

УДК 532.516

П. Н. КОНОН, кандидат физико-математических наук, А. И. ЕРМОЛЕНКО, магистрант, Белорусский государственный университет, Минск

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХСЛОЙНОГО ТЕЧЕНИЯ ПЛЕНОК ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ НА ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРА

Рассмотрена задача о движении двух слоев вязких несжимаемых жидкостей на поверхности вращающегося с постоянной угловой скоростью, горизонтально расположенного цилиндра в поле сил инерции, поверхностного натяжения и тяжести. Получена система уравнений, представляющая собой полную постановку плоской задачи. Исследован случай плоского установившегося движения двух несмешивающихся слоев вязкой жидкости на внутренней поверхности горизонтального вращающегося цилиндра в поле тяжести при умеренном вращении цилиндра. Результаты исследований могут быть применены в вопросах выбора оптимальных режимов вращения цилиндров при центробежном литье металлов.

Введение. При исследовании процессов центробежного литья металлов актуальной является гидродинамическая задача о движении слоя вязкой жидкости на внутренней поверхности вращающегося цилиндра [1, 2]. Экспериментальные исследования данного вида течения проведены в [6], а исследования слоя на внешней поверхности вращающегося цилиндра – в работах [3, 5, 7]. Случай плоского установившегося движения одного слоя вязкой жидкости на внутренней поверхности горизонтального вращающегося цилиндра в поле тяжести при умеренном вращении цилиндра рассмотрен в [4, 5]. При центробежном литье металлов необходимо добиться полного отсутствия неровностей, бугорков жидкости на цилиндрической поверхности. При этом требуется выбрать оптимальную скорость вращения цилиндра, чтобы избежать, с одной стороны, возможности перетекания жидкости, а с другой – появления значительных возмущений поверхности слоя. При центробежном методе литья расплав заливают в металлическую форму, вращающуюся с довольно высокой скоростью. Под действием центробежной силы расплав распределяется по внутренней поверхности формы и, кристаллизуясь, образует плотную отливку.

Постановка плоской задачи. Рассмотрим случай плоского возмущенного движения в неподвижной полярной системе координат O, y, θ , в которой ось y направлена по радиусу.

Движение жидкости описывается уравнениями Навье – Стокса, неразрывности и неизвестной свободной поверхности. Обезразмеренные по радиусу цилиндра R_0 , угловой скорости его вращения ω_0 и плотности жидкости ρ_1 они имеют вид

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial y} + \frac{w_i}{y} \frac{\partial v_i}{\partial \theta} - \frac{w_i^2}{y} = -k_i \frac{\partial p_i}{\partial y} + \text{Re}_i^{-1} \left(\Delta v_i - \frac{v_i}{y^2} - \frac{2}{y^2} \frac{\partial w_i}{\partial \theta} \right) - Fr^{-1} \sin \theta, \quad (1)$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial w_i}{\partial y} + \frac{w_i}{y} \frac{\partial w_i}{\partial \theta} + \frac{v_i w_i}{y} = -k_i \frac{1}{y} \frac{\partial p_i}{\partial \theta} + \text{Re}_i^{-1} \left(\Delta w_i - \frac{w_i}{y^2} + \frac{2}{y^2} \frac{\partial v_i}{\partial \theta} \right) - Fr^{-1} \cos \theta, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(yv_i)}{\partial y} + \frac{\partial w_i}{\partial \theta} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} + \frac{w_i}{y} \frac{\partial h_i}{\partial \theta} = v_i, \quad y = h_i(\theta, t), \quad (4)$$

где $i = \overline{1,2}$; $k_1 = 1$, $k_2 = \rho_1 / \rho_2$.

Сформулируем граничные условия. Условие прилипания на поверхности цилиндра:

$$y = 1, \quad v_1 = 0, \quad w_1 = 1. \quad (5)$$

Условие равенства скоростей на границе раздела слоев $y = h_1(\theta, t)$:

$$y = h_1(\theta, t), \quad v_1 = v_2, \quad w_1 = w_2. \quad (6)$$

Условие равенства касательных напряжений при $y = h_1(\theta, t)$:

$$\begin{aligned} & k_2 \text{Re}_1^{-1} \left(1 - \frac{1}{y^2} \left(\frac{\partial h_1}{\partial \theta} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{w_1}{y} + \frac{1}{y} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right) + \\ & + k_2 \text{Re}_1^{-1} \frac{2}{y} \frac{\partial h_1}{\partial \theta} \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{v_1}{y} - \frac{1}{y} \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right) = \\ & = \text{Re}_2^{-1} \left(1 - \frac{1}{y^2} \left(\frac{\partial h_1}{\partial \theta} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{w_2}{y} + \frac{1}{y} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} \right) + \\ & + \text{Re}_2^{-1} \frac{2}{y} \frac{\partial h_1}{\partial \theta} \left(\frac{\partial v_2}{\partial y} - \frac{v_2}{y} - \frac{1}{y} \frac{\partial w_2}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Условие отсутствия вязкого взаимодействия с окружающей средой на свободной поверхности слоя $y = h_2(\theta, t)$:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{y^2} \left(\frac{\partial h_2}{\partial \theta} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{w_2}{y} + \frac{1}{y} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} \right) + \\ & + \frac{2}{y} \frac{\partial h_2}{\partial \theta} \left(\frac{\partial v_2}{\partial y} - \frac{v_2}{y} - \frac{1}{y} \frac{\partial w_2}{\partial \theta} \right) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Условие непрерывности нормальных напряжений на свободной поверхности $y = h_2(\theta, t)$:

$$\frac{2}{\text{We}_2 R_{s_2}} = p_a - p_2 + 2 \text{Re}_2^{-1} \left(1 + \frac{1}{y^2} \left(\frac{\partial h_2}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{-1} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\frac{\partial v_2}{\partial y} - \frac{1}{y} \frac{\partial h_2}{\partial \theta} \left(\frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{w_2}{y} + \frac{1}{y} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} \right) \right) + \\ & + 2Re_2^{-1} \left(1 + \frac{1}{y^2} \left(\frac{\partial h_2}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{-1} \times \\ & \times \frac{1}{y^2} \left(\frac{\partial h_2}{\partial \theta} \right)^2 \left(\frac{1}{y} \frac{\partial w_2}{\partial \theta} + \frac{v_2}{y} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Условие, выражающее скачок нормальных напряжений на свободной поверхности слоя $y = h_1(\theta, t)$, вызванный действием капиллярных сил:

$$\begin{aligned} & p_2 - 2Re_2^{-1} \left(1 + \frac{1}{y^2} \left(\frac{\partial h_1}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{-1} \times \\ & \times \left(\frac{\partial v_2}{\partial y} - \frac{1}{y} \frac{\partial h_1}{\partial \theta} \left(\frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{w_2}{y} + \frac{1}{y} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} \right) \right) - \\ & - 2Re_2^{-1} \left(1 + \frac{1}{y^2} \left(\frac{\partial h_1}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{-1} \times \frac{1}{y^2} \left(\frac{\partial h_1}{\partial \theta} \right)^2 \left(\frac{1}{y} \frac{\partial w_2}{\partial \theta} + \frac{v_2}{y} \right); \\ & - p_1 + 2Re_1^{-1} \left(1 + \frac{1}{y^2} \left(\frac{\partial h_1}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{-1} \times \\ & \times \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{1}{y} \frac{\partial h_1}{\partial \theta} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{w_1}{y} + \frac{1}{y} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right) \right) + \\ & + 2Re_1^{-1} \left(1 + \frac{1}{y^2} \left(\frac{\partial h_1}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{-1} \times \\ & \times \frac{1}{y^2} \left(\frac{\partial h_1}{\partial \theta} \right)^2 \left(\frac{1}{y} \frac{\partial w_1}{\partial \theta} + \frac{v_1}{y} \right) = \frac{2}{We_1 R_{s_1}}. \end{aligned} \quad (10)$$

В момент времени $t = 0$ задаются начальные условия – начальные формы свободных поверхностей и начальное распределение скоростей:

$$\begin{aligned} h_i(\theta, 0) &= h_{i0}(\theta), \quad v_i(y, \theta, 0) = v_{i0}(y, \theta), \\ w_i(y, \theta, 0) &= w_{i0}(y, \theta). \end{aligned} \quad (11)$$

Кроме того, $v_i, v_{i0}, w_i, w_{i0}, h_i, h_{i0}, p_i - 2\pi$ – периодичные по углу θ функции, а v_{i0}, w_{i0} удовлетворяют уравнениям неразрывности (3).

В уравнениях (1)–(11) v_i, w_i – соответственно радиальные и тангенциальные составляющие скоростей, p_i – давление в слоях жидкостей, p_a – давление невозмущенной окружающей среды. Оператор Лапласа Δ и средние кривизны поверхностей $2/R_{s_i}$ в полярных координатах имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}; \\ \frac{2}{R_{s_i}} &= \frac{\left(h_i^2 + 2 \left(\frac{\partial h_i}{\partial \theta} \right)^2 - h_i \frac{\partial^2 h_i}{\partial \theta^2} \right)}{\left(h_i^2 + \left(\frac{\partial h_i}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Начально-краевая задача с неизвестными свободными поверхностями $y = h_i(\theta, t)$, (1)–(12) содержит безразмерные параметры – числа Рейнольдса $Re_i = R_0^2 \omega_0 / \nu_i$, Фруда $Fr = R_0 \omega_0^2 / g$ и Вебера $We_i = \rho_1 R_0^3 \omega_0^2 / \sigma_i$. Здесь ν_i – коэффициенты кинематических вязкостей, g – ускорение силы тяжести, σ_i – коэффициенты поверхностного натяжения жидкостей.

Уравнения (1)–(12) представляют собой полную постановку задачи о движении двух несмешивающихся плоских слоев вязких жидкостей на внутренней поверхности горизонтально расположенного цилиндра, вращающегося с постоянной угловой скоростью с неизвестными свободными поверхностями.

Задача достаточно сложна ввиду ее нелинейности, вырожденности уравнений и наличия неизвестных границ.

Решение стационарной задачи о движении двух тонких, плоских слоев несмешивающихся вязких жидкостей. Рассмотрим случай плоского установившегося движения двух несмешивающихся слоев вязкой жидкости на внутренней поверхности горизонтального вращающегося цилиндра в поле тяжести при умеренном вращении цилиндра, когда $w = w(y, \theta), v = 0$. Тогда, пренебрегая инерционными членами уравнений Навье – Стокса и поверхностными силами из (1)–(3), получаем уравнения

$$\frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} = \gamma_i \cos \theta, \quad i = \overline{1, 2}, \quad (13)$$

в которых числа $\gamma_i = Re_i Fr^{-1}, i = \overline{1, 2}$ являются безразмерными параметрами задачи. Соотношения (5)–(8) примут вид

$$y = 1, \quad w_1 = 1, \quad (14)$$

$$y = h_1(\theta, t), \quad w_1 = w_2, \quad (15)$$

$$y = h_2(\theta, t), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{w_2}{y} \right) = 0, \quad (16)$$

$$y = h_1(\theta, t), \quad k_2 Re_1^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{w_1}{y} \right) = Re_2^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{w_2}{y} \right). \quad (17)$$

Решая систему уравнений (13)–(17), находим скорости движения слоев жидкости $w_i(y, \theta)$:

$$\begin{aligned} w_1(y, \theta) &= \frac{1}{2} y^2 \gamma_1 \cos \theta + \\ &+ \frac{2\mu_1 - \left((1 + h_1^2) \gamma_1 \mu_1 + (h_2^2 - h_1^2) \gamma_2 \mu_2 \right) \cos \theta}{2\mu_1} y + \\ &+ \frac{\left(h_2^2 \gamma_2 \mu_2 + h_1^2 (\gamma_1 \gamma_2 - \gamma_2 \mu_2) \right) \cos \theta}{2\mu_1}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} w_2(y, \theta) &= \frac{1}{2} y^2 \gamma_2 \cos \theta + y + \frac{1}{2} h_2^2 \gamma_2 \cos \theta - \\ &- \frac{y h_2^2 \gamma_2 (\mu_1 - \mu_2) \cos \theta}{2h_1 \mu_1} - \frac{y h_1^3 (\gamma_1 \mu_1 - \gamma_2 \mu_2) \cos \theta}{2h_1 \mu_1} - \\ &- \frac{y h_1 (\gamma_1 \mu_1 + h_2^2 \gamma_2 \mu_2) \cos \theta}{2h_1 \mu_1} - \\ &- \frac{y h_1^2 (-2\gamma_1 \mu_1 + \gamma_2 (\mu_1 + \mu_2)) \cos \theta}{2h_1 \mu_1}. \end{aligned} \quad (19)$$

В соотношениях (19)–(20) μ_i – коэффициенты динамических вязкостей жидкостей.

Далее найдем потоки жидкостей через поперечные сечения слоев, взяв интегралы от скоростей движения в пределах слоев вдоль по радиусу цилиндра:

$$Q_1(\theta) = \int_{h_1}^1 w_1(y, \theta) dy, \quad (20)$$

$$Q_2(\theta) = \int_{h_2}^{h_1} w_2(y, \theta) dy. \quad (21)$$

В итоге для потоков жидкостей получаем следующие выражения:

$$Q_1(\theta) = \frac{(\gamma_1 \mu_1 - \gamma_2 \mu_2) \cos \theta}{4\mu_1} h_1^4 + \frac{(-4\gamma_1 \mu_1 + 3\gamma_2 \mu_2) \cos \theta}{6\mu_1} h_1^3 + \frac{-2\mu_1 + (2\gamma_1 \mu_1 + (h_2^2 - 1)\gamma_2 \mu_2) \cos \theta}{4\mu_1} h_1^2 - \frac{h_2^2 \gamma_2 \mu_2 \cos \theta}{2\mu_1} h_1 + \frac{\gamma_2 \mu_2 \cos \theta}{4\mu_1} h_2^2 - \frac{1}{12} \gamma_1 \cos \theta + \frac{1}{2}, \quad (22)$$

$$Q_2(\theta) = \frac{(-\gamma_1 \mu_1 + \gamma_2 \mu_2) \cos \theta}{4\mu_1} h_1^4 + \frac{(6\gamma_1 \mu_1 - \gamma_2 (\mu_1 + 3\mu_2)) \cos \theta}{12\mu_1} h_1^3 + \frac{2\mu_1 + ((h_2^2 - 1)\gamma_1 \mu_1 - 2\gamma_2 \mu_2 h_2^2) \cos \theta}{4\mu_1} h_1^2 + \frac{h_2^2 (-\gamma_1 \mu_1 + \gamma_2 (\mu_1 + \mu_2)) \cos \theta}{2\mu_1} h_1 + \frac{h_2^4 \gamma_2 (\mu_1 - \mu_2) \cos \theta}{4\mu_1} \frac{1}{h_1} + \frac{\gamma_2 \mu_2 \cos \theta}{4\mu_1} h_2^4 - \frac{2}{3} \gamma_2 h_2^3 \cos \theta + \left(\frac{1}{4} \gamma_1 \cos \theta - \frac{1}{2} \right) h_2^2. \quad (23)$$

Для отыскания решения вводятся условия постоянства потока:

$$Q_i(\theta) = Q_{i\text{const}}, \quad (24)$$

где $Q_{i\text{const}}$ – постоянные потоки, которые можно найти по следующим формулам:

$$Q_{1\text{const}} = \int_{h_{1\text{const}}}^1 y dy, \quad (25)$$

$$Q_{2\text{const}} = \int_{h_{2\text{const}}}^{h_{1\text{const}}} y dy. \quad (26)$$

Здесь $h_{i\text{const}}$ – константы, задающие средние значения $h_i(\theta)$, которые будут получены при решении (далее для решения примем $h_{1\text{const}} = 0,98$, $h_{2\text{const}} = 0,96$).

Введем значения толщин слоев $\delta_i(\theta) = 1 - h_i(\theta)$ и амплитуд возмущенных поверхностей слоев $A_i = \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \times h_i(\theta) - \min_{\theta \in [0, 2\pi]} h_i(\theta)$.

Для того чтобы задача имела стационарное решение, должны выполняться условия:

$$\gamma_i \delta_{s_i}^2 \ll 1. \quad (27)$$

Из условия можно заметить, что для получения решений для больших толщин слоев нужны достаточно малые числа γ_i , т.е. потребуются либо жидкости с достаточно большой кинематической вязкостью, либо большая скорость вращения цилиндра.

Для нахождения форм свободных поверхностей найдем значения h_i для различных значений угла θ , для этого решим относительно h_i систему уравнений (24).

В таблице 1 приведены решения задачи для некоторых значений углов θ для различных чисел γ_i .

Таблица 1 – Решение задачи для различных γ_i

θ	Значения h_1 и h_2			
	$\gamma_1 = 277,3$ $\gamma_2 = 388,2$	$\gamma_1 = 189,5$ $\gamma_2 = 265,3$	$\gamma_1 = 142,1$ $\gamma_2 = 198,9$	$\gamma_1 = 71,1$ $\gamma_2 = 99,5$
0	0,977102	0,978543	0,979	0,97955
	0,945628	0,954236	0,956228	0,958384
$\pi/6$	0,977897	0,9788	0,97916	0,979615
	0,950966	0,955381	0,95688	0,958625
$\pi/4$	0,97847	0,979069	0,979337	0,97965
	0,953899	0,956514	0,957576	0,9589
$\pi/3$	0,97903	0,97932	0,97955	0,979785
	0,956352	0,957742	0,958384	0,959241
$\pi/2$	0,98	0,98	0,98	0,98
	0,96	0,96	0,96	0,96
$2\pi/3$	0,980707	0,980502	0,980385	0,980199
	0,96233	0,961677	0,961296	0,96068
$3\pi/4$	0,980954	0,980686	0,98053	0,980278
	0,963096	0,962263	0,961766	0,960942
$5\pi/6$	0,98113	0,980819	0,980636	0,980336
	0,963628	0,96268	0,962106	0,961137
π	0,98127	0,980926	0,980722	0,980385
	0,964045	0,963012	0,962379	0,961296
$7\pi/6$	0,98113	0,980819	0,980636	0,980336
	0,963628	0,96268	0,962106	0,961137
$5\pi/4$	0,980954	0,980686	0,98053	0,980278
	0,963096	0,962263	0,961766	0,960942
$4\pi/3$	0,980707	0,980502	0,980385	0,980199
	0,96233	0,961677	0,961296	0,96068
$3\pi/2$	0,98	0,98	0,98	0,98
	0,96	0,96	0,96	0,96
$5\pi/3$	0,97903	0,97938	0,97955	0,979785
	0,956352	0,957742	0,958384	0,959241
$7\pi/4$	0,97847	0,979069	0,979337	0,97969
	0,953899	0,956514	0,957576	0,9589
$11\pi/6$	0,977897	0,9788	0,97916	0,979615
	0,950966	0,955381	0,95688	0,958625
2π	0,977102	0,978543	0,979	0,97955
	0,945628	0,954236	0,956228	0,958384

Можно заметить, что h_i принимают свои максимальные значения при $\theta = \pi$, а минимальные – при $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi$. В таблице 2 приведены максимальные и минимальные значения h_i , а также значения амплитуд A_i движения слоев для разных чисел γ_i .

Из таблицы 2 следует, что с уменьшением чисел γ_i амплитуды возмущений становятся меньше и толщины слоев приближаются к постоянным значениям.

На рисунках 1–4 графически показана зависимость толщин слоев δ_i от угла θ для определенных значений γ_i .

Таблица 2 – Амплитуды возмущений и экстремумы h_i

γ_i	$\gamma_1 = 277,3$ $\gamma_2 = 388,2$	$\gamma_1 = 189,5$ $\gamma_2 = 265,3$	$\gamma_1 = 142,1$ $\gamma_2 = 198,9$	$\gamma_1 = 71,1$ $\gamma_2 = 99,5$
h_{1max}	0,98127	0,980926	0,980722	0,980385
h_{1min}	0,977102	0,978543	0,979	0,97955
A_1	0,004169	0,002384	0,001722	0,000835
h_{2max}	0,964045	0,963012	0,962379	0,961296
h_{2min}	0,945628	0,954236	0,956228	0,958384
A_2	0,018418	0,008777	0,006151	0,002913

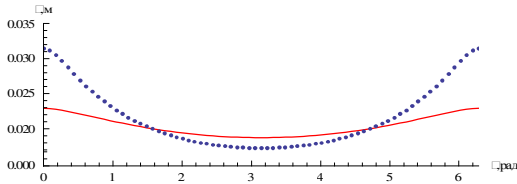


Рисунок 1 – Зависимость толщин слоев от θ для $\gamma_1 = 277,3$; $\gamma_2 = 388,2$: δ_1 – сплошная линия, δ_2 – пунктирная линия

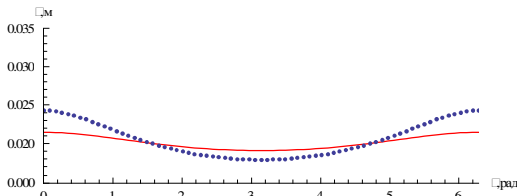


Рисунок 2 – Зависимость толщин слоев от θ для $\gamma_1 = 189,5$; $\gamma_2 = 265,3$: δ_1 – сплошная линия, δ_2 – пунктирная линия

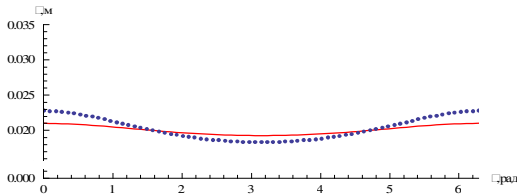


Рисунок 3 – Зависимость толщин слоев от θ для $\gamma_1 = 142,1$; $\gamma_2 = 198,9$: δ_1 – сплошная линия, δ_2 – пунктирная линия

Приведенные выше изображения дают наглядное представление того факта, что с уменьшением чисел γ_i уменьшается возмущение свободных поверхностей слоев, а возмущение поверхности второго слоя больше возмущения поверхности первого слоя вследствие того, что $\gamma_2 > \gamma_1$. Также стоит отметить, что графики функций δ_1 и δ_2 симметричны относительно прямой $\theta = \pi$.

Получено 20.02.2016

P. N. Konon, A. I. Ermolenko. Study two-layer flow films viscous liquids on the inner surface of the rotating cylinder.

The paper considers the problem of motion of two layers of viscous incompressible fluids on the surface of rotating at a constant angular velocity, horizontal cylinder in the forces of inertia, surface tension and gravity. A system of equations is a complete statement of the plane problem. The case of a flat steady motion of two immiscible viscous fluid layers on the inner surface of the horizontal rotating cylinder in the gravity field at a moderate rotation of the cylinder. The research results can be applied in the selection of optimal regimes of rotation of cylinders in centrifugal casting of metals.

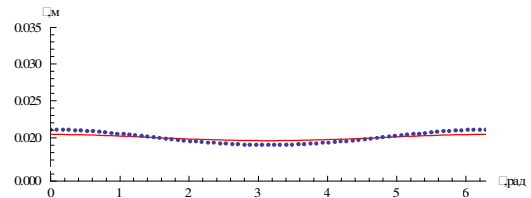


Рисунок 4 – Зависимость толщин слоев от θ для $\gamma_1 = 71,1$; $\gamma_2 = 99,5$: δ_1 – сплошная линия, δ_2 – пунктирная линия

Заключение. Получена система уравнений движения двух слоев вязких несжимаемых жидкостей на внутренней поверхности вращающегося с постоянной угловой скоростью, горизонтально расположенного цилиндра в поле сил инерции, поверхностного натяжения и тяжести. В случае плоского установившегося движения двух несмешивающихся слоев вязкой жидкости в поле тяжести при умеренном вращении цилиндра найдены поля скоростей и определены виды поверхностей слоев раздела двух жидкостей и свободной поверхности слоя в зависимости от толщин слоев, угловой скорости вращения и физических свойств жидкостей. Результаты исследований могут быть применены в вопросах выбора оптимальных режимов вращения цилиндра при центробежном литье металлов.

Список литературы

- Конон, П. Н.** Напряжения на внешней и внутренней поверхности вращающейся цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью / П. Н. Конон, А. В. Жук // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – № 4 (25). – С. 32–37.
- Конон, П. Н.** Уравнения эволюции слоя вязкой жидкости на внутренней поверхности вращающегося цилиндра / П. Н. Конон, А. В. Жук // Теоретическая и прикладная механика : межвед. сб. науч.-метод. ст. – Вып. 30. – Минск : БНТУ, 2015. – С. 6.
- Пухначев, В. В.** Движение жидкой пленки на поверхности вращающегося цилиндра в поле тяжести / В. В. Пухначев // ПМТФ. – 1977. – № 3. – С. 78–88.
- Hansen, E. B.** Steady, viscous, free-surface flow on a rotating cylinder / E. B. Hansen, M. A. Kelmanson // Journal of Fluid Mechanics. – 1994. – V. 272. – P. 91–107.
- Moffat, H. K.** Behavior of a viscous film on the outer surface of rotating cylinder / H. K. Moffat // Journal de Mecanique. – 1977. – V.16. – № 8. – P. 651–673.
- Thoroddsen, S. T.** Experimental study of coating flows in a partially-filled horizontally rotating cylinder / S. T. Thoroddsen, L. Mahadevan // Experiments in Fluids – 1997. – № 23. – P. 1–13.
- Епихин, В. Е.** О возмущенном движении слоя вязкой жидкости на поверхности вращающегося цилиндра / В. Е. Епихин, П. Н. Конон, В. Я. Шкадов // ИФЖ. – 1994. – Т. 66. – № 6. – С. 689–694.