально их относительной

скорости, т. е. $M_1 = \mu(\omega - \dot{\varphi}_1)$, $M_2 = \mu(\omega - \dot{\varphi}_2)$, (μ – коэффициент пропорциональности).

Динамическая модель ротора, имеющего статическую и моментную неуравновешенность, приведена на рисунке 2.

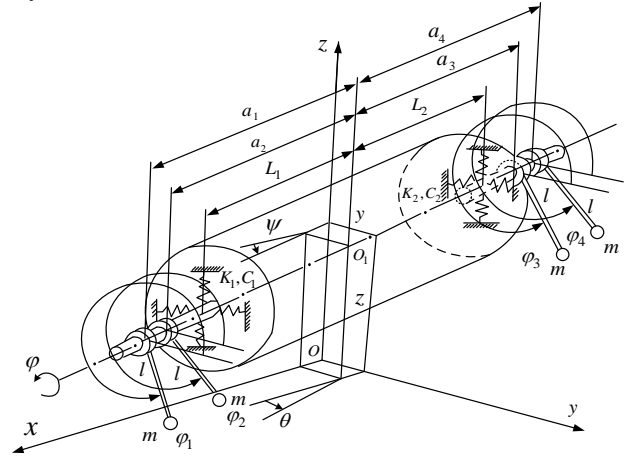


Рисунок 2 – Динамическая модель жесткого ротора на упругих опорах с четырьмя маятниками

На роторе с обеих сторон (с возможностью свободного вращения) установлены попарно четыре маятника одинаковой массы m и длины l . При составлении уравнений движения модели во время разгона и в установившемся режиме выбирались следующие обобщенные координаты: y, z – перемещения точки O_1 от положения статического равновесия ротора в направлении осей O_y и O_z (O_1 – точка пересечения оси ротора с плоскостью, проходящей через его центр масс перпендикулярно оси); θ, ψ – углы между осью x и проекциями оси ротора на координатные плоскости xu и xz ; φ – угол поворота ротора вокруг своей оси; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ – углы поворота маятников. Также предполагалось, что сопротивление колебаниям ротора носит характер «вязкого трения», а разгон ротора происходит с постоянным угловым ускорением ε .

Уравнения движения модели при выбранных обобщенных координатах имеют вид

$$[A]\{\ddot{q}\} = \{\bar{F}\}, \quad (4)$$

где $\{\ddot{q}\} = [\ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{\theta}, \ddot{\psi}, \ddot{\varphi}, \ddot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_2, \ddot{\varphi}_3, \ddot{\varphi}_4]^T$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^T & A_3 \end{bmatrix} A_1 = \begin{bmatrix} M^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A^* \end{bmatrix};$$

$$A_3 = ml^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A_2 = ml \begin{bmatrix} -\sin \varphi_1 & -\sin \varphi_2 & -\sin \varphi_3 & -\sin \varphi_4 \\ \cos \varphi_1 & \cos \varphi_2 & \cos \varphi_3 & \cos \varphi_4 \\ -a_1 \sin \varphi_1 & -a_2 \sin \varphi_2 & a_3 \sin \varphi_3 & a_4 \sin \varphi_4 \\ a_1 \cos \varphi_1 & a_2 \cos \varphi_2 & -a_3 \cos \varphi_3 & -a_4 \cos \varphi_4 \end{bmatrix};$$

$$\{\bar{F}\} = \begin{cases} Me\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + Me\ddot{\varphi} \sin \varphi - b_1 \dot{y} - \\ - b_2 \dot{\theta} - c_1 y - c_2 \theta + ml \cdot \sum_{k=1}^4 \dot{\varphi}_k^2 \cos \varphi_k; \\ Me\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - Me\ddot{\varphi} \cos \varphi - b_1 \dot{z} - b_2 \dot{\phi} - \\ - c_1 z - c_2 \phi + ml \cdot \sum_{k=1}^4 \dot{\varphi}_k^2 \sin \varphi_k; \\ (A-C)\delta\dot{\varphi}^2 \cos(\varphi-\gamma) + (A-C)\delta\dot{\varphi}^2 \times \\ \times \sin(\varphi-\gamma) - C\dot{\varphi}\dot{\theta} - b_2 \dot{y} - b_3 \dot{\theta} - \\ - c_2 y - c_3 \theta + ml \cdot \sum_{k=1}^4 a_k \sigma_k \dot{\varphi}_k^2 \cos \varphi_k; \\ (A-C)\delta\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi-\gamma) + A\delta\dot{\varphi}^2 \times \\ \times \cos(\varphi-\gamma) + C\dot{\varphi}\dot{\theta} - b_2 \dot{z} - b_3 \dot{\phi} - c_2 z - \\ - c_3 \phi + ml \cdot \sum_{k=1}^4 a_k \sigma_k \dot{\varphi}_k^2 \sin \varphi_k; \\ M_1 - mgl \cos \varphi_1; \\ M_2 - mgl \cos \varphi_2; \\ M_3 - mgl \cos \varphi_3; \\ M_4 - mgl \cos \varphi_4. \end{cases}$$

Здесь обозначено: $M^* = M + 4m$; $A^* = A + m \cdot \sum_{k=1}^4 a_k^2$;

m – масса маятника; l – длина маятника; M , A , C – масса, экваториальный и полярный моменты инерции ротора; a_1, a_2, a_3, a_4 – расстояния от точки O_1 до точек подвеса маятников; $\sigma_k = 1$ при $k = 1, 2$; $\sigma_k = -1$ при $k = 3, 4$; b_1, b_2, b_3 – коэффициенты сопротивления; c_1, c_2, c_3 – коэффициенты жесткости ($c_1 = k_1 + k_2$; $c_2 = k_1 l_1 - k_2 l_2$; $c_3 = k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2$, где k_1, k_2 – коэффициенты жесткости опор); e, δ, γ – характеристики неуравновешенности ротора; M_1, M_2, M_3, M_4 – моменты сопротивления вращению маятников; $\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$ – угол поворота, угловая скорость и угловое ускорение ротора. При разгоне принималось: $\ddot{\varphi} = \varepsilon$; $\dot{\varphi} = \varepsilon t$; $\varphi = \varepsilon t^2 / 2$, а при вращении с постоянной угловой скоростью Ω : $\ddot{\varphi} = 0$; $\dot{\varphi} = \Omega$; $\varphi = \Omega(t - t_1 / 2)$, где ε – угловое ускорение ротора при разгоне; t_1 – время разгона. При составлении математической модели принималась гипотеза о том, что сопротивление вращению маятников пропорционально скорости, т. е.:

$$\begin{aligned} M_1 &= \mu(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_1), & M_2 &= \mu(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_2), \\ M_3 &= \mu(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_3), & M_4 &= \mu(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_4), \end{aligned}$$

где μ – коэффициент пропорциональности.

Численное интегрирование систем уравнений (1) и (4) проводилось методом Рунге – Кутты. Особенностью используемого алгоритма расчета было обращение на каждом шаге интегрирования матрицы инерции $[A]$.

Расчет первой динамической модели проводился при следующих исходных данных: $H = 50$ кг; $m = 0,05$ кг; $l = 0,08$ м; $c = 0,5 \cdot 10^6$ Н/м; $\beta = 840$ Н·с/м; $e = 0,1$ мм; $\varepsilon = 100$ рад/с²; $\omega_p = 150$ рад/с. При этих исходных данных критическая скорость равна $\omega_{кр} = 100$ рад/с.

III Анализ данных эксперимента. Расчет второй динамической модели производился при следующих исходных данных, которые соответствовали параметрам экспериментального стенда: $\omega_p = 460$ рад/с; $\varepsilon = 230$ рад/с²; $e = 25 \cdot 10^{-1}$ м²; $\delta = \gamma = 0$; $m = 5 \cdot 10^{-2}$ кг; $l = 0,08$ м; $a_1 = a_4 = 0,28$ м; $a_2 = a_3 = 0,25$ м; $a = 0,265$ м; $b_1 = 843,17$ Н·с/м; $b_2 = -0,47$ Н·м·с; $b_3 = 10,41$ Н·м·с; $M = 37$ кг; $A = 0,479$ кг·м²; $C = 0,093$ кг·м²; $l_1 = 0,165$ м; $l_2 = 0,155$ м; $k_1 = 0,604 \cdot 10^6$ Н/м; $k_2 = 0,555 \cdot 10^6$ Н/м.

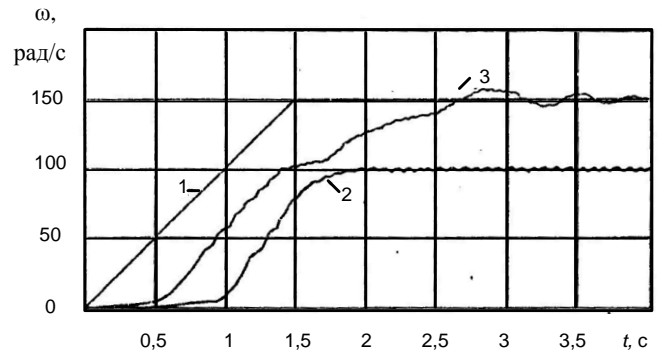


Рисунок 3 – Законы изменения угловых скоростей ротора и маятников первой динамической модели

Полученные в результате расчетов значения критических скоростей соответственно составили:

$$\omega_1 = 176,69 \text{ рад/с}; \quad \omega_2 = 274,76 \text{ рад/с}.$$

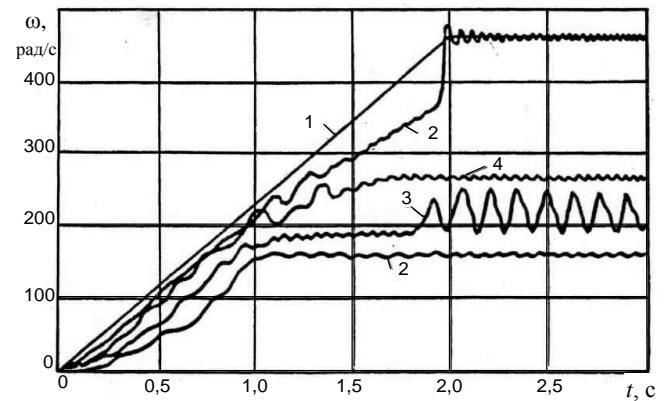


Рисунок 4 – Законы изменения угловых скоростей ротора и маятника второй динамической модели

Анализ полученных результатов полностью подтвердил данные экспериментов о том, что при определенных условиях имеет место режим движения, названный эффектом «застревания», когда ротор вращается с заданной угловой скоростью, а маятники вращаются с угловой скоростью, близкой к критической скорости ротора.

Например, для первой динамической модели этот эффект имел место при $\mu = 0,25 \cdot 10^{-3}$ Н·м·с $< 0,8 \cdot 10^{-3}$ Н·м·с. При $\mu = 0,25 \cdot 10^{-3}$ ротор вращается с заданной угловой скоростью $\omega_p = 150$ рад/с, а маятники колеблются около нижнего положения равновесия. При $\mu > 0,8 \cdot 10^{-3}$ Н·м·с, ко-

гда $2ml \leq Me$, начинается процесс автоматической балансировки. Это показано на рисунке 3, где кривая разгона двигателя и маятника при эффекте «застревания» 2 и при автобалансирующем процессе.

На рисунке 4 приведены кривые разгона ротора 1 и маятников 2–5, рассчитанные для второй динамической модели.

При величине $\mu < 1 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ ротор разгоняется до заданной угловой скорости, а маятники колеблются около положения равновесия.

Если величина $\mu = 0,5 \cdot 10^{-3} \dots 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$, то ротор после разгона вращается с заданной угловой скоростью, а угловая скорость маятников (кривая 2, рисунке 4) колеблется с малой амплитудой $\Delta\omega = 3,1 \text{ рад/с}$ около значения $\omega_m = 169,6 \text{ рад/с}$, которое близко к значениям первой критической скорости $\omega_1 = 176,69 \text{ рад/с}$ и все четыре маятника ориентированы в одну сторону. При изменении величины μ от $1,0 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ до $1,5 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ угловая скорость маятников (кривая 3, рисунке 4) непостоянна, её значение колеблется между величинами первой и второй критических скоростей ротора и маятники в разных парах движутся, располагаясь противоположно друг другу.

При величине $\mu = 1,5 \cdot 10^{-2} \dots 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ в процессе разгона угловая скорость маятников (кривая 4, рисунок 4) колеблется с малой амплитудой $\Delta\omega = 4,6 \text{ рад/с}$ около значения $\omega_m = 271,1 \text{ рад/с}$, совпадает с величиной второй критической скорости $\omega_2 = 274,76 \text{ рад/с}$. В установившемся режиме движения маятники в разных парах направлены противоположно друг другу, образуя как бы вращающуюся по отношению к ротору пару сил. И в том, и в другом случаях «застревания» маятников колебания ротора носят характер вынужденных колебаний, возникающих в результате наложения собственных и вынужденных колебаний, а амплитуды колебаний и реакции в опорах ротора намного больше, чем у ротора без маятников. Если величина $\mu = (2,0 \cdot 10^{-2} \dots 4,0 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с})$, то угловые скорости маятников (кривая 5, рисунок 4) после

разгона становятся равными угловой скорости ротора и происходит процесс автоматической балансировки. Если же $\mu > 4,0 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$, то ротор и маятники после разгона имеют одинаковые угловые скорости, но автоматической балансировки не происходит. Из-за большого трения маятники не могут найти «легкое» место и раздвинуться, чтобы компенсировать дисбаланс. Они занимают каждый раз по отношению к ротору случайное положение и угол между ними равен нулю.

Заключение. Результаты механико-математического моделирования динамики разгона и стационарного движения ротора со статической неуравновешенностью и двумя маятниками и ротора, имеющего статическую и моментную неуравновешенности, с четырьмя маятниками подтвердили данные эксперимента о возможности появления эффекта «застревания» маятников, который заключается в том, что при определении соотношения между моментами сопротивления в опорах маятников, расположенных на горизонтальном роторе с возможностью свободного вращения, и их статическими моментами имеет место такой режим движения, когда ротор вращается с заданной угловой скоростью, а угловая скорость вращения маятников близка или совпадает с одной из критических скоростей ротора.

Список литературы

- 1 Вибрации в технике. Т. 2. Колебания нелинейных систем. – М. : Машиностроение. – 1979. – 352 с.
- 2 Капица, П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса / П. Л. Капица. – НС ЭТФ, 1951. – Т. 25. – С. 588–597.
- 3 Блехман, И. И. Синхронизация динамических систем / И. И. Блехман. – М. : Наука, 1971. – 894 с.
- 4 Жаров, В. П. Новый эффект в нелинейной механике / В. П. Жаров, А. И. Артюнин // Механика деформируемых тел : междунар. вуз. сб. науч. тр. / РИСХМ. – Ростов н/Д, 1992. – С. 3–11.

Получено 10.10.2016

S. V. Eliseyev, A. I. Artyunin, Mechanical mathematical modelling of effect of «crawling» of pendulums on revolving rotor.

The results of investigation of new phenomenon in revolving of rigid rotor in elastic supports with four auto balance pendulums are discussed. The rotor is revolving with some work velocity but pendulums are moving with frequency which are equal one from two critical velocities of revolve of rotor connecting with linear or angular parameters of movement. The procedure of mathematical models construction for system with eight degrees of freedom is offered. Dynamical interactions properties between partial systems which is accept fixed form motion self-organization of free suspended pendulum group.

Key words: automatical balancing, pendulum balancers, critical velocities of revolve, dynamics of rotor systems.