

УДК 539.3

С. С. ЩЕРБАКОВ, доктор физико-математических наук, Л. А. ШЕМЕТ, Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

### ПРИМЕНЕНИЕ КОНЦЕПЦИИ ОБ ОПАСНЫХ ОБЪЕМАХ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТРЕЩИНОПОДОБНОГО ПОВРЕЖДЕНИЯ

Представлены результаты компьютерного моделирования распространения трещиноподобного повреждения в компактных образцах из высокопрочного чугуна с шаровидным графитом ВЧТГ и стали во времени для различных эквивалентных напряжений. Расчеты проводились на основе модели деформированного твердого тела с опасным объемом путем удаления опасных площадей на каждом шаге нагружения. Определены основные характеристики трещиностойкости для эквивалентных напряжений, рассчитанных по различным теориям прочности. Проведен сравнительный анализ напряженно-деформированного состояния и состояния объемной повреждаемости образцов из высокопрочного чугуна с шаровидным графитом марки ВЧТГ и стали для нагрузки  $Q = 20\ 000$  Н. Показано, что характеристики трещиностойкости и повреждаемости высокопрочного чугуна с шаровидным графитом марки ВЧТГ близки к характеристикам стали.

**Введение.** Одним из важнейших направлений оценки эксплуатационной долговечности материалов является определение параметров трещиностойкости компактных образцов. В частности, изучают условия зарождения трещины, проводят расчет коэффициентов интенсивности напряжений, определяют скорости распространения трещины и т.п. [1].

Однако трехмерное напряженно-деформированное состояние в вершине развивающего трещиноподобного повреждения применительно как к плоским, так и трехмерным образцам изучено не полностью. Кроме того, состояние объемной повреждаемости в вершине трещины остается практически неисследованным. Также мало исследованными остаются характеристики сопротивления высокопрочного чугуна распространению трещины.

Конечно-элементное моделирование дает возможность описать трехмерное напряженно-деформированное состояние и состояние объемной повреждаемости в окрестности распространяющегося трещиноподобного повреждения. Это позволяет дать оценку характеристик трещиностойкости для компактных образцов, изготовленных из высокопрочного чугуна с шаровидным графитом.

Таким образом, разработка моделей трехмерного напряженно-деформированного состояния и состояния объемной повреждаемости высокопрочного чугуна с шаровидным графитом в окрестности распространяющегося трещиноподобного повреждения является актуальной задачей.

**Опасный объем.** Применяемые для интегральной оценки повреждаемости тел и систем опасные объемы представляют собой трехмерные области, где напряжения достигают повреждающего уровня, например, нижней границы распределения предела выносливости [2].

Рассмотрим тензор механического параметра  $\varphi_{ij}$ , конкретизациями которого могут быть тензоры напряжений  $\sigma_{ij}$  и деформаций  $\varepsilon_{ij}$ . Для однородного изотропного деформируемого твердого тела определим

предельные нормальные и касательные значения  $\varphi_n^{(*\text{lim})}$  и  $\varphi_\tau^{(*\text{lim})}$  тензора  $\varphi_{ij}^{(\pm *\text{lim})}$ , а также предельное главное значение тензора  $\varphi_1^{(*\text{lim})}$  и предельную интенсивность  $\varphi_{\text{int}}^{(*\text{lim})}$  [2]:

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(*\text{lim})} &= \max_{dV, i} \left( \left| \varphi_{ii}(F_{\text{lim}}, dV) \right| \right), \quad i = x, y, z, \\ \varphi_\tau^{(*\text{lim})} &= \max_{dV, i, j} \left( \left| \varphi_{ij}(F_{\text{lim}}, dV) \right| \right), \quad i, j = x, y, z, \quad i \neq j, \\ \varphi_1^{(*\text{lim})} &= \max_{dV} \left( \left| \varphi_1(F_{\text{lim}}, dV) \right| \right), \\ \varphi_{\text{int}}^{(*\text{lim})} &= \max_{dV} \left[ \varphi_{\text{int}}(F_{\text{lim}}, dV) \right], \end{aligned} \quad (1)$$

где  $dV$  – элементарный объем нагруженного тела.

Следовательно, если рассмотреть тензор  $\varphi_{ij}$  в каждом элементарном объеме  $dV$  тела, то в общем случае для описания изменения величины действующих напряжений по сравнению с величиной предельных напряжений можно ввести три основных типа относительных повреждающих напряжений [2]: компонентные, главные и октаэдрические:

$$\begin{aligned} \psi_{ij} &= \left| \varphi_{ij} / \varphi_m^{(*\text{lim})} \right|, \\ \psi_i &= \left| \varphi_i / \varphi_1^{(*\text{lim})} \right|, \\ \psi_{\text{int}} &= \varphi_{\text{int}} / \varphi_{\text{int}}^{(*\text{lim})}. \end{aligned} \quad (2)$$

Условия для ограничения опасных объемов с учетом формул (5) будут иметь вид

$$\begin{aligned} V_{ij} &= \left\{ dV / \varphi_{ij} \geq \varphi_m^{(*\text{lim})}, dV \subset V_k \right\}, \quad i, j = x, y, z, \\ m &= \begin{cases} n & \text{при } i = j, \\ \tau & \text{при } i \neq j, \end{cases} \\ V_i &= \left\{ dV / \varphi_i \geq \varphi_1^{(*\text{lim})}, dV \subset V_k \right\}, \quad i = 1, 2, 3, \\ V_{\text{int}} &= \left\{ dV / \varphi_{\text{int}} \geq \varphi_{\text{int}}^{(*\text{lim})}, dV \subset V_k \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $V_k$  – рабочий объем нагруженного тела.

В рамках проведенных расчетов эквивалентные напряжения рассчитывались в соответствии со следующими теориями прочности:

$$\sigma_I = \sigma_1 \leq \sigma_I^{\text{lim}}; \quad (4)$$

$$\sigma_{II} = \varepsilon_1 E \leq \sigma_{II}^{\text{lim}}; \quad (5)$$

Для описания изменения величины действующих напряжений по сравнению с величиной предельных на основе формул (2) был введен показатель повреждаемости следующего вида:

$$\Psi_q = |\sigma_q / \sigma_q^{\text{lim}}|, \quad q = I, II. \quad (6)$$

Тогда условия для ограничения опасных объемов с учетом формул (1)–(6) будут иметь вид

$$V_q = \{dV / \Psi_q, dV \subset V_k\}. \quad (7)$$

Особенностью исследовавшегося высокопрочного чугуна с шаровидным графитом марки ВЧТГ являются его высокие прочностные свойства, близкие к свойствам стали [3]. Поэтому предельное значение напряжений для материалов исследуемой модели – стали и высокопрочного чугуна ВЧТГ было выбрано одинаковым:  $\sigma_q^{\text{lim}} = 600$  МПа.

**Конечно-элементное моделирование.** Моделирование напряженно-деформированного состояния модели проводилось в пакете Ansys. На рисунках 1–8 представлены деформированные плоские образцы из стали и чугуна на различных шагах нагружения для эквивалентных напряжений в соответствии с (5) при растягивающей нагрузке  $Q = 20\,000$  Н. В качественном и количественном отношении интенсивность напряжений в чугунном и стальном образцах практически не имеет отличий. В чугуне первые главные деформации несколько больше из-за его меньшего, чем у стали, модуля упругости.

Из рисунков видно, что трещиноподобное повреждение распространяется в продольном направлении, а максимальные значения деформаций изменяются на каждом шаге нагружения и находятся в вершине трещиноподобного повреждения.

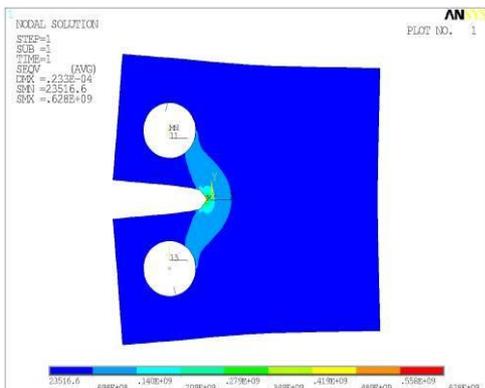


Рисунок 1 – Интенсивность напряжений в стальном образце на 1 шаге нагружения

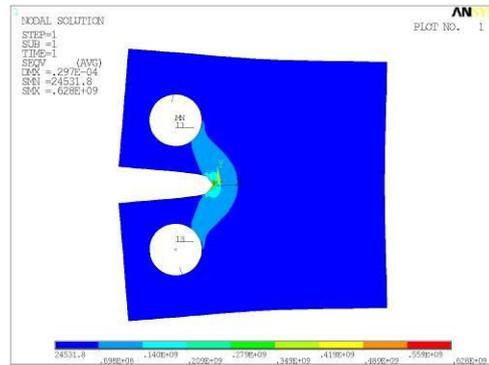


Рисунок 2 – Интенсивность напряжений в чугунном образце на 1-м шаге нагружения

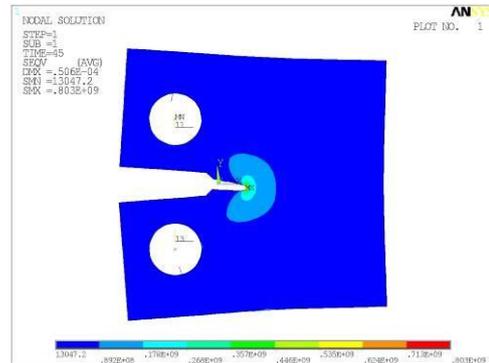


Рисунок 3 – Интенсивность напряжений в стальном образце на 45-м шаге нагружения

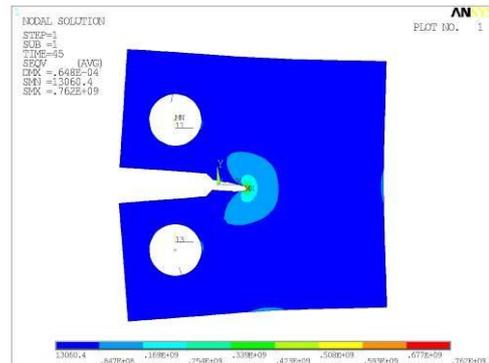


Рисунок 4 – Интенсивность напряжений в чугунном образце на 45-м шаге нагружения

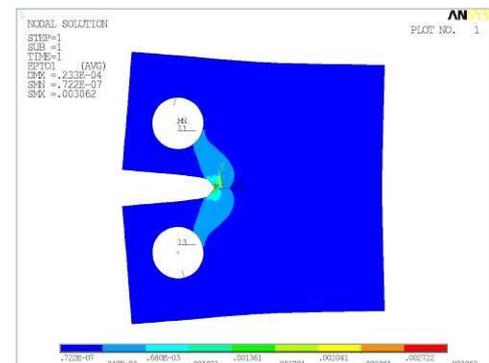


Рисунок 5 – Первые главные деформации в стальном образце на 1-м шаге нагружения

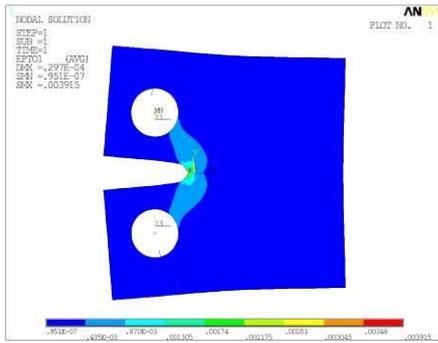


Рисунок 6 – Первые главные деформации в чугунном образце на 1-м шаге нагружения

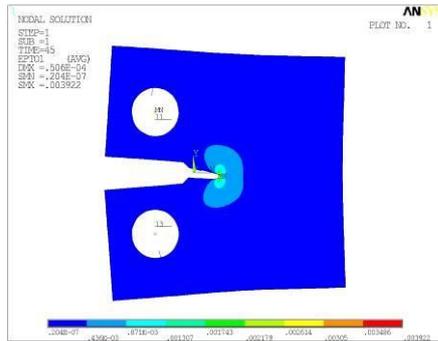


Рисунок 7 – Первые главные деформации в стальном образце на 45-м шаге нагружения

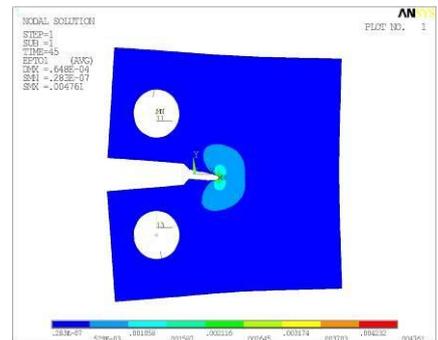


Рисунок 8 – Первые главные деформации в чугунном образце на 45-м шаге нагружения

**Характеристики трещиностойкости.** Если трещина развивается в пластинах неограниченных размеров, то коэффициенты интенсивности напряжений для соответствующих схем деформирования будут [4]:

$$\left. \begin{aligned} K_I &= \sigma \sqrt{\pi l}; \\ K_{II} &= \tau_{II} \sqrt{\pi l}; \\ K_{III} &= \tau_{III} \sqrt{\pi l}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где  $\sigma$  и  $\tau$  – нормальные и касательные напряжения;  $l$  – длина (глубина) трещины.

Для реальных объектов формулы (8) записывают с учетом поправочных функций  $Y_I, Y_{II}, Y_{III}$ , которые учитывают схему нагружения и геометрию трещин:

$$\left. \begin{aligned} K_I &= \sigma \sqrt{\pi l} \cdot Y_I; \\ K_{II} &= \tau_{II} \sqrt{\pi l} \cdot Y_{II}; \\ K_{III} &= \tau_{III} \sqrt{\pi l} \cdot Y_{III}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Если компактный образец испытывают на циклическую трещиностойкость по схеме внецентренного растяжения, то

$$K_I = \frac{Q}{h_0 \sqrt{B}} Y(l/B), \quad (10)$$

$$Y_1(l/B) = \sqrt{\frac{l/B}{(l-B)^3}} \left( 9.172 - 13.829 \left( \frac{l}{B} \right) + 11.822 \left( \frac{l}{B} \right)^2 - 3.056 \left( \frac{l}{B} \right)^3 \right), \quad (11)$$

где  $h_0, B$  – размеры образца,  $l$  – длина трещины, отсчитываемая от линии действия нагрузки  $Q$  [5].

**Распространение трещиноподобного повреждения.** Оно моделировалось на основе последовательности расчетов напряженно-деформированного состояния. Следует отметить, что в двумерной постановке опасный объем  $V$  принимает вид опасной площади  $S$ .

На каждом шаге нагружения вычислялся опасный объем, т.е. количество и суммарный объем составляющих его конечных элементов, а также длина трещиноподобного повреждения [6, 7]. Для нахождения длины трещиноподобного повреждения был разработан следующий алгоритм.

На каждом шаге нагружения удалялся опасный объем, номера узлов элементов, составляющих данный объем, заносились в массив. Затем на его основе создавался массив координат данных узлов. Длина трещины считалась как наибольшая координата по  $x$  (в направлении распространения повреждения).

Подставляя найденные значения напряжений и длины трещины в формулы (4) и (5), находились коэффициенты интенсивности напряжений.

На рисунках 9–16 представлены характеристики повреждаемости образца из высокопрочного чугуна и стали в соответствии с основными моделями эквивалентных напряжений при  $Q = 20\,000$  Н. Видно, что небольшое различие величин опасного объема, коэффициента интенсивности напряжений и их приращений наблюдается при использовании для расчета эквивалентных напряжений критерия наибольших относительных удлинений.

Приращение опасного объема в образце из чугуна на каждом шаге нагружения происходит быстрее, чем в образце из стали, и поэтому рост длины трещиноподобного повреждения происходит медленнее в образце из стали [8].

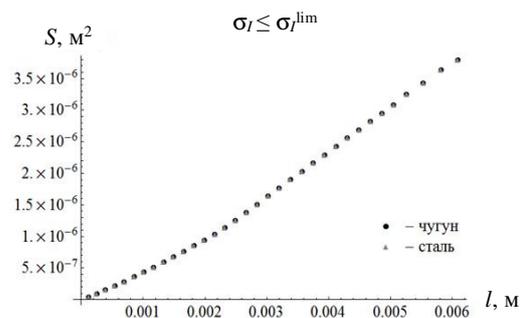


Рисунок 9 – Зависимость опасной площади от длины трещиноподобного повреждения для  $\sigma_I = \sigma_1$

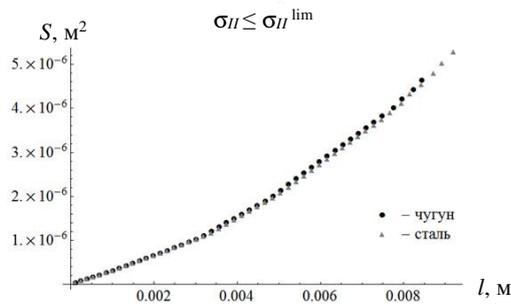


Рисунок 10 – Зависимость опасной площади от длины трещиноподобного повреждения для  $\sigma_{II} = \varepsilon_1 E$

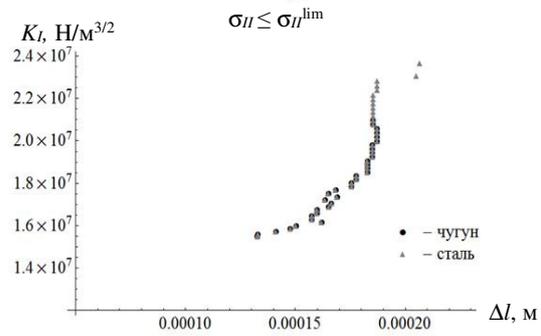


Рисунок 14 – Зависимость коэффициента интенсивности напряжений от приращения длины трещиноподобного повреждения для  $\sigma_{II} = \varepsilon_1 E$

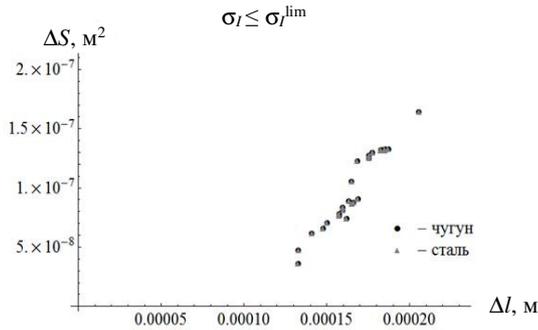


Рисунок 11 – Зависимость приращения опасной площади от приращения длины трещиноподобного повреждения для  $\sigma_I = \sigma_1$

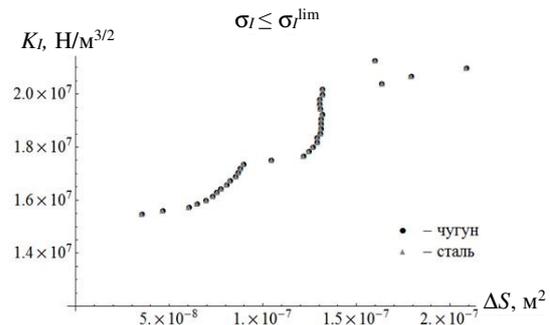


Рисунок 15 – Зависимость коэффициента интенсивности напряжений от приращения опасной площади для  $\sigma_I = \sigma_1$

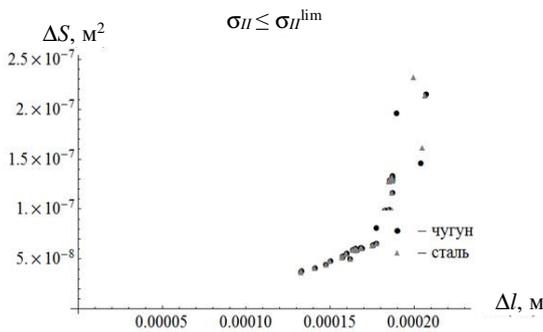


Рисунок 12 – Зависимость приращения опасной площади от приращения длины трещиноподобного повреждения для  $\sigma_{II} = \varepsilon_1 E$

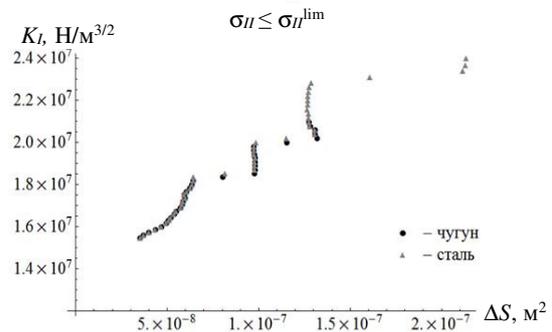


Рисунок 16 – Зависимость коэффициента интенсивности напряжений от приращения опасной площади для  $\sigma_{II} = \varepsilon_1 E$

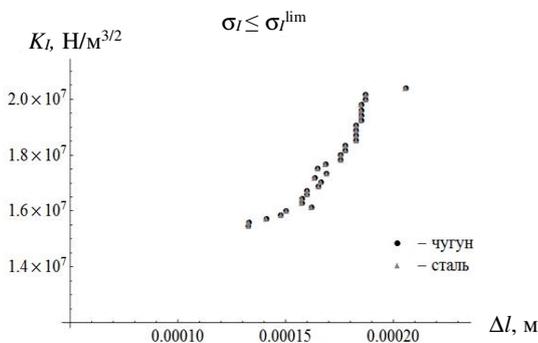


Рисунок 13 – Зависимость коэффициента интенсивности напряжений от приращения длины трещиноподобного повреждения для  $\sigma_I = \sigma_1$

**Заключение.** Представлены результаты компьютерного моделирования развития трещиноподобного повреждения в компактных образцах из чугуна с шаровидным графитом марки ВЧГГ и стали во времени. Моделирование проводилось на основе модели деформированного твердого тела с опасным объемом путем удаления опасных площадей на каждом шаге нагружения. Приращения длины повреждения моделировалось на основе эквивалентных напряжений, рассчитанных в соответствии с первой и второй теориями прочности.

Представлены зависимости коэффициента интенсивности напряжений от приращения длины трещиноподобного повреждения и опасной площади; зависимости опасной площади и ее приращения от длины трещиноподобного повреждения и его приращения.

Проведен сравнительный анализ напряженно-деформированного состояния и состояния объемной повре-

ждаемости образцов из высокопрочного чугуна с шаровидным графитом марки ВЧТГ и стали для  $Q = 20\ 000$  Н. Показано, что характеристики трещиностойкости и объемной повреждаемости высокопрочного чугуна с шаровидным графитом марки ВЧТГ близки к характеристикам стали.

#### Список литературы

1 **Морозов, Е. М.** ANSYS в руках инженера : Механика разрушения / Е. М. Морозов, А. Ю. Муйземнек, А. С. Шадский. – М. : ЛЕНАНД, 2010. – 456 с.

2 **Щербаков, С. С.** Механика трибофатических систем / С. С. Щербаков, Л. А. Сосновский. – Минск : БГУ, 2011. – 407 с.

3 Чугун и сталь в трибофатических системах современных машин и оборудования / Л. А. Сосновский [и др.] // Механика машин, механизмов и материалов. – 2014. – № 4 (29). – С. 5–20.

4 **Сосновский, Л. А.** Трещиностойкость / Л. А. Сосновский, А. В. Богданович. – Гомель : БелГУТ, 2011. – 366 с.

5 **Панасюк, В. В.** Механика разрушения и прочности материалов : справ. пособие : в 4 т. – Киев : Наукова думка, 1988–1990. – Т. 1 – 488 с.; Т. 2 – 620 с.; Т. 3. – 436 с.; Т. 4. – 680 с.

6 Исследование повреждаемости технических систем методом конечных элементов / Д. Е. Мармыш [и др.] // Строительство и восстановление искусственных сооружений : материалы IV Междунар. науч.-практ. конф., 23–24 апр. 2015 г., – Гомель : БелГУТ, 2015. – Ч. 1. – С. 51–56.

7 **Щербаков, С. С.** Применение модели деформированного твердого тела с опасным объемом для исследования характеристик трещиноподобного повреждения / С. С. Щербаков, Л. А. Шемет // Молодежь в науке-2014 : приложение к журналу «Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі». – Ч. 3. – Минск : Беларуская навука, – 2015. – С. 101–104.

8 **Шемет, Л. А.** Моделирование трещиноподобного повреждения для различных эквивалентных напряжений / С. С. Щербаков, Л. А. Шемет // Теоретическая и прикладная механика : межвед. сб. науч.-метод. статей. – Вып. 30. – Минск : БНТУ, 2015. – С. 263–269.

Получено 29.04.2016

**S. S. Sherbakov, L. A. Shemet.** Application of dangerous volumes concept for simulation of crack-like damage propagation.

Results of computer simulation of crack-like damage propagation in compact samples of VChTG high - strength cast iron with globular graphite of and steel in time for different equivalent stresses are presented. Calculations were made basing on the model of deformable solid with a dangerous volume by deleting the dangerous surfaces at each step of loading. Main characteristics of crack resistance were determined for the equivalent stresses calculated according to different theories of strength. Comparative analysis of stress – strain state and the state of volumetric damageability of samples made of VChTG high - strength cast iron with globular graphite and steel for the load of  $Q = 20\ 000$  N was made. It was shown that characteristics of crack resistance and damageability of VChTG high - strength cast iron with globular graphite are similar to the characteristics of steel.