МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

НАУЧНЫЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ В УНИВЕРСИТЕТАХ ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ

Гомель 2026

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

НАУЧНЫЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ В УНИВЕРСИТЕТАХ ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ

Материалы
VIII Международной научно-практической конференции
(Гомель, 30 октября 2026 г.)

Под общей редакцией канд. физ.-мат. наук, доцента С. П. НОВИКОВА

Гомель 2026

УДК 378.14:51
ББК 74.58
Н34

Редакционная коллегия:
С. П. Новиков (отв. редактор), канд. физ.-мат. наук;
В. Е. Евдокимович (отв. секретарь), канд. физ.-мат. наук
Д. Н. Симоненко (отв. секретарь), ст. преподаватель

Рецензент –
проректор по научной работе
Белорусского государственного университета транспорта
д-р техн. наук **А. А. Ерофеев**

Н34 **Научные и методические аспекты** математической подготовки в университетах технического профиля : материалы VIII Междунар. науч.-практ. конф. (Гомель, 30 октября 2026 г.) / М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. ; под общ. ред. С. П. Новикова. – Гомель : БелГУТ, 2026. – 123 с.
ISBN 978-985-891-284-0

Представлены результаты работы исследователей, занимающихся вопросами математического образования студентов в современных условиях. Уделено внимание как проблемам, характерным для всех учреждений высшего образования, так и специфическим проблемам университетов технического профиля. Рассмотрены методы и подходы в решении вопросов, связанных с внедрением и функционированием инновационных технологий, пути и перспективы развития информатизации образования.

Материалы могут быть рекомендованы как преподавателям учреждений высшего образования технического профиля, так и иным исследователям, занимающимся разработкой вопросов данной тематики.

УДК 378.14:51
ББК 74.58

ISBN 978-985-891-284-0

© Оформление. БелГУТ, 2026

СОДЕРЖАНИЕ

ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ СТУДЕНТОВ ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ. ОБОБЩЕНИЕ ОПЫТА ВНЕДРЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННО-КОММУНИКАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В УЧЕБНЫЙ ПРОЦЕСС 5
Аниськов В. В. О преподавании математических дисциплин 5
Ахраменко Н. А., Буй М. В., Проневич И. И. Математическая подготовка при изучении раздела «Механика» курса физики 7
Баркова Е. А., Князюк Н. В., Князева Л. П. Применение искусственного интеллекта в преподавании математических дисциплин в техническом вузе 11
Бураковский В. В. Методические аспекты преподавания теории вероятностей в университете 15
Воронова Н. П., Чернявская С. В. О математических олимпиадах в техническом университете 18
Гарист И. В., Гарист В. Э., Ковалёва Е. В. Математическое моделирование химической реакции на определение состава смеси 21
Корчинская О. В., Иванова И. П., Орлова В. С. Интегрированные методы обучения высшей математике, генетике и биометрии в подготовке студентов аграрного вуза 24
Корчинская О. В., Иванова И. П., Орлова В. С. Бинарные занятия со студентами в роли преподавателей при обучении высшей математике аграрного вуза 27
Михайлова Н. В. Философско-методологическое «Единство математического знания» и профессиональная оптимизация обучения математике в условиях цифровизации 30
Новиков С. П., Сосновский И. И. Трансформация математической подготовки студентов в эпоху искусственного интеллекта 34
Пшеничнов Ю. А. Математика как основа инженерного творчества и изобретательской деятельности в системе подготовки студентов технических университетов 37
Пшеничнов Ю. А., Задорожнюк Е. А. Принцип фундирования 40
Романчук Т. А. О некоторых аспектах школьной математической подготовки студентов-первокурсников 42

ПРЕЕМСТВЕННОСТЬ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ НА УРОВНЕ СРЕДНЕГО, СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО, ОБЩЕГО И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ 45
Евтухова С. М., Задорожнюк М. В., Авакян Е. З. Проблемы и перспективы формирования мотивированного контингента студентов 45
Ковгореня Л. В., Коваленок Н. В. Особенности организации непрерывного адаптационного курса математики в техническом вузе 48
Майсеня Л. И., Махнач В. В. Преемственность содержания как условие оптимизации обучения математике в непрерывном образовании 50

РАЗВИТИЕ СОДЕРЖАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ТЕХНИЧЕСКИХ УНИВЕРСИТЕТАХ. МЕТОДИКИ И ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ 57
Ахраменко Н. А. Потенциал системы точечных зарядов (масс) в виде суммы числового ряда 57
Великович Л. Л. Заметки по теории решения задач: еще раз о методе связных пар ... 60
Власюк Т. А., Сосновский И. И., Житникова Я. В. Особенности восприятия и переработки абстрактной математической информации современными студентами при изучении профильных дисциплин по специальности «Организация перевозок и управление на железнодорожном транспорте» 64
Власюк Т. А. Формирование профессиональных компетенций современных студентов на примере художественной литературы при изучении дисциплины «Высшая математика» 67
Дудко С. А., Дергачева И. М. Операционный метод в задачах математической физики, решение краевой задачи 3-го рода для уравнения теплопроводности 73
Дудко С. А., Задорожнюк Е. А. Метод интегрального преобразования Фурье. Решение краевых задач со стационарными неоднородностями для уравнений эллиптического типа 79
Дудко С. А., Прокопенко А. И. Метод интегрального преобразования Фурье при решении краевых задач для уравнений эллиптического типа 84
Евдокимович В. Е., Задорожнюк Е. А. Исследование многомерных случайных величин в курсе теории вероятностей 88
Комнатный Д. В. Модели систем с противоположно действующими основными факторами функционирования в комплексе математических и специальных дисциплин 95
Кузнецов В. Г., Козлов В. Г., Казаков Н. Н. Научно-методические подходы при изучении графика движения поездов на железнодорожном транспорте 99
Михальченко А. А. Опыт внедрения информационно-коммуникационных технологий математического образования иностранных студентов инженерно-технических специальностей 104
Покатилов А. Е., Киркор М. А., Воронович Ю. В., Гальмак А. М., Попов В. Н. Динамические модели движения биомеханических систем в спорте 107
Покатилов А. Е., Киркор М. А., Воронович Ю. В., Гальмак А. М. Модели динамического усиления движения в биомеханике спорта 111
Семенюта Н. Ф. Электрическая модель арифметического треугольника Паскаля ... 114
Филипенко О. В. Разработка содержания для реализации компетентностного подхода в обучении математике будущих инженеров 119
Шабалина И. П., Грибовская Е. Е. Организация самостоятельной работы студентов заочной формы обучения 121

ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ СТУДЕНТОВ ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ. ОБОБЩЕНИЕ ОПЫТА ВНЕДРЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННО-КОММУНИКАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В УЧЕБНЫЙ ПРОЦЕСС

УДК 378.147:51

О ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН

В. В. АНИСЬКОВ
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Республика Беларусь

Преподавание любой математической дисциплины начинается прежде всего с составления учебной программы. Это предусматривает разработку некоторых принципов преподавания, которые будут призваны управлять учебным процессом. Однако в настоящее время информационное пространство претерпело значительные изменения. Поэтому процедура управления этой программой учебным процессом также должна ощутимо измениться. В частности, в современных условиях преподавание дисциплины должно проходить дифференцированно и быть готовым к любым изменениям в рабочем плане. Это вовсе не противоречит самому принципу преподавания согласно утвержденной программе, поскольку тематический план и список практических, семинарских и лабораторных занятий являются примерными.

Прежде всего в начале преподавания курса необходимо проводить входные коррекционные срезы, которые позволяют оценить уровень знаний студентов, начинающих изучать этот курс. По результатам срезов преподаватель должен провести первоначальную корректировку намеченного плана работы, учитывая показатели уровня знаний студентов. Такая корректировка, кстати сказать, может быть направлена не только на более подробное изучение каких-либо вопросов, но и, возможно, на более ускоренное их изучение. Затем в процессе преподавания необходимо проводить текущие срезы, которые каждый раз будут способствовать новой корректировке. Такая методика не только покажет преподавателю, на каком этапе находится уровень усвоения студентами преподаваемого материала, но и даст возможность студентам проверить свои знания.

Кроме того, в процессе преподавания решающим фактором является возможность широкого использования различных обучающих ресурсов сети Интернет. Существует множество сайтов, которые, несмотря на обязательную часть коммерческой деятельности, всё же содержат доступную бесплатную информацию, позволяющую при должном старании разобраться в тонкостях изучаемого материала. Роль преподавателя заключается в том, чтобы найти, подробно изучить и порекомендовать студентам подходящие сайты, которые оказывают реальную помощь в изучении материала.

Ярким примером преподавания по указанной стратегии явилось обучение на факультете математики и технологий программирования Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины, иностранных студентов из Туркменистана учебным дисциплинам «Аналитическая геометрия» и «Алгебра и теория чисел». В данном направлении накоплен достаточно большой опыт преподавания: обучение туркменских студентов на указанном факультете началось еще в 2006 году (тогда факультет назывался математическим). Однако в связи с тем, что знание русского языка в туркменском обществе в настоящее время значительно ухудшилось (хотя некоторые туркменские студенты отмечают, что их близкие имеют некоторое знание русского языка), обучение этих студентов стало сопряжено с некоторыми трудностями [1, 2].

В начале преподавания указанных выше дисциплин на практических и лабораторных занятиях туркменские студенты показали хорошую активность и заинтересованность при освоении изучаемого материала и сами вызывались решать задачи в аудитории на доске. Однако довольно быстро выяснилось, что большинство из них делают ошибки даже при выполнении самых простейших арифметических действий. Особенно досадно было видеть их неумение производить простейшие арифметические операции с отрицательными числами. В такой ситуации даже не было особой необходимости проводить проверочные работы, поскольку проблема была налицо.

В Гомельском государственном университете уже не один десяток лет действует собственная система дистанционного обучения и тестирования на базе платформы Moodle, которая эффективно работает как в плане проведения различных контрольных мероприятий в форме тестов, так и в плане более эффективного усвоения изучаемого материала с использованием обучающих тестов. При этом контингент пользователей не ограничивается только студенческой аудиторией – есть также обучающие тесты для подготовки абитуриентов. Но даже и не предполагалось, что понадобятся тесты для отработки самых простейших арифметических действий. Вследствие этого был сделан вывод о нецелесообразности разовой разработки подобных тестов для текущего времени. Такая работа, возможно, будет проведена в долгосрочной перспективе при необходимости. На данном же этапе было принято решение воспользоваться уже готовыми ресурсами сети Интернет.

Поэтому была проведена обширная работа по поиску подходящих для этой цели обучающих сайтов. Поиски увенчались успехом. Найдены ресурсы, которые функционировали в рамках обучения математике с нуля. Такие ресурсы и были предложены туркменским студентам для самостоятельного изучения в рамках дифференцированных изменений в рабочем плане.

По истечении некоторого времени было отмечено, что знания и умения туркменских студентов значительно улучшились, и они стали делать меньше ошибок при выполнении арифметических действий. Таким образом, выбранная методика оказалась целесообразной, и поэтому ее применение было продолжено в дальнейшем.

Список литературы

1 **Аниськов, В. В.** О преподавании математических дисциплин туркменским студентам / В. В. Аниськов // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : сб. материалов XIII Респ. науч.-практ. конф., Брест, 24 окт. 2024 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. Д. В. Грицука. – Брест : БрГУ, 2024. – С. 34–35.

2 **Аниськов, В. В.** Об особенностях учебного процесса туркменских студентов / В. В. Аниськов // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : сб. материалов XIV Респ. науч.-практ. конф., Брест, 28 окт. 2025 г. / Брест. Гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. О. В. Матысика. – Брест : БрГУ, 2025. – С. 38–39.

УДК 51-72

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОДГОТОВКА ПРИ ИЗУЧЕНИИ РАЗДЕЛА «МЕХАНИКА» КУРСА ФИЗИКИ

Н. А. АХРАМЕНКО, М. В. БУЙ, И. И. ПРОНЕВИЧ
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Механика – один из старейших и фундаментальных разделов физики. Он изучает пространственное перемещение материальных тел и взаимодействие между ними. Исторически развитие механики шло неразрывно с развитием математики. Исаак Ньютон, Леонард Эйлер, Жозеф Луи Лагранж и Уильям Гамильтон создавали новые математические дисциплины именно для того, чтобы строго описывать физические законы окружающего мира. Дифференциальное и интегральное исчисления возникли из-за потребности описания мгновенных изменений тел в движущихся системах.

Сегодня невозможно представить освоение механики без прочного математического фундамента. Математика для механики является не просто вспомогательным вычислительным инструментом, а ее естественным и

единственным языком. Степень понимания физических процессов напрямую зависит от глубины владения математическим аппаратом. Если студент не обладает нужной математической подготовкой, изучение механики неизбежно превращается в поверхностное зазубривание формул.

Объем и структура необходимой математической подготовки существенно зависят от уровня изучения дисциплины. Изучение механики можно разделить на три стадии: элементарный (школьный), базовый инженерный (общий курс физики и техническая механика) и высший (теоретическая и аналитическая механика).

На элементарном (школьном) уровне необходимы базовые знания по алгебре, геометрии и действиям с векторами. На начальном этапе знакомства с кинематикой и динамикой в рамках школьной программы учащимся требуется уверенное владение базовой математикой. Здесь закладывается фундамент для перехода от качественного описания явлений («тело движется быстро») к количественному («тело движется с конкретной скоростью»). Первым важным навыком являются алгебраические преобразования. Физические законы выражаются формулами, связывающими между собой несколько величин. Учащийся должен уметь выражать одну переменную через другие (например, выразить время движения из квадратного уравнения) [1]

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

где s – путь, пройденный материальной точкой; v_0 – начальная скорость; a – ускорение.

Неумение проводить базовые алгебраические преобразования – одна из главных причин, почему школьники не справляются с физическими задачами. Второй значимый компонент – решение систем линейных и квадратных уравнений. В кинематике при поиске точки и времени встречи двух тел составляются уравнения движения для каждого объекта, которые затем объединяются в систему из двух уравнений. Определение времени движения по параболической траектории (например, тела, брошенного под углом к горизонту) напрямую сводится к нахождению корней квадратного уравнения.

Третий, важный аспект на этом этапе – это векторная алгебра и геометрия. Поскольку ключевые физические величины механики (сила, скорость, ускорение, импульс) являются векторными, они обладают не только числовым значением, но и направлением в пространстве. Переход от векторов к конкретным скалярным уравнениям осуществляется через нахождение проекций векторов на координатные оси. Для этого требуется свободное владение прямоугольной системой координат и элементарной тригонометрией. Надо понимать геометрический смысл синуса и косинуса угла. Без этого, например, невозможно корректно разложить силу тяжести при движении тела по наклонной плоскости.

Также базовый уровень требует графической грамотности. В механике активно используются визуальные графики зависимостей, например, координаты от времени или скорости от времени. Учащийся должен не только уметь определять из графика характер движения (равномерное, равноускоренное), но и понимать геометрический смысл, например, то, что площадь фигуры под графиком скорости численно равна пройденному телом пути.

Базовый инженерный уровень требует от студента знаний основ математического анализа. При переходе к вузовскому обучению механика трансформируется из дискретной (где рассматриваются в основном средние величины или постоянные ускорения) в непрерывную. В реальности силы редко остаются постоянными, а траектории движений оказываются сложными пространственными кривыми. Для описания таких процессов необходимы знания математического анализа.

В общем курсе физики, и в частности в механике, базовыми инструментами становятся производная и интеграл. Школьное определение скорости как [1]

$$v = \frac{s}{t}$$

справедливо только для равномерного движения. В реальности скорость постоянно меняется, и математический анализ дает строгое определение: мгновенная скорость есть первая производная от координаты (радиус-вектора) по времени [2, 3]:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Соответственно, ускорение определяется как первая производная от скорости или вторая производная от координаты по времени [2, 3]:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Обратная задача – нахождение пройденного пути по известной переменной скорости требует аппарата интегрального исчисления. Вычисление центра тяжести неоднородного плоского или объемного тела, а также расчет моментов инерции тел сложной формы напрямую сводятся к взятию определенных интегралов.

Использование математического анализа позволяет переписать фундаментальные законы динамики в более глубокой и универсальной форме. В школьном курсе второй закон Ньютона записывается как

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Однако сам Исаак Ньютон связывал силу не с ускорением, а с изменением импульса (количества движения) тела

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

и в дифференциальной форме этот закон утверждает, что скорость изменения импульса тела равна действующей на него силе:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

где $d\vec{p}$ – бесконечно малое изменение импульса за бесконечно малый промежуток времени dt. Если масса тела в процессе движения остается постоянной (m = const), ее можно вынести за знак дифференциала, и закон принимает вид

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Если учесть, что ускорение – это вторая производная от пространственной координаты по времени, то получаем главное дифференциальное уравнение движения материальной точки:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = F(\vec{r},\vec{v},t).$$

Данная запись наглядно демонстрирует, что сила в общем случае не является константой. Она может зависеть от положения тела в пространстве (например, сила гравитационного притяжения или упругости), от его скорости (сила сопротивления среды) и от самого времени (внешнее переменное воздействие). В реальном трехмерном пространстве это векторное уравнение можно расписать как систему из трех скалярных дифференциальных уравнений второго порядка в проекциях на оси декартовых координат (x, y, z):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z.$$

Решение этих систем уравнений – фундаментальная задача инженеров. Через эти дифференциальные соотношения рассчитываются траектории космических аппаратов, поведение автомобилей при экстренном торможении и другие процессы.

Высший уровень изучения механики – это теоретическая механика. Здесь необходимо знание тензорного и вариационного исчисления. Математический аппарат здесь усложняется многократно. Механическое движение системы описывается не уравнениями Ньютона, а уравнениями Лагранжа второго рода или каноническими уравнениями Гамильтона [4]. Эти методы позволяют рассчитывать сложнейшие многосвязные системы, например, движение многозвенных промышленных роботов-манипуляторов. Для решения задач некоторых разделов могут использоваться теория функций комплексного переменного и уравнения математической физики, позволяющие решать сложные краевые задачи на границах разделов сред.

Таким образом, математическая подготовка является ключевым фактором,

определяющим успех в изучении механики на любом уровне. Математика дает механике строгую логику, абстрактное мышление и универсальный язык описания явлений. При этом, как отмечалось в [5], препятствием для освоения вузовского курса физики является недостаточная базовая подготовка по математике и физике. Особенно это касается студентов первого и второго курсов, когда закладывается фундамент для изучения других дисциплин.

Список литературы

1 **Исаченкова, Л. А.** Физика : учеб. пособие для 9-го кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения / Л. А. Исаченкова, А. А. Сокольский, Е. В. Захаревич ; под ред. Л. А. Исаченковой. – Минск : Народная асвета, 2019. – 207 с.

2 **Трофимова, Т. И.** Курс физики : учеб. пособие для вузов / Т. И. Трофимова. – 18-е изд., стер. – М. : Академия, 2010. – 560 с.

3 **Сивухин, Д. В.** Общий курс физики. В 5 т. Т. 1. Механика / Д. В. Сивухин. – М. : Физматлит, 2005. – 560 с.

4 **Ландау, Л. Д.** Теоретическая физика. В 10 т. Т. 1. Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1988. – 215 с.

5 **Ахраменко, Н. А.** Математическая подготовка при изучении курса физики / Н. А. Ахраменко, М. В. Буй, И. И. Проневич // Научные и методические аспекты математической подготовки в университетах технического профиля : материалы VII Междунар. науч.-практ. конф. / М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. ; под общ. ред. С. П. Новикова. – Гомель : БелГУТ, 2025. – С. 11–14.

УДК 004.8:[378.147+51]

ПРИМЕНЕНИЕ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

Е. А. БАРКОВА, Н. В. КНЯЗЮК, Л. П. КНЯЗЕВА
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, г. Минск

На современном этапе развития высшего технического образования быстрое распространение технологий искусственного интеллекта (ИИ) коренным образом меняет академическую среду, традиционные дидактические подходы к преподаванию, классические методики преподавания. В первую очередь это касается фундаментальных математических дисциплин – именно линейная алгебра, математический анализ, теория вероятностей (вместе с математической статистикой), теория оптимизации, числен-

ные методы, анализ данных составляют основу современных систем искусственного интеллекта (особенно машинного и глубокого обучения).

Использование ИИ в преподавании математических дисциплин приводит к тому, что преподавание фундаментальной математики меняет характер с вычислительного на концептуально-аналитический, что смещает фокус с простой передачи информации на развитие **критического мышления**, анализ данных и проверку подлинности знаний. Поэтому интеграция ИИ в преподавание математических дисциплин является важным фактором повышения качества подготовки будущих инженеров, что соответствует Концепции развития инженерного образования в Республике Беларусь [1]. Применение больших языковых моделей (LLM), таких как ChatGPT, Google Gemini, интеллектуальных **ИИ-сервисов** Microsoft Copilot и интеллектуальных математических ядер (WolframAlpha) меняет *цель преподавания* – основной методологический сдвиг заключается в переносе акцента с технического выполнения алгоритма (который полностью делегируется ИИ) на этапы постановки задачи и интерпретации результатов. Сравнительный анализ трансформации преподавания математических дисциплин приведен на рисунке 1.

Дисциплина	***Что полностью автоматизировал ИИ***	***На чем теперь фокусируется методика***
Математический анализ	Вычисление пределов, производных, интегралов, разложение в ряды	Понимание сути предельных переходов, условий сходимости, топологических основ анализа
Линейная алгебра	Операции с матрицами, захождение собственных значений, жордановых форм	Геометрический смысл линейных преобразований, применение SVD-разложения в анализе данных
Дифференциальные уравнения	Аналитическое решение стандартных типов уравнений (Бернулли, Риккати и др.)	Качественная теория дифференциальных уравнений, устойчивость по Ляпунову, бифуркации
Теория вероятностей	Стандартные комбинаторные расчеты. Применение формулы Байеса по шаблону	Понимание стохастических процессов, интерпретация статистических гипотез и парадоксы
Числовые методы	Написание стандартного кода для интерполяции, аппроксимации, численного интегрирования и решения СЛАУ	Анализ жестких систем, оценка и минимизация погрешностей округления, выбор критериев сходимости, физическая верификация результатов

Рисунок 1 – Сравнительный анализ трансформации преподавания дисциплин

Изменение подходов в преподавании вышеперечисленных дисциплин предоставляет участникам образовательного процесса новые возможности. Обучающимся – индивидуальное разъяснение, быстрый доступ к справочным сведениям, проверку вычислений, визуализацию сложных объектов,

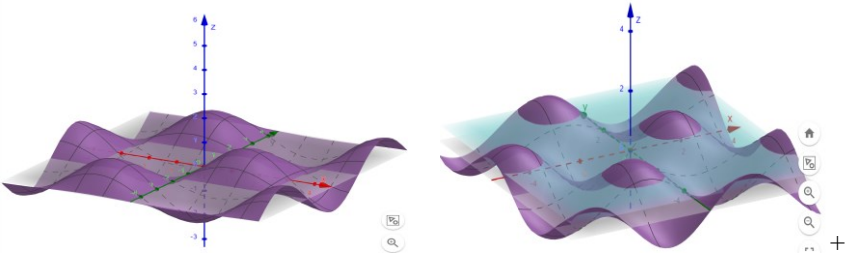
помощь в написании кода, а преподавателям – помощь в создании онлайн-курсов, учитывающих начальный уровень знаний и индивидуальные потребности студентов, автоматическую проверку задач и распознавание образцов, создание адаптивных обучающих систем [2].

Внедрение ИИ в практику работы преподавателя **кафедры** высшей математики – это не дань моде. **ИИ стал полноценным инструментом для преподавателей,** способным взять на себя до 80 % рутинных задач **по методическому обеспечению учебного процесса. Преподавателями кафедры используются LLM** Google Gemini и виртуальный ассистент Microsoft Copilot для проектирования и автоматизации создания контента, генерации адаптивных заданий, проверки их выполнения. Цель применения ИИ на лекциях – визуализация абстрактных понятий и активизация внимания аудитории, ИИ выступает в роли интеллектуального моста между строгим аналитическим описанием и его наглядным визуальным воплощением.

Пример 1. Визуализация функций двух переменных с использованием онлайн-графикатора GeoGebra 3D Graphing (работает в браузере, без установки).

Запрос: *«1. Показать наглядно взаимодействие двух периодических процессов на примере функции $z = \sin x \cos y$. Продемонстрировать, что график функции – поверхность. 2. Добавить линии уровня $z = 0.5$ на эту же поверхность»*.

Ответ: *«Поверхность $z = \sin x \cos y$ – это наглядная демонстрация взаимодействия двух периодических процессов, где волны по оси x (синус) и волны по оси y (косинус) накладываются друг на друга и создают чередующиеся «холмы» и «впадины». Синус создаёт волны вдоль оси x. Косинус создаёт волны вдоль оси y. В точке $(x; y)$ значение z – это произведение двух колебаний»*.



Пример 2. Интуитивное определение криволинейного интеграла первого рода.

Запрос: *«1. Дать интуитивное определение криволинейного интеграла первого рода 2. Проиллюстрировать геометрический смысл. В качестве кривой рассмотреть спираль»*.

Ответ: *«Криволинейный интеграл первого рода – это способ “просуммировать” значения функции вдоль кривой, как будто вы измеряете массу, температуру или плотность, распределённую по извилистому пути. Геометрически он равен взвешенной длине кривой, где весом служит функция $f(x, y, z)$. Спираль – отличный пример: она показывает, как интеграл учитывает и форму кривой, и изменение функции вдоль неё. Представьте, что кривая – это нить, а функция f – это толщина краски, которой ты покрываешь эту нить. Где краска густая – вклад большой. Где краска слабая – вклад маленький. Интеграл – это общее количество краски, нанесённой на всю кривую.*



Спиральная иллюстрация показывает именно то, что нужно: изогнутую спираль, маленькие дуговые элементы ds, и значения функции $f(x, y)$, которые дают вклад f ds вдоль кривой».

Интеграция искусственного интеллекта (ИИ) в высшее образование приводит к изменению роли преподавателя – происходит переход от трансляции знаний к управлению процессом их освоения. Преподаватель перестает быть единственным источником информации, теперь его главная задача – научить студентов формулировать запросы ИИ (промпты), критически оценивать данные, генерируемые ИИ, анализировать ошибки нейросетей и комбинировать разные инструменты. При проведении практических и лабораторных занятий преподаватель может формировать инвариантное ядро темы, а ИИ помогает генерировать под каждого студента уникальные контекстные задачи и адаптировать скорость и сложность материала под уровень конкретного студента.

Отдельного обсуждения заслуживают новые подходы к оценке знаний – *оценка процесса, а не результата.*

Современное инженерное образование уже невозможно представить без использования технологий ИИ в качестве помощника и инструмента в изучении математических дисциплин. Для более эффективного использования их в учебном процессе ниже представлено сравнение лучших вариантов, разделенных по их сильным сторонам, предложенное (!) **LLM** Google Gemini (рисунок 2).

ИИ-помощник	*Сильная сторона*	*Для чего лучше всего подойдет*
OpenAI o1 / o3 *или* ***ChatGPT Plus***	Глубокое логическое мышление	Проверка сложных математических доказательств, пошаговый разбор теорем, поиск логических ошибок в работах студентов
Claude 3.5 Sonnet *(от Anthropic)*	Идеальный код и LaTeX	Составление методичек, генерация красивых формул и графиков в LaTeX, и написание скриптов (Python/MATLAB) для визуализации функций
ChatGPT *(с Плагином* ***Wolfram****)*	Абсолютная точность расчетов	Точные вычисления: интегралы, дифференциальные уравнения, матричные операции без ИИ-галлюцинаций
DeepSeek-R1	Доступность и логика	Бесплатная (или недорогая) альтернатива с открытым Кодом, которая отлично справляется с олимпиадными задачами и математической логикой

Рисунок 2 – Сравнение технологий ИИ

Список литературы

1 Концепция развития инженерного образования в Республике Беларусь на период до 2035 года : постановление Совета Министров Респ. Беларусь от 15 марта 2025 г. – URL : https://pravo.by/document/?guid=3871&p0=C22500264 (дата обращения: 13.09.2026).

2 **Князюк, Н. В.** От автоматизированных систем управления обучением к адаптивным обучающим системам / Н. В. Князюк, О. В. Рыкова // Научные и методические аспекты математической подготовки в университетах технического профиля : материалы VII Междунар. науч.-практ. конф., Гомель, 31 октября 2025 г.; под общ. ред. С. П. Новикова. – Гомель : БелГУТ, 2025. – С. 14–16.

УДК 378.147:519.2

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В УНИВЕРСИТЕТЕ

В. В. БУРАКОВСКИЙ
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Республика Беларусь

Многолетний опыт преподавания курса «Теория вероятностей и математическая статистика» [1, с. 4] на различных технических и прикладных специальностях в университете дает возможность перечислить некоторые методические рекомендации преподавателям по проведению практических и лабораторных занятий [2, с. 121]. На первом же занятии необходимо четко сформулировать требования, предъявляемые обучающимся в течение семестра, в том числе количество контрольных мероприятий и систему

оценивания знаний (она может включать в настоящее время и проведение экзаменационного тестирования в компьютерном классе). Сразу выдаются материалы для проведения занятий [3, с. 4; 4, с. 5; 5, с. 5] (они есть в электронном виде), а также перечень теоретических вопросов для подготовки к экзамену.

По теме «Классическое определение вероятности» необходимо отметить следующие тонкие с методической точки зрения моменты. Во-первых, в лекциях нужно обязательно привести самые простые примеры строгой записи пространств элементарных исходов $\mathbf{\Omega}$ при бросании одной и двух монет и игральных костей. Во-вторых, при решении практических задач необходимо обратить особое внимание на классификации выборок (упорядоченные или неупорядоченные, с возвращением или без возвращения). В-третьих, для применения формулы классического определения вероятности заостряется внимание на следующих обязательных условиях: пространство элементарных исходов должно быть конечным, а все исходы равновероятными. Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то применять формулу уже нельзя. Алгоритм решения таких задач включает в себя строгую запись пространства элементарных исходов $\mathbf{\Omega}$, события A, вероятность которого нужно найти, дальнейший подсчет общего количества исходов $N(\mathbf{\Omega})$ и числа исходов $N(A)$, благоприятствующих событию A. Здесь нужно обратить внимание на использование приведенной в лекциях таблице общего числа выборок объема k из n элементов из комбинаторики и формулу гипергеометрического распределения.

По теме «Геометрические вероятности» нужно заметить, что практические задачи вызывают трудности у студентов, поскольку при их решении необходимо ввести один или несколько параметров, определяющих пространство элементарных исходов $\mathbf{\Omega}$ и событие A, вероятность которого нужно посчитать. Эти задачи отличаются тем, что $\mathbf{\Omega}$ и A состоят из бесконечного числа исходов. Необходимо давать рисунки, особенно они важны для понимания при нескольких вводимых параметрах, поскольку нужно рассчитывать меры соответствующих фигур.

При решении задач по теме «Теоремы сложения и умножения вероятностей» необходимо обратить внимание студентов на вдумчивое чтение условий задач, в которых появляются выражения «хотя бы», «не более», «не менее», «более», «менее», «по крайней (меньшей) мере» и т. п. В таких задачах часто нужно находить не одну вероятность, а сумму вероятностей нескольких событий, из которых состоит искомое событие. Часто для более рационального решения таких задач находят вероятности противоположных событий, если это уменьшает вычисления. В задачах с использованием теорем умножения важно определить, являются ли события независимыми либо зависят друг от друга. Часто встречаются задачи, которые можно решить и по классическому определению вероятностей, и по обобщенной теореме

умножения вероятностей. При оформлении решения нужно четко формулировать как события, так и их условные вероятности.

По темам «Формула полной вероятности» и «Формула Байеса» условия задач часто очень похожи, поэтому нужно объяснить студентам, в чем их отличие. При решении задач по первой формуле необходимо найти вероятность события, которое зависит от нескольких других событий (гипотез). По второй формуле решать нужно задачи, в которых некое событие уже произошло и нужно найти условную вероятность гипотезы в предположении, что событие уже имело место. Здесь важно сделать акцент на формулировке искомого события и гипотез, от которых оно зависит, а также определении всех связанных с ними вероятностей.

При решении задач по теме «Формула Бернулли» нужно подробно остановиться на условиях применения этой формулы и определении независимых испытаний Бернулли. Ключевыми здесь являются конечное число испытаний, их независимость, только два исхода в каждом испытании и неизменность вероятностей этих исходов. Формула полиномиального распределения обобщает формулу Бернулли на случай более двух исходов в каждом из независимых испытаний. Для применения формулы важно правильно записать все параметры и вероятности из условия задачи, поскольку их достаточно много.

По теме «Дискретные случайные величины и их числовые характеристики» проблемы обычно возникают лишь при составлении рядов распределения случайных величин, хотя там в основном используются формулы, которые были в предыдущих темах. Расчеты числовых характеристик по формулам проблем не вызывают.

Для непрерывных случайных величин важно понимание студентами, как определяются функция и плотность распределения вероятностей, их взаимосвязь. Числовые характеристики этих случайных величин сводятся к нахождению интегралов, что также вызывает трудности при подсчетах.

Таковы основные рекомендации при проведении практических занятий по базовым темам теории вероятностей.

Список литературы

1 **Бураковский, В. В.** Основы высшей математики / В. В. Бураковский, Т. В. Бородич. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2012. – 34 с.

2 **Бураковский, В. В.** О преподавании теории вероятностей и математической статистики в университете / В. В. Бураковский // Научные и методические аспекты математической подготовки в университетах технического профиля : материалы V Междунар. науч.-практ. конф. (Гомель, 27 апреля 2023 г.). – Гомель : БелГУТ, 2023. – С. 121–122.

3 **Бураковский, В. В.** Теория вероятностей и математическая статистика: лабораторный практикум: в 2 ч. Ч. 1 / В. В. Бураковский. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2002. – 52 с.

4 **Бураковский, В. В.** Теория вероятностей и математическая статистика: лабораторный практикум : в 2 ч. Ч. 2 / В. В. Бураковский, Н. М. Курносенко. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 39 с.

5 **Бураковский, В. В.** Лабораторный практикум по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов математического и экономического факультетов / В. В. Бураковский. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 1993. – 42 с.

УДК 372.851

О МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАДАХ В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Н. П. ВОРОНОВА, С. В. ЧЕРНЯВСКАЯ
Белорусский национальный технический университет, г. Минск

Развитие образования в Республике Беларусь в настоящее время основывается на решении проблем качества и эффективности образования, начиная от довузовского и заканчивая вузовским и последипломным. Образование является стратегической областью, во многом обеспечивающей национальную безопасность. Нередко о конкурентоспособности страны судят по уровню образовательной подготовки ее подрастающего поколения, поскольку в современных условиях главным ресурсом стал именно человеческий капитал. Современная экономика держится на высоких технологиях и IT, а разрабатывать конкурентоспособные продукты могут только высококвалифицированные специалисты.

Критерием качества образования может служить соотношение поставленных целей и полученного результата. Задачи технологии достижения поставленных целей сводятся к проблемам:

– эффективности учебного процесса, в том числе контроля, то есть получения информации обратной связи;

– оценки результатов учебной деятельности, то есть соотнесения результатов образовательного процесса с предполагаемыми целевыми результатами.

В высшем техническом учебном заведении основными факторами качества образования являются:

– качество обучения и учебно-методического обеспечения учебного процесса;

– соответствие образовательного процесса современным профессиональным стандартам и востребованности получаемых студентами специальностей на рынке труда;

– баланс между фундаментальной предметной подготовкой и профессиональной инженерной компетентностью, то есть получением достаточного

количества качественных профессиональных знаний;

– наличие независимой и релевантной системы оценки знаний (мониторинга учебных достижений);

– уровень базовой подготовки абитуриентов, особенно по математике и физике;

– осознанный выбор профиля обучения, мотивация и желание учиться;

– уровень университетской науки.

Развитие науки требует существенного прогресса в образовательной системе. Результаты научных исследований, в том числе и университетских, востребованы на практике и обеспечивают взаимообогащение образовательного процесса и производственных процессов. Вопрос о компетентных кадрах для производства во многом решается в университетской среде. Поэтому в последнее время возникла необходимость перехода к «модели устойчивого развития», где образование является механизмом воспроизводства общественного интеллекта. Одним из путей повышения научного потенциала обучающихся являются предметные университетские олимпиады. Они трансформируют базовые предметные знания в фундаментальных дисциплинах в навыки реальной научно-исследовательской работы. В отличие от школьных олимпиад, где ценятся скорость решения и знание конкретных алгоритмов решения специфических задач, студенческие олимпиадные задания приближены к реальным проблемам научных семинаров по векторной алгебре и аналитической геометрии, интегральному и дифференциальному исчислению и другим основным разделам высшей математики. Олимпиадная математика учит анализировать условия, выдвигать и проверять гипотезы, искать нестандартные шаги в решении задач. Такие задачи развивают у студентов критическое мышление, умение проводить глубокий анализ и синтез, а это есть фундамент для научных исследований и написания научных статей.

В Белорусском национальном техническом университете (БНТУ) для выявления обучающихся, обладающих высоким уровнем компетенций в области математики, ежегодно проводятся студенческие математические олимпиады. Победители олимпиады участвуют в соответствующих республиканских олимпиадах, но главная цель такого участия в испытаниях – выявление обучающихся, которые могут привлекаться к научным исследованиям уже со студенческой скамьи. Покажем ряд заданий, предлагавшихся студентам младших курсов на студенческой олимпиаде по математике БНТУ в 2026 году. Каждая задача оценивалась определенным количеством баллов, о чем заранее было известно студентам. Так, первая задача «стоила» 5 баллов, вторая – 7, третья – 6, четвертая – 8, пятая – 8, шестая – 10, седьмая – 9 и восьмая – 7 баллов. Время написания работы – три академических часа без перерыва.

Задания олимпиады БНТУ по математике 2026 года

1. Определить, сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 4, \\ x - y^2 + a = 0 \end{cases} \text{ если } a \in [-2; 2].$$

2. Три продавца торговали одним и тем же товаром в количестве 10,16 и 26 штук. До полудня они продали часть товара по одной и той же цене. После полудня они понизили цену и распродали оставшийся товар снова по одинаковой цене. Все продавцы получили одинаковую выручку в 35 рублей. Определить, по какой цене продан товар до и после полудня.

3. Найти минимальную площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OM}$, где O (0; 0), A (-1; 1), а M (x; y) – точка на линии, описываемой уравнением $y = 2e^{-x}$.

4. Составить уравнение касательной к графику четной функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$, если известно, что для всех действительных x справедливо равенство

$$f\left(2x^3 - x\right) - 4x^2 \cdot f\left(x^2 - x - 1\right) = 8x^5 - 8x^3 - 11x^2 + 2.$$

5. Определить силу давления масла на вертикальную стенку, имеющую форму полукруга с радиусом $R = 5$ м, диаметр которого находится на поверхности масла. Плотность масла 900 кг/м^3.

6. Вычислить объем тела, вырезанного цилиндром $x^2 + y^2 = 2ax$ из параболоида $y^2 + z^2 = 4ax$.

7. Исследовать на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n.$$

8. Вычислить криволинейный интеграл по замкнутому контуру

$$\circ \qquad y\left(xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)\right)dy,$$

где L – контур, ограничивающий область D, которая задана неравенствами

$$y \le x \le y + 2a, \ 0 \le y \le a, \ (a > 0).$$

Заметим, что ни одна из задач в предложенной постановке не рассматривается на занятиях при изучении курса математики, поскольку содержит в себе интеграцию знаний из нескольких разделов курса. Для решения студентам требуется наличие не только глубоких и системных знаний курса

математики, но и креативных умений соединять различный учебный материал в нестандартных комбинациях.

Список литературы

1 **Ласый, П. Г.** Математические олимпиады БПИ – БГПА – БНТУ / П. Г. Ласый. – Минск : БНТУ, 2024. – 186 с.

2 **Базылев, Д. Ф.** Студенческие математические олимпиады как средство развития интереса к научной математической деятельности/ Д. Ф. Базылев, В. Н. Берник, О. Н. Пирютко // Матэматыка і фізіка. – № 2. – 2023. – С. 60–63.

3 **Ефремов, А. А.** О специфике подготовки студентов к математическим олимпиадам в высшей школе / А. А. Ефремов // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях : материалы Междунар. науч.-практ. семинара, Могилев, 18 февраля 2016 г. / под ред. И. С. Сазонов. – Могилев : Белорусско-Российский университет, 2016. – С. 19–21.

4 **Попов, И. Ю.** Задачи повышенной трудности в курсе высшей математики / И. Ю. Попов // СПб. : СПбГУ ИТМО, 2008. – 214 с.

5 **Садовничий, В. А.** Задачи студенческих математических олимпиад / В. А. Садовничий, А. А. Григорьян, С. В. Конягин. – М. : МГУ, 1987. – 311 с.

УДК 378.147:51

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ НА ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОСТАВА СМЕСИ

И. В. ГАРИСТ, В. Э. ГАРИСТ, Е. В. КОВАЛЁВА
Могилевский государственный университет им. А. А. Кулешова, Республика Беларусь

Рассмотрим математическую модель типовой химической задачи на определение состава смеси.

Задача. При сжигании в избытке кислорода (O_2) 1,10 г смеси метанола (CH_3OH) и этанола (C_2H_5OH) образовалось 0,896 л диоксида углерода (CO_2), измеренного при нормальных условиях. Определить количественный состав смеси CH_3OH и C_2H_5OH.

Переформулируем условие задачи в терминах математики. Зададим процессы сжигания спиртов векторами $\overline{r}$ _ CH_3OH и $\overline{r}$ _ C_2H_5OH. Тогда реакция окисления смеси будет выражена результирующим вектором

$\overline{r}$ _ смеси = $\overline{r}$ _ CH_3OH + $\overline{r}$ _ C_2H_5OH.

Координатами этих векторов целесообразно считать массу спирта и объем газа: $\overline{r}$ _ (масса спирта в граммах; объем CO_2 в литрах).

По условию задачи известен результирующий вектор $\overline{r}$ _ смеси(1,10; 0,896) (с началом в точке (0; 0)):

$\overline{r}$ _ смеси(1,10; 0,896) = $\overline{r}$ _ $CH_3OH(m_1; V_1)$ + $\overline{r}$ _ $C_2H_5OH(m_2; V_2)$.

Требуется найти векторы $\overline{r}$ _ $CH_3OH(m_1; V_1)$ и $\overline{r}$ _ $C_2H_5OH(m_2; V_2)$.

В работе [1] разбирается решение поставленной задачи в системе компьютерной математики (СКМ) SMath Studio [2] методами линейной алгебры.

В частности, в СКМ SMath Studio приводится методика расчета коэффициентов двух параллельных реакций. В результате расчета имеем реакции с коэффициентами:

$$\begin{cases} 2CH_3OH+3O_2 = 2CO_2+4H_2O \\ C_2H_5OH+3O_2 = 2CO_2+3H_2O \end{cases}.$$

Из коэффициентов этих реакций можно рассчитать координаты радиус-векторов $\overline{r}$ _ CH_3OH и $\overline{r}$ _ C_2H_5OH: по уравнению 1 из 1 моль метанола образуется 1 моль CO_2. Тогда для реакции с метанолом $\overline{r}$ _ $CH_3OH(1*32; 1*22,4)$ и $\overline{r}$ _ $C_2H_5OH(1*46; 2*22,4)$. Первые координаты – число моль спирта · молярная масса спирта, вторые – число моль CO_2 · молярный объем газа. Поэтому фактически получили задачу векторной алгебры: разложить вектор $\overline{r}$ _ $(1,10; 0,896)$ по базису векторов $\overline{r}$ _ $CH_3OH(32; 22,4)$ и $\overline{r}$ _ $C_2H_5OH(46; 2*44,8)$. Полученное в [1] решение даёт следующий состав смеси: 0,64 г метанола и 0,46 г этанола.

Рассмотрим решение поставленной задачи методами аналитической геометрии. Для такого варианта решения зададим 4 прямые своими уравнениями. Две прямые задают прямую пропорциональность между молярной массой спирта и объемом углекислого газа в реакции с метанолом и реакции с этанолом. Две другие прямые им параллельны и проходят через экспериментальную точку (1,10; 0,896) (рисунок 1).

$$m_metanol(x) := \frac{22,4}{32} \cdot x \qquad m_etanol(x) := \frac{22,4 \cdot 2}{46} \cdot x$$

$$m_smesi_m(x) := 0,896 + \frac{22,4}{32} \cdot (x - 1,1) \qquad m_smesi_e(x) := 0,896 + \frac{22,4 \cdot 2}{46} \cdot (x - 1,1)$$

Рисунок 1 – Прямые, описывающие реакцию

Если все эти прямые построить в одной системе координат, то нужные пары непараллельных прямых пересекутся в точке, абсцисса которой и есть ответ на вопрос задачи (рисунок 2)

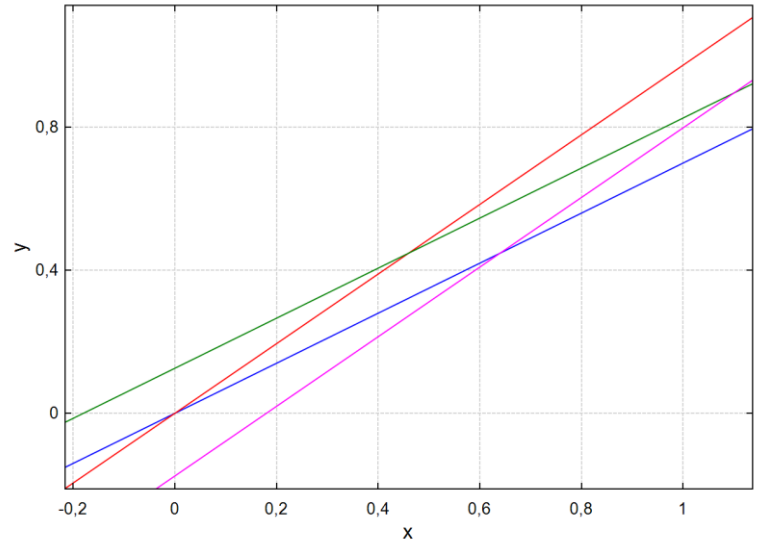


Рисунок 2 – Графическое решение задачи

Возможности масштабирования графиков в СКМ SMath Studio достаточно обширные. При этом результаты построений можно уточнить и аналитически (рисунок 3).

$$\text{solve}\left(m_metanol\left(x\right)=m_smesi_e\left(x\right);\ x\right)=0,64 \qquad m_smesi_e\left(0,64\right)=0,448$$

$$\text{solve}\left(m_etanol\left(x\right)=m_smesi_m\left(x\right);\ x\right)=0,46 \qquad m_smesi_m\left(0,46\right)=0,448$$

Рисунок 3 – Уточнение результатов построений аналитически

Уточнение результатов построения на рисунке 3 производится в СКМ SMath Studio символьно.

Список литературы

1 **Гарист, В. Э.** Модель химической реакции – геометрический подход в системах компьютерной математики / В. Э. Гарист, Е. В. Ковалёва, И. В. Гарист // Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике : сб. материалов Междунар. науч.-практ. конф., 21–23 мая 2026 г., г. Брест. – Брест : БрГУ, 2026. – С. 122–124.

2 SMath Studio : [офиц. сайт]. – URL: https://smath.info/ru-RU (дата обращения: 20.08.2026).

УДК 378.147:51:575

ИНТЕГРИРОВАННЫЕ МЕТОДЫ ОБУЧЕНИЯ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ, ГЕНЕТИКЕ И БИОМЕТРИИ В ПОДГОТОВКЕ СТУДЕНТОВ АГРАРНОГО ВУЗА

О. В. КОРЧИНСКАЯ, И. П. ИВАНОВА, В. С. ОРЛОВА
Омский государственный аграрный университет им. П. А. Столыпина, Российская Федерация

Современное аграрное образование должно обеспечивать подготовку специалистов, способных применять математические методы для решения прикладных задач в области генетики и селекции. Дисциплины «Высшая математика» и «Генетика и биометрия» традиционно преподаются раздельно, что создает разрыв между теоретическим математическим аппаратом и его практическим применением в генетических исследованиях. Актуальность исследования обусловлена противоречием между потребностью в формировании у студентов-аграриев целостного представления о математических методах обработки биологических данных и традиционной раздельной моделью преподавания математики и генетики. Студенты часто не видят связи между математическими понятиями и их применением в генетическом анализе, что снижает мотивацию к изучению обеих дисциплин и качество формируемых компетенций [1, 2, 5].

Таким образом, существует объективная необходимость в разработке и внедрении интегрированных методов обучения, обеспечивающих синергетический эффект при изучении математических и генетико-биометрических дисциплин.

Цель исследования – теоретически обосновать и экспериментально проверить эффективность интегрированной методики обучения студентов аграрного вуза по дисциплинам «Высшая математика» и «Генетика и биометрия».

Исследование проводилось в 2024–2026 годах на базе Омского государственного аграрного университета. В эксперименте приняли участие 34 студента первого курса факультета зоотехнии, товароведения и стандартизации, обучающиеся по направлению 36.03.02 «Зоотехния». Студенты были разделены на две группы: контрольную (КГ, $n = 17$) и экспериментальную (ЭГ, $n = 17$). В контрольной группе обучение проводилось по традиционной раздельной методике: «Высшая математика» и «Генетика и биометрия» преподавались как самостоятельные дисциплины без специальной координации содержания. В экспериментальной группе была внедрена интегрированная методика, включающая следующие компоненты:

– согласованные рабочие программы дисциплин с перекрёстными ссылками на темы;

– интегрированные практические занятия, на которых математический аппарат применялся для решения генетических задач (расщепление признаков, оценка наследуемости, дисперсионный анализ количественных признаков);

– сквозные расчетно-графические работы, требующие применения методов математической статистики к генетическим данным;

– совместные консультации преподавателей обеих дисциплин.

Ключевыми междисциплинарными связями, положенными в основу интегрированной методики, стали теория вероятностей и закономерности наследования; математическая статистика и биометрический анализ; дисперсионный анализ и оценка наследуемости признаков; корреляционно-регрессионный анализ и анализ взаимосвязи генетических и фенотипических признаков [4, 6].

До внедрения интегрированной методики обе группы показали примерно одинаковый уровень знаний. Средний балл контрольного тестирования составил 3,2 в контрольной группе и 3,3 – в экспериментальной группе. Различия статистически недостоверны ($t = 0,76$; $p > 0,05$), что подтверждает сопоставимость групп на исходном уровне.

После внедрения интегрированной методики в экспериментальной группе в течение семестра было проведено итоговое контрольное тестирование. Результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1 – **Результаты итогового контрольного тестирования студентов по дисциплинам «Высшая математика» и «Генетика и биометрия»**

Показатель	Группа ($n = 17$)	
	Контрольная	Экспериментальная
Средний балл по высшей математике	3,3	4,2
Средний балл по генетике и биометрии	3,3	4,3
Доля качественной успеваемости (4 и 5), % по математике	52,4	71,4
Доля качественной успеваемости (4 и 5), % по генетике и биометрии	54,8	76,2
Интегрированный показатель (средний по двум дисциплинам)	3,65	4,25

Как видно из таблицы 1, студенты экспериментальной группы показали более высокие результаты по обеим дисциплинам. Средний балл по высшей математике вырос с 3,3 до 4,2 (прирост 0,9 балла), по генетике и биометрии – с 3,3 до 4,3 (прирост 1,0 балл). В контрольной группе рост по обеим дисциплинам составил 0,9 и 1 балл соответственно. Различия между группами статистически достоверны $P > 0,95$.

Для оценки динамики мотивации студентов проводилось анкетирование по 5-балльной шкале. Результаты представлены в таблице 2.

Таблица 2 – **Динамика уровня учебной мотивации студентов (средний балл по 5-балльной шкале)**

Критерий мотивации	До эксперимента (КГ / ЭГ)	После эксперимента	
		Контрольная группа	Экспериментальная группа
Понимание прикладной значимости математики	2,8 / 2,9	2,9	4,3
Интерес к изучению генетики	3,5 / 3,6	3,7	4,5
Уверенность в выполнении расчётных задач	2,9 / 3,0	3,2	4,2
Общая учебная мотивация	3,2 / 3,3	3,4	4,4

Данные таблицы 2 показывают, что наибольший прирост мотивации в экспериментальной группе произошел по критерию «понимание прикладной значимости математики» – с 2,9 до 4,3 балла (прирост 1,4 балла). Это свидетельствует о том, что интегрированное обучение помогло студентам осознать связь между математическим аппаратом и его практическим применением в генетике.

Отдельного внимания заслуживает анализ выполнения сквозных расчетно-графических работ, в которых студенты экспериментальной группы применяли методы математической статистики для обработки реальных генетических данных. Средний балл за выполнение этих работ в экспериментальной группе составил 4,1, тогда как аналогичные по сложности задания в контрольной группе были выполнены на среднем уровне 3,4 балла.

Полученные результаты согласуются с выводами исследователей о том, что интеграция дисциплин естественнонаучного и профессионального циклов способствует повышению качества подготовки специалистов [1, 3]. Применение математических методов к конкретным генетическим задачам делает абстрактный материал более наглядным и мотивирующим, а генетические расчеты – более обоснованными и корректными.

Разработанная интегрированная методика преподавания «Высшей математики» и «Генетики и биометрии», основанная на согласованных рабочих программах, интегрированных практических занятиях и сквозных расчетно-графических работах, показала высокую педагогическую эффективность, выраженную в повышении успеваемости и мотивации обучающихся.

Список литературы

1 **Иванова, И. П.** Способы повышения мотивации обучения студентов в вузе / И. П. Иванова, О. В. Корчинская // Научное и техническое обеспечение АПК, состо-

яние и перспективы развития : сб. XIII Междунар. науч.-практ. конф., Омск, 27 февраля 2025 года. – Омск : ОмГАУ им. П. А. Столыпина, 2025. – С. 672–675.

2 **Кодиров, К.** Инновационный метод обучения высшей математике / К. Кодиров, Й. Йигиталиев // Экономика и социум. – 2020. – № 4 (71). – С. 431–434.

3 **Корчинская, О. В.** Применение математического моделирования в селекции молочного скота / О. В. Корчинская, И. П. Иванова, В. Г. Емельянова // Математическое и компьютерное моделирование : сб. материалов X Междунар. науч. конф., Омск, 10 февраля 2023 года. – Омск : ОмГУ им. Ф. М. Достоевского, 2023. – С. 109–111.

4 Опыт проведения игрового занятия по дисциплине «Высшая математика» при подготовке специалистов в АПК / О. В. Корчинская, И. П. Иванова, Н. В. Щукина, В. Г. Емельянова // Инновационные векторы развития АПК: перспективы повышения продуктивности животноводства и продовольственной безопасности : сб. материалов Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием, Омск, 30 марта 2023 года. – Омск : ОмГАУ им. П. А. Столыпина, 2023. – С. 254–256.

5 **Селезнева, Н. А.** Качество высшего образования как объект системного исследования / Н. А. Селезнева. – М. : Исследовательский центр проблем качества подготовки специалистов, 2022. – 228 с.

6 **Шадриков, В. Д.** Новая модель образования: интеграция университетских программ / В. Д. Шадриков // Высшее образование в России. – 2021. – № 3. – С. 15–26.

УДК 378.147:51:378.663

БИНАРНЫЕ ЗАНЯТИЯ СО СТУДЕНТАМИ В РОЛИ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ ПРИ ОБУЧЕНИИ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ АГРАРНОГО ВУЗА

О. В. КОРЧИНСКАЯ, И. П. ИВАНОВА, В. С. ОРЛОВА
Омский государственный аграрный университет им. П. А. Столыпина
Российская Федерация

Современное аграрное образование предъявляет повышенные требования к качеству подготовки специалистов, способных не только применять математические методы для решения прикладных задач, но и демонстрировать навыки самостоятельного анализа, системного мышления и коммуникации. Дисциплина «Высшая математика» традиционно воспринимается студентами-аграриями как оторванная от профессиональной действительности, что снижает мотивацию к ее изучению и качество формируемых компетенций. Актуальность исследования обусловлена противоречием между потребностью в формировании у студентов активной учебной позиции и традиционной моделью преподавания, при которой студент остается пассивным получателем знания. Одним из перспективных направлений решения этой проблемы является методика бинарных занятий, в которых в качестве преподавателя выступают сами студенты [1, 2].

Бинарное занятие представляет собой нетрадиционную форму организации учебного процесса, предполагающую совместное ведение занятия двумя и более субъектами. В классическом варианте бинарные занятия проводятся двумя преподавателями разных дисциплин, что обеспечивает реализацию межпредметных связей и интеграцию содержания. Однако в практике преподавания высшей математики в аграрном вузе возникает необходимость модификации этой формы, при которой роль второго ведущего берет на себя студент. Такой подход трансформирует ролевую структуру учебного процесса: студент переходит из позиции обучаемого в позицию обучающего, что качественно меняет характер его взаимодействия с учебным материалом и с одногруппниками [3, 4].

Цель исследования – теоретически обосновать и экспериментально проверить эффективность методики бинарных занятий со студентами в роли преподавателей при обучении высшей математике в аграрном вузе.

На подготовительном этапе преподаватель отбирает тему практического занятия, содержание которой допускает деление на логически завершенные блоки. Студентам предлагается самостоятельно разработать и провести фрагмент занятия по одному из таких блоков. При этом преподаватель осуществляет методическое сопровождение, он помогает структурировать материал, подобрать примеры профессионально ориентированного содержания, сформулировать задания для аудитории. Непосредственно на занятии студент-«преподаватель» излагает теоретический блок, приводит примеры решения задач и организует работу одногруппников, после чего преподаватель дополняет, корректирует и обобщает изложенный материал. Таким образом, занятие строится как бинарное: часть функций преподавателя делегируется студенту, а преподаватель выступает в роли наставника и координатора.

Ключевыми принципами, положенными в основу методики, стал принцип активной учебной позиции, при котором студент из объекта обучения становится субъектом педагогической деятельности, а также принцип профессиональной направленности, обеспечивающий подбор математических задач с аграрным содержанием, и принцип педагогической рефлексии, предполагающий обязательный анализ проведенного фрагмента занятия самим студентом и группой.

В качестве тем для студенческого ведения были выбраны разделы, имеющие выраженную прикладную значимость: элементы теории вероятностей и закономерности наследования, математическая статистика и биометрический анализ, дисперсионный анализ и оценка наследуемости признаков, корреляционно-регрессионный анализ взаимосвязи признаков сельскохозяйственных животных [5].

Отдельного внимания заслуживает анализ качества проведения студентами фрагментов занятий. Студенты, выступившие в роли преподавателей,

отмечали, что подготовка к проведению занятия потребовала от них более глубокого погружения в материал, чем обычная подготовка к практическому занятию. Работа с аудиторией, необходимость отвечать на вопросы одногруппников и адаптировать объяснение под уровень восприятия слушателей способствовали развитию коммуникативных компетенций и формированию навыков педагогической рефлексии.

Среди трудностей, с которыми столкнулись студенты-«преподаватели», следует отметить затруднения при формулировании заданий для аудитории, проблему управления темпом занятия и адаптации материала при обнаружении непонимания со стороны слушателей. Эти трудности преодолевались при методической поддержке преподавателя и постепенно снижались от занятия к занятию. К третьему-четвертому бинарному занятию большинство студентов демонстрировали уверенное владение материалом и способность организовать групповую работу.

Полученные результаты согласуются с выводами исследователей о том, что вовлечение студентов в педагогическую деятельность способствует повышению качества подготовки специалистов, формированию у них навыков самообразования и развитию критического мышления [1, 3]. Методика бинарных занятий со студентами в роли преподавателей трансформирует традиционную модель обучения, при которой студент остается пассивным получателем знания, в модель партнерского взаимодействия, где преподаватель и студент совместно создают образовательное пространство. Применение математических методов к конкретным задачам аграрного профиля делает абстрактный материал наглядным и мотивирующим, а передача части преподавательских функций студенту развивает у него метакогнитивные навыки и ответственность за результат обучения.

Разработанная методика бинарных занятий со студентами в роли преподавателей, основанная на делегировании студентам фрагментов практических занятий по высшей математике, методическом сопровождении со стороны преподавателя и обязательной педагогической рефлексии, показала высокую педагогическую эффективность, выраженную в повышении успеваемости, мотивации и коммуникативной компетентности обучающихся.

Список литературы

1 **Иванова, И. П.** Способы повышения мотивации обучения студентов в вузе / И. П. Иванова, О. В. Корчинская // Научное и техническое обеспечение АПК, состояние и перспективы развития : сб. XIII Междунар. науч.-практ. конф., Омск, 27 февраля 2025 года. – Омск : ОмГАУ им. П. А. Столыпина, 2025. – С. 672–675.

2 **Корчинская, О. В.** Применение математического моделирования в селекции молочного скота / О. В. Корчинская, И. П. Иванова, В. Г. Емельянова // Математическое и компьютерное моделирование : сб. материалов X Междунар. науч. конф., Омск, 10 февраля 2023 года. – Омск : ОмГУ им. Ф. М. Достоевского, 2023. – С. 109–111.

3 Опыт проведения игрового занятия по дисциплине Высшая математика при подготовке специалистов в АПК / О. В. Корчинская, И. П. Иванова, Н. В. Щукина, В. Г. Емельянова // Инновационные векторы развития АПК: перспективы повышения продуктивности животноводства и продовольственной безопасности : сб. материалов Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием, Омск, 30 марта 2023 года. – Омск : ОмГАУ имени П. А. Столыпина, 2023. – С. 254–256.

4 **Селезнева, Н. А.** Качество высшего образования как объект системного исследования / Н. А. Селезнева. – М. : Исследовательский центр проблем качества подготовки специалистов, 2022. – 228 с.

5 **Шадриков, В. Д.** Новая модель образования: интеграция университетских программ / В. Д. Шадриков // Высшее образование в России. – 2021. – № 3. – С. 15–26.

УДК 519.7+101.1

ФИЛОСОФСКО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКОЕ «ЕДИНСТВО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЗНАНИЯ» И ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В УСЛОВИЯХ ЦИФРОВИЗАЦИИ

Н. В. МИХАЙЛОВА

Институт информационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники, г. Минск

Глобальная цифровизация в различных сферах, в том числе и в когнитивной сфере фундаментального образования, предполагает необходимость внедрения в практику университетского образования будущих специалистов по цифровым технологиям обязательного преподавания общеобразовательных дисциплин математического цикла. Используя возможности информационных и коммуникационных технологий, эти дисциплины формируют фундаментальные навыки исследовательской работы при решении различных практических задач по общему курсу высшей математики.

Следует также отметить, что цифровизация и систематизация являются одними из ключевых принципов профессиональной оптимизации обучения. Профессиональная оптимизация в обучении математике – направление, которое только сейчас получает свое оформление и является новым в современной педагогике в условиях непрерывного образования. Такая оптимизация подразумевает не только научно обоснованный выбор методов, средств и форм организации учебного процесса для обеспечения качественных результатов обучения, но и предполагает внедрение современных цифровых средств и инструментов искусственного интеллекта.

При правильной организации обучения студентов университета информатики освоение математических методов и формирование когнитивно-

информационных навыков их применения в профессиональной деятельности позволяет повысить эффективность обучения. Однако цифровизация образования проблемно отражается на обучении математике, которая всегда служила когнитивным образцом точности и совершенства. «Цифровость постепенно становится “необходимым прилагательным” бытия культуры и цивилизации – цифровой человек, цифровая экономика, цифровая политика (цифровое правительство), цифровое образование, цифровая культура, цифровое общество» [1, с. 169]. К цифровым реформам математического образования студентов IT специальностей следует относиться с осторожностью, поскольку к настоящему времени отсутствует достаточный анализ онтологических и гносеологических оснований «цифрового универсума».

Массовая компания цифровизации обучения таит в себе риски не только для математического образования, поскольку у представителей нового цифрового поколения наблюдается опасное снижение собственной интеллектуально-познавательной активности. Например, формализованная теория математики опирается на формальную логику, то есть логические аксиомы и правила вывода, благодаря которым становится возможным рассматривать формальные математические доказательства в теории как пояснения содержательных рассуждений. Целостное познание с точки зрения общеметодологического единства включает в себя труднообозримое множество конкретных состояний и структур математики. Хотя в целом синтез философии и науки – это довольно противоречивое когнитивное образование, философские основания формальной логики осуществляют определенную взаимосвязь между математикой и информатикой.

Создание когнитивно-рефлексивной среды при изучении высшей математики методически осуществляется с целью формирования таких рефлексивных умений будущих инженеров – IT специалистов, как способность выявлять математическое «знание о незнании», находить методологические пути выхода из проблемных математических затруднений, наконец, добиваться объективации успехов своей учебной деятельности в области цифровых технологий. Заметим, что строгость, которая характеризует единство математического знания, достигается с помощью формально-логических средств. Но в обширной математической практике нет удовлетворительного истолкования понятия «единство математического знания», хотя многозначность философской категории единства предполагает взаимную согласованность, взаимную обусловленность и взаимную зависимость противоположных подходов к обоснованию наиболее продуктивных разделов математики, придающих ей единство совокупным смыслом.

Вопрос о том, что же конституирует единство математического знания, довольно обширен, поскольку практическая направленность философии современного математического образования, прежде всего, имеет своей основой достаточное богатство и разнообразие изучаемого математического

материала и его применения [2]. Так, группа французских математиков, создавшая «математического Козьму Пруткова» и объединившаяся под псевдонимом Никола Бурбаки, развивала тезис о единстве математики, которое обеспечивается характерными чертами математического метода. В статье «Архитектура математики» они писали, что единственными математическими объектами сейчас становятся математические структуры, откуда их последователи делали методический вывод о том, что математика есть наука, которая изучает математические структуры.

Кроме того, единство математического знания реально концептуализируется в процессе успешной алгоритмизации и построения новых математических моделей, то есть благодаря синтезированию компьютерной и теоретической математики как способу систематизации математического знания, закрепляющему целостность подходов познания в условиях цифровизации образования. В отличие от математического знания философия науки не успевает за процессом цифровой трансформации университетского образования, поэтому пока не выработана единая методологическая основа педагогической науки. Это обусловлено тем, что среди методических проблем цифровизации высшего образования обычно выделяют уровень внедрения цифровых технологий в учебный процесс и проблему взаимодействия преподавателя и студента в такой образовательной среде.

Одна из причин сложившейся ситуации в философии математического образования состоит в том, что внедрение в учебный процесс цифровых образовательных технологий должно учитывать особенности обучения математическим дисциплинам. Ключевые позиции в потенциальной реализации их применений в образовании сводятся к следующим положительным инновационным подходам: возможность использования больших данных и их хранение, использование виртуальной реальности и искусственного интеллекта, решение проблемы наглядности обучения и повышение интереса к изучаемому предмету. Тем не менее, поскольку одной из актуальных философско-методологических проблем преподавания является проблема понимания, то применение цифровых технологий в обучении высшей математике может привести к ее обострению и нежелательным результатам.

Неоднозначным вопросом трансформации математического образования является степень включенности в учебный процесс цифровых образовательных технологий, так как с точки зрения производственных и социальных целей не все цифровые технологии применимы в фундаментальном образовании. «Однако погоня за “цифрой” и бездумным рукотворным ускорением технического прогресса ради получения все большей прибыли, задействования манипулятивных форматов практик ставит на повестку дня кардинальные вопросы, связанные с определением смыслового наполнения подобных трансформаций и влиянием на психологическое и физическое здоровье человека» [3, с. 13–14]. Учитывая различные аргументы по про-

блеме цифровизации высшего образования, можно ожидать, что ее дальнейшим развитием станет синтез инновационных подходов: использование «цифровой трансформации» образования с помощью новой методологии; внедрение компьютерных методов продуктивного познания; признание «цифрового суверенитета» в системном единстве общей безопасности.

Наряду с когнитивной репрезентацией сферы цифровизации, включающей прагматические цели образования, выделим отрицательные качества при работе с компьютером, в частности, увеличенное время ожидания, излишнее изобилие указаний, повторы неупорядоченной информации, непонятная студенту техническая терминология и другие претензии к качеству цифровых образовательных технологий, вызывающие естественное негативное отношение компьютерных пользователей. Цифровая трансформация математического образования стимулирует рефлексивный переход к «персонализации образовательного процесса» на основе принципа педагогической целесообразности и поиске баланса между дидактическим потенциалом и рисками цифровых и интеллектуальных инструментов.

В заключение можно отметить, что цифровые технологии оказывают инновационное влияние на методику преподавания математических дисциплин с точки зрения философии математического образования. Ведь когнитивное понимание сложных математических теорий возникает тогда, когда предполагается активное обучение в диалоге «преподаватель – студент», исключая возможную пассивность студентов. К сожалению, педагогическая наука пока не успевает за процессом цифровой трансформации математического образования, поскольку еще не выработана ее единая методологическая основа, что создает коммуникационные трудности в научном общении. Теоретическим фундаментом цифровых технологий являются компьютерные науки, в методологической реализации которых используются фундаментальные основы раздела дискретной математики. Предварительный философско-методологический анализ становления компьютерных наук свидетельствует о том, что цифровизация математического образования направлена на преодоление «когнитивного раскола» сознания и мышления.

Внедрение цифровых технологий в математическое образование несет перезагрузку или преображение когнитивных способов мышления и способствует выявлению универсальных уровней рефлексивного понимания. Но для этого помимо осмысления проблем цифровой трансформации образования необходима разработка нового методического инструментария, который позволит оценить востребованность цифровых технологий и их влияние на качество фундаментального единого математического университетского образования, минимизируя негативные риски так называемого «квазизнания»: наличие готовых решений без их понимания. Философия цифровизации прогнозирует «интеллектуальный скачок» как проявление

когнитивно-интуитивного феномена нового понимания, последствия которого для развития студентов еще потребуется осмыслить и оценить.

Список литературы

1 **Смирнов, Д. Г.** Цифровизация сознания: философские проблемы когнитивной аберрации / Д. Г. Смирнов, Н. М. Ветчинин // Вестник Ивановского государственного университета. Серия : Гуманитарные науки. – 2024. – Вып. 4. – С. 168–175.

2 **Михайлова, Н. В.** Методологическое единство математики в контексте философии образования / Н. В. Михайлова // Alma mater. – 2017. – № 4. – С. 18–22.

3 **Чернышов, А. Г.** Стратегия и философия цифровизации / А. Г. Чернышов // Власть. – 2018. – № 5. – С. 13–20.

УДК [328.016:53]+004.8

ТРАНСФОРМАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ СТУДЕНТОВ В ЭПОХУ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

С. П. НОВИКОВ, И. И. СОСНОВСКИЙ
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

В программе социально-экономического развития Беларуси на 2026–2030 годы, принятой на ВНС в 2025 году, в числе приоритетных направлений – образование. Основная цель концепции развития системы образования Республики Беларусь – «повышение качества и конкурентоспособности высшего образования в соответствии с текущими и перспективными требованиями национальной экономики и социальной сферы, мировыми тенденциями экономического и научно-технического развития» [1].

В условиях высокой динамики социальных и технологических изменений решающим фактором становится не адаптация к уже произошедшим сдвигам, а умение работать на опережение. В достаточно консервативной системе образования порой это непросто.

Электронные средства в образовании имеют долгую историю. Можно вспомнить использование радиопередач, обучающих телевизионных проектов. Очень значительные перемены произошли с внедрением в систему образования информационно-коммуникативных технологий. По-настоящему революционный переворот произошел с появлением технологии Интернет, породившей в свою очередь системы ИИ. Происходящее действительно можно назвать революцией – пятой волной научно-промышленного развития. Впервые за историю человечества масштабируются наши когнитивные, а не физические способности, и ядром этого становится ИИ. Следом меняется востребованность навыков. Если раньше решающим было умение вос-

производить усвоенную информацию, то теперь намного важнее уметь корректно формулировать задачу и принимать взвешенные решения на основе рекомендаций от машин [2].

Современные технологии искусственного интеллекта (ИИ) всё активнее входят в образовательный процесс, предлагая новые подходы к обучению. Искусственный интеллект способен усовершенствовать процесс обучения, сделав его более эффективным и доступным для студентов.

Меняется и роль преподавателя. Из транслятора знаний он превращается в куратора и навигатора. Преподаватель учит эффективно применять новые технологии, даже когда речь идет о гуманитарных областях. Определенную помощь нейросети оказывают преподавателю в создании индивидуализированных образовательных материалов и заданий на основе анализа данных о стиле обучения и предпочтениях учащегося. Согласно нашему опросу, который был проведен накануне конференции, свыше 80 % студентов технических специальностей уже используют ИИ-инструменты для учебных проектов минимум раз в неделю. Преподаватель должен научить верифицировать информацию, сомневаться в ней, критично смотреть на ответы моделей и находить в них неточности. Задача педагога – сделать так, чтобы студент овладел новым навыком работы с технологиями, не потеряв при этом способности к глубокому анализу. Необходимо доносить до студентов принципиальную мысль: на них лежит ответственность за факты, на которые они опираются в своих учебных и научных работах. Даже когда это результат нейросетевой генерации.

На первый план выходит обучение метанавыкам. Среди них – критическое мышление, системность, то есть способность складывать отдельно взятые события в единую структуру. Также в эпоху быстрого дофамина важно уметь концентрироваться и не терять фокус при анализе большого объема информации. Нужно мыслить творчески, предлагать свежее видение – чтобы конкурировать с искусственным интеллектом, который синтезирует существующий опыт. Требуется сформировать умение четко формулировать запросы для нейросетей, чтобы получать наиболее точные и качественные ответы, а значит, и умение четко мыслить.

Не нужно забывать: использование систем ChatGPT может на самом деле нанести вред обучению, особенно для молодых пользователей [2]. Новое исследование, проведенное учеными из Медиалаборатории Массачусетского технологического института, дало некоторые тревожные результаты. В исследовании 54 испытуемых от 18 до 39 лет из Бостона были разделены на три группы, и их попросили написать несколько эссе SAT, используя ChatGPT от OpenAI, поисковую систему Google, и вообще ничего. Исследователи использовали ЭЭГ для записи активности мозга писателей в 32 областях и обнаружили, что из трех групп пользователи ChatGPT имели самую низкую вовлеченность мозга и «постоянно отставали на нервном, лингви-

стическом и поведенческом уровнях». В течение нескольких месяцев пользователи ChatGPT ленились с каждым последующим эссе, часто прибегая к копированию и вставке к концу исследования.

Среди родителей учеников 5–6-х классов почти каждый четвертый (23 %) знает, что его ребенок при выполнении домашнего задания обращается за помощью к ИИ. Об этом говорят результаты опроса SuperJob [3]. В исследовании, которое было выполнено по заказу ТАСС, приняли участие 1600 родителей учеников 5–11-х классов со всех округов России. Чем старше школьник, тем чаще он прибегает к помощи нейросетей для выполнения домашних заданий. Так, среди родителей учеников 7–9-х классов о том, что их ребенок выполняет домашнюю работу с помощью нейросетей, рассказал каждый третий. А среди родителей старшеклассников – почти каждый второй. При этом отмечается, что лишь 13 % учителей пытаются бороться с тем, что школьники всё чаще используют нейросети для выполнения заданий. По их словам, выявить такие работы несложно, задав ученику уточняющие вопросы или предложив решить аналогичное задание у доски. Кроме того, при решении математических задач искусственный интеллект часто предлагает алгоритмы, которые не изучают в школе.

В сложившейся ситуации задача преподавателя, с одной стороны – научить студента эффективно использовать инструменты ИИ, критически оценивать решения и полученный результат, а с другой – осуществлять такой контроль, при котором применение систем ИИ стимулировало бы самостоятельную работу и вовлеченность в процесс обучения. Распознать работу, выполненную с использованием систем ИИ, иногда достаточно легко, а иногда это очень сложно. Поэтому эффективность выдачи студентам индивидуальных заданий без последующего устного опроса по теме работы и способе решения данной задачи зачастую оказывается невысока.

Выводы. Прогресс средств и методов обучения неумолим. Ответ на вопрос, использовать ли системы ИИ, как студентами, так и самими преподавателями, очевиден. Это во многих случаях облегчает работу, снижает время для подготовки, делает занятия более эффективными и интересными. С другой стороны, с «бездумным» списыванием и копированием решений ИИ надо бороться. Для этого есть отработанные приемы: выдача индивидуальных домашних заданий с обязательным устным контролем решений; проведение периодических срезов по темам в виде тестов; подготовка студентами кратких эссе по темам практических занятий.

Список литературы

1 О Концепции развития системы образования Республики Беларусь до 2030 года : постановление Совета Министров Респ. Беларусь, 30 ноября 2021 г., № 683 // Национальный правовой Интернет-портал Республики Беларусь. – URL : https://pravo.by/document/?guid=12551&p0= C22100683&p1 =1&p5=0 (дата обращения: 02.12.2021).

2 **Кабышева, Е**. Ректор РУДН Олег Ястребов – о кадрах будущего и роли вузов

в эпоху ИИ / Е. Кабышева // РБК Тренды – URL : https://trends.rbc.ru/trends/education/cmrm/6a0da2a39a7947732e6c0c3b. (дата обращения: 14.09.2026).

3 Ваш мозг на ChatGPT: накопление когнитивного долга при использовании ИИ-помощника для написания эссе / Н. Космина, Е. Хаупманн, Е. Тонг [и др.] / Информатика. Искусственный интеллект. – URL: https://arxiv.org/pdf/2506.08872v1 (дата обращения: 14.09.2026).

4 Уже каждый четвертый родитель ученика 5–6 классов знает, что ребенок выполняет «домашку» с ИИ // Исследовательский центр портала Superjob.ru. – URL: www.superjob.ru/research/articles/115357/uzhe-kazhdyj-chetvertyj-roditel-uchenika-5 (дата обращения: 14.09.2026).

УДК 378.147:51:62

МАТЕМАТИКА КАК ОСНОВА ИНЖЕНЕРНОГО ТВОРЧЕСТВА И ИЗОБРЕТАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В СИСТЕМЕ ПОДГОТОВКИ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ

Ю. А. ПШЕНИЧНОВ
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Введение. Современное инженерное образование ориентировано на подготовку специалистов, способных не только применять существующие технологии, но и создавать принципиально новые технические решения. В этих условиях возрастает значение фундаментальной математической подготовки как основы профессиональной компетентности инженера [1–6].

Несмотря на высокий уровень развития цифровых технологий и специализированных программных комплексов, математическое мышление остается ключевым фактором успешной инженерной деятельности. Именно математический аппарат позволяет описывать реальные процессы, строить адекватные модели сложных технических систем, анализировать результаты вычислений и принимать обоснованные инженерные решения.

Математика представляет собой универсальный язык описания объектов и процессов окружающего мира. Любая инженерная задача – от проектирования электронных устройств до разработки интеллектуальных систем управления – предполагает использование математических моделей различной степени сложности.

Особенность фундаментальной математики заключается в том, что многие ее результаты первоначально создавались без ориентации на практическое применение. Однако развитие науки и техники неоднократно подтверждало, что именно такие исследования впоследствии становились основой важнейших технологических достижений.

История развития науки содержит многочисленные примеры практического использования результатов фундаментальных математических исследований.

Одним из наиболее известных примеров является булева алгебра, разработанная Джорджем Булем в XIX веке. Изначально она рассматривалась как раздел математической логики, однако впоследствии именно булева алгебра стала теоретической основой цифровой электроники, вычислительной техники и современных компьютерных архитектур.

Не менее показательным является развитие теории чисел. Долгое время данный раздел математики считался исключительно теоретическим. Однако современные криптографические алгоритмы, обеспечивающие безопасность банковских операций, электронной коммерции и цифровых коммуникаций, основаны именно на результатах исследований в области теории чисел.

Важную роль в инженерной практике играет линейная алгебра. Матричные вычисления используются при обработке изображений, создании компьютерной графики, разработке систем автоматизированного проектирования, робототехнике и технологиях искусственного интеллекта.

Дифференциальные уравнения составляют математическую основу моделирования динамических процессов. Их применение охватывает аэрокосмическую технику, машиностроение, энергетику, транспортные системы и многие другие области инженерной деятельности.

Особое значение для развития современных телекоммуникаций имеют результаты теории информации, разработанной Клодом Шенноном. Сформулированные им фундаментальные положения легли в основу современных цифровых систем передачи данных и информационных технологий.

Таким образом, история науки убедительно демонстрирует, что фундаментальная математическая подготовка является необходимым условием возникновения технологических инноваций.

Подготовка инженера не должна ограничиваться освоением методов вычислений и стандартных алгоритмов решения задач. Гораздо более важной целью является формирование математического мышления, включающего способность к анализу, абстрагированию, выявлению закономерностей, построению моделей и критической оценке полученных результатов.

Процесс создания нового технического решения, как правило, включает несколько взаимосвязанных этапов:

– выявление закономерностей исследуемого процесса;

– построение математической модели объекта или явления;

– разработку алгоритмов решения поставленной задачи;

– компьютерное моделирование;

– инженерную реализацию разработанного решения.

Каждый из перечисленных этапов требует применения математического аппарата различного уровня сложности. Следовательно, качество математической подготовки непосредственно влияет на способность будущего инженера заниматься исследовательской и изобретательской деятельностью.

Современная система подготовки студентов технических университетов должна обеспечивать тесную взаимосвязь фундаментальных математических дисциплин с будущей профессиональной деятельностью обучающихся.

Перспективными направлениями совершенствования методики преподавания математики являются:

– использование инженерно ориентированных прикладных задач;

– широкое применение математического моделирования технических процессов;

– интеграция математических дисциплин с программированием и цифровыми технологиями;

– организация проектной и исследовательской деятельности студентов;

– демонстрация практического применения фундаментальных математических результатов в современных технологиях.

Такой подход способствует повышению учебной мотивации студентов, формированию системного инженерного мышления и развитию компетенций, необходимых для инновационной деятельности.

Заключение. Фундаментальная математическая подготовка является одним из важнейших компонентов инженерного образования. Именно математические знания обеспечивают возможность перехода от научной идеи к технической реализации, от абстрактной модели к инновационному продукту.

История развития науки и техники убедительно показывает, что многие достижения современной цивилизации стали возможны благодаря результатам фундаментальных математических исследований. Поэтому совершенствование методики преподавания математических дисциплин в технических университетах должно быть направлено не только на формирование вычислительных навыков, но и на развитие математического мышления, исследовательской культуры и способности студентов к инженерному творчеству.

Формирование у будущих инженеров понимания взаимосвязи фундаментальной математики и современных технологий способствует развитию их профессиональной компетентности и готовности к инновационным техническим решениям.

Список литературы

1 **Шабалина М. Р.** Основные направления совершенствования математического образования студентов инженерных направлений подготовки / М. Р. Шабалина // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – № V8. – С. 1–7.

2 **Татьяненко, С. А.** Mathematical Training of Engineers in the Context of Transition to FSES 3++ (Математическая подготовка инженеров в условиях перехода на ФГОС 3++) / С. А. Татьяненко, Е. С. Чижикова // Высшее образование в России. – 2020. – Т. 29, № 1. – С. 76–87.

3 **Федосеев, В. М.** Математическое образование инженера в контексте стандартов CDIO: методический аспект / В. М. Федосеев // Инженерное образование. – 2014. – № 16. – С. 93–97.

4 **Pepin, B.** Mathematics in Engineering Education: a Review of the Recent Literature

with a View towards Innovative Practices / B. Pepin, R. Biehler, G. Gueudet // International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education. – 2021. – Vol. 7. – P. 163–188.

5 **Van der Wal, N. J.,** Which Techno-mathematical Literacies Are Essential for Future Engineers? / N. J. Van der Wal, A. Bakker, P. Drijvers // International Journal of Science and Mathematics Education. – 2017. – Vol. 15. – P. 87–104.

6 **Pólya, G.** How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method / G. Pólya // Princeton University Press. – 2014. – P. 288.

УДК 37.091.212:51

ПРИНЦИП ФУНДИРОВАНИЯ

Ю. А. ПШЕНИЧНОВ, Е. А. ЗАДОРОЖНЮК
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Принцип фундирования (от англ. *foundation* – основание, фундамент) в математической подготовке инженеров означает организацию обучения таким образом, чтобы математические знания становились устойчивой теоретической основой для изучения специальных инженерных дисциплин и последующей профессиональной деятельности. Этот педагогический принцип, разработанный академиком П. М. Эрдниевым, означает, что каждое новое знание должно опираться на ранее изученное, т. е. знания «фундируются» (закладывают основу) друг в друга. Это помогает формировать у обучающихся целостную картину, а не заучивать разрозненные правила. В российской педагогике этот принцип получил развитие в работах исследователей, занимающихся проблемами фундаментализации образования [1–6].

В отличие от простого увеличения объема теоретического материала, фундирование предполагает построение системы обучения, в которой фундаментальные математические понятия, методы и модели многократно используются и развиваются при изучении инженерных дисциплин.

Фундирование превращает математику в язык инженера, а не в свод абстрактных правил.

Когда будущий инженер считает площадь эпюры или интеграл от ускорения локомотива, он не просто получает «циферки». Он использует фундамент, заложенный ранее, и строит на нем новую профессиональную компетенцию. Без этого инженер будет лишь оператором ЭВМ, не умеющим видеть физический смысл в получаемых цифрах.

Если знания не «фундируются» (т. е. новое не опирается на старое), студент рассматривает специальные дисциплины как магию с формулами.

Хотя термины «фундаментализация» и «фундирование» нередко употребляются как близкие, между ними есть различие.

Фундаментализация образования – это общая стратегия усиления роли фундаментальных наук в образовательном процессе.

Фундирование – это методический принцип, определяющий, как фундаментальные знания должны быть встроены в содержание и организацию обучения, чтобы стать основой профессиональной подготовки.

Иными словами, фундаментализация отвечает на вопрос «что изучать?», а фундирование – «как организовать обучение, чтобы фундаментальные знания стали рабочим инструментом будущего инженера?»

В техническом университете принцип фундирования применяется по цепочке: Абстрактная математика → Физическая модель → Инженерный расчет → Проектная практика.

Основные положения принципа фундирования.

1 Опора на фундаментальные математические идеи.

В центре обучения находятся базовые понятия (функция, производная, интеграл, матрица, векторное пространство, вероятность, математическая модель), которые имеют широкое применение в инженерии.

2 Формирование системы взаимосвязанных знаний.

Студент должен понимать не отдельные математические методы, а их место в общей системе научных знаний и возможности применения для решения профессиональных задач.

3 Профессиональная направленность обучения.

Изучение математических дисциплин сопровождается демонстрацией их использования в механике, электротехнике, программировании, строительстве, робототехнике, технологиях искусственного интеллекта и других инженерных областях.

4 Развитие математического мышления.

Основной целью становится не только овладение вычислительными навыками, но и формирование способности анализировать процессы, строить математические модели, выбирать адекватные методы решения, интерпретировать полученные результаты.

5 Преемственность математической подготовки.

Математика изучается не изолированно, а как база для последующих инженерных дисциплин, обеспечивая непрерывность профессионального образования.

Принцип фундирования в техническом университете реализуется через:

– включение инженерно ориентированных задач в курс математики;

– использование математического моделирования реальных технических процессов;

– междисциплинарные связи между математикой и специальными дисциплинами;

– применение современных вычислительных средств (*MATLAB*, *Mathcad*, *Mathematica* и др.);

– организацию проектной и исследовательской деятельности студентов.

Реализация принципа фундирования способствует:

– формированию системного инженерного мышления;

– развитию способности переносить математические знания в новые профессиональные ситуации;

– повышению качества освоения специальных дисциплин;

– развитию исследовательских и проектных компетенций;

– подготовке специалистов, способных к инновационной и изобретательской деятельности.

Принцип фундирования (системного укрупнения знаний) в высшей математике в техническом университете работает не просто как «повторение пройденного», а как профессионально ориентированное наслоение знаний, где каждая новая математическая абстракция опирается на предыдущую и сразу же получает инженерную интерпретацию.

Список литературы

1 **Сластёнин, В. А.** О фундаментальности образования / В. А. Сластёнин // Педагогическое образование и наука. – 2004. – № 4. – С. 4–9.

2 **Ильин, Г. Л.** Философия образования (идея непрерывности). / Г. Л. Ильин. – М. : Вузовская книга, 2002. – 192 с.

3 **Шиянов, Е. Н.** Развитие личности в обучении. / Е. Н. Шиянов, И. Б. Котова. – М. : Академия, 1999. – 288 с.

4 **Дорофеев, А. В.** Принцип фундирования в обучении математике / А. В. Дорофеев // Наука и школа. – 2011. – № 6. – С. 3–5.

5 **Носкова, М. В.** Принцип фундирования в контексте профессиональной направленности обучения математике / М. В. Носкова // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 7 (ч. 2). – С. 344–347.

6 **Фугелова, Т. А.** Принцип фундирования как основа непрерывного профессионального образования / Т. А. Фугелова // Педагогическое образование и наука. – 2016. – № 4. – С. 19–23.

УДК 378.147:51

О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ СТУДЕНТОВ-ПЕРВОКУРСНИКОВ

Т. А. РОМАНЧУК

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, г. Минск

Проблема несоответствия уровня знаний студентов первого курса (в первую очередь технических университетов) тому уровню и требованиям, которые предъявляет к ним система высшего образования, поднимается уже давно. И вроде баллы по централизованному экзамену (тестированию)

очень высокие, а разрыв не уменьшается, а иногда кажется, что увеличивается… Что же к этому приводит? Отметим: некоторые выводы, сформулированные в данной статье, опираются на ответы самих студентов, когда мы пытаемся разобраться, как может быть, что студент, имеющий по централизованному экзамену по математике 90 баллов «скатывается» до уровня 4–5 баллов и не проявляет никакого стремления и желания повысить оценку. Основная мысль заключается в том, что школа готовит к успешной сдаче этого самого экзамена и совсем не учит математике как таковой. И дело не только в том, что сейчас в школьной программе отсутствуют отдельные темы. Самое главное – математика перестала учить школьников логически думать, мыслить, размышлять, анализировать, сопоставлять, обобщать. И если какую-то нужную формулу (например сумму кубов) мы можем просто дать на занятии как справочный материал, то упущенные вышеперечисленные навыки наверстать практически невозможно. Это возможно, если студент, видя и понимая, что он до чего-то не дотягивает, проявит настойчивость, усидчивость и разберется, но, к сожалению, таких студентов единицы. Таким образом, происходит накопление «пробелов» в учебном материале, которое выливается в низкие текущие оценки, а потом вполне закономерно приводит к пересдаче на экзамене. Можно привести пример с самой первой темой предмета «Линейная алгебра и геометрия» – «Матрицы». Пока изучаются операции над ними, определители второго, третьего порядков – всё хорошо, а как только дело доходит до определителей высших порядков, когда необходимы преобразования строк (столбцов), начинаются проблемы: студенты не видят пропорциональных элементов, не могут проанализировать определитель, чтобы выбрать наиболее подходящую для преобразований строку (столбец), а берут наугад, что приводит к более сложным и длительным вычислениям, и при этом они не пытаются что-либо изменить в решении, продолжают «гнуть» выбранную линию. А ведь математика – это не просто вычисление по шаблону, а ещё и умение понять и исправить нерациональные действия. К тому же наблюдается снижение памяти у студентов: практически любую формулу они сразу ищут в интернете. Когда начинаем изучать геометрию на плоскости, зачастую студент не может решить задачу только из-за незнания уравнений прямой (а их нужно просто выучить), а также обозначения величин, которые в них входят, да и четко сформулировать определение или теорему полностью, а не отдельными обрывочными словами мало кому под силу. Еще одна причина низкой успеваемости – студент не умеет определить, что в теме является важным, а что носит вспомогательный второстепенный характер, что приводит к неправильной и неэффективной подготовке к практическим занятиям (можно услышать от студента фразу: «Вы не спрашиваете того, что я выучил»). К тому же они часто не могут сформулировать, чего именно не понимают, и на предложение преподавателя объяснить отвечают отказом, а это и есть

следствие неумения логически думать и анализировать. Свою негативную роль играет здесь и стремительно проникающий во все сферы жизни искусственный интеллект. Студент, воспринимающий обучение не как целенаправленное собственное развитие (и профессиональное, и общее), а как определенное количество работ (контрольных, курсовых, дипломных), которые нужно сдать, будет вполне логично стремиться эту скучную рутинную работу кому-нибудь передать. И тут ИИ со своими практически неограниченными возможностями! Есть формы работ (например, у нас это типовые расчеты), которые студенты выполняют дома, и их цель – закрепить и отработать благодаря типовым задачам полученные на практических занятиях навыки и умения. То есть проконтролировать, кем и как решаются задачи, невозможно. А потом преподаватель вынужден проверять выполненные ИИ и просто переписанные работы, прекрасно понимая, откуда они, и совсем не понимая, как их оценить… Также приходится наблюдать ситуацию, когда нужная теорема или определение ищутся в интернете, а не в конспекте, который есть и лежит на парте. И на вопрос «почему так» студент отвечает: «так быстрее» или «у меня плохой почерк и непонятно написано»… А ведь разница огромная! В конспекте (или учебнике) всегда есть комментарии и пояснения всех понятий, которые фигурируют, и таким образом складывается целостная картина. А интернет выдаст то же, на первый взгляд, определение, но иногда построенное на терминологии, которой студент не владеет, но его это не смущает, и он зачитывает или списывает то, что есть. И часто приходится слышать: «Ой, это так сложно!» Однако нельзя допустить снижения требований к знаниям студентов или упрощения учебных программ, ведь математика – это основа инженерного образования, его фундамент, без которого невозможно никакое научное открытие. Таким образом, для уменьшения влияния всех данных факторов на качество и эффективность учебного процесса методическая работа преподавателя должна строиться с их учетом.

ПРЕЕМСТВЕННОСТЬ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ НА УРОВНЕ СРЕДНЕГО, СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО, ОБЩЕГО И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

УДК 378.034/378.035

ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ ФОРМИРОВАНИЯ МОТИВИРОВАННОГО КОНТИНГЕНТА СТУДЕНТОВ

С. М. ЕВТУХОВА, М. В. ЗАДОРОЖНЮК, Е. З. АВАКЯН
Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого, Республика Беларусь

Развитие экономики и комплексная модернизация социальной сферы в современном мире напрямую зависят от формирования мощного интеллектуального потенциала страны. В условиях стремительного технологического прогресса наличие высококвалифицированных профессионалов становится базовым национальным ресурсом и главным катализатором общественных изменений. В связи с этим подготовка именно таких специалистов выступает первоочередной задачей, стоящей перед современными вузами. Университеты призваны не просто транслировать теоретические знания, а формировать у студентов прикладные компетенции, гибкость мышления и готовность к инновационной деятельности.

Вместе с тем эффективность этого процесса не является односторонней. Конечная квалификация выпускника – это всегда результат сложного взаимодействия многих факторов. Она складывается не только из качества академической среды вуза и квалификации профессорско-преподавательского состава, но и из прочности фундаментальной подготовки абитуриента, а также его личной, осознанной мотивации к освоению выбранной профессии. Без искренней вовлеченности самого студента в образовательный процесс даже самые передовые образовательные технологии не способны превратить его в высококлассного специалиста.

Как обеспечить приток в высшую школу исключительно мотивированных абитуриентов? Зачастую современные выпускники рассматривают поступление в университет как самоцель, преследуя внешние мотивы: соответствие ожиданиям родителей, получение отсрочки от призыва или просто возможности отложить взрослую жизнь еще на четыре года. При этом вуз

перестает восприниматься как инструмент профессионального развития и реализации карьерных и жизненных планов.

Традиционно ключевая роль в решении этой проблемы отводится профориентационной работе университетов. Однако эффективный выбор профессии – это комплексная задача, в которой одинаково заинтересованы высшая школа, государство и реальный сектор экономики. Страна получает гарантию, что бюджетные деньги не будут потрачены на «холостое» обучение, а предприятия – мотивированных сотрудников, которые останутся на производстве на долгие годы, а не уволятся сразу после окончания обязательного распределения. Абитуриент должен сначала выбирать будущую сферу деятельности и только потом учебное заведение, которое поможет ему в ней состояться. Именно поэтому в рамках совершенствования профориентационной политики активизируется механизм целевой подготовки, позволяющий напрямую связать образовательный процесс с конкретным заказчиком кадров.

Дополнительной мерой, направленной на привлечение в высшую школу осознанно ориентированных абитуриентов, выступает организация профильных инженерных классов. Очевидное достоинство данного подхода в том, что ребята уже выбрали будущую сферу деятельности, и теперь их главная цель – найти университет, который поможет им в ней реализоваться. Важнейшее преимущество инженерных классов – их тесная интеграция с высшей школой: это не просто экскурсии на факультеты, но и возможность слушать лекции университетских преподавателей по сложным прикладным темам. Благодаря современному уровню развития информационно-коммуникационных технологий (ИКТ) подобные занятия доступны и для школьников из регионов. В частности, один из авторов данной статьи имеет успешный опыт проведения онлайн-лекций по специализированным разделам математики для учащихся г. Светлогорска.

При этом принципиально важно, чтобы инженерный класс не трансформировался в стандартный физико-математический профиль с механическим увеличением учебных часов. Образовательный процесс в таких классах должен носить ярко выраженный практикоориентированный характер с акцентом на анализ физической и геометрической сущности изучаемых явлений. На наш взгляд, в старших классах стоит отойти от монотонного решения стандартных примеров и уделить максимум внимания анализу и решению задач.

Другим фундаментальным фактором, определяющим качество подготовки специалистов в высшей школе, выступает объективность отбора абитуриентов. Функционирующая уже более двадцати лет система централизованного тестирования, хоть и претерпевает время от времени некоторые изменения, но в целом справляется с задачей достаточно объективно отранжировать абитуриентов. Однако в последние годы стали появляться доста-

точно разнообразные альтернативные (льготные) способы поступления в вуз, многие из которых вызывают вопросы. В частности, для абитуриентов, поступающих по целевому направлению, предусмотрен устно-письменный экзамен по профильному предмету, что само по себе является методологически верным шагом. Вызывает вопросы другой аспект: установление минимального положительного порога на уровне 3 баллов. Если априори предполагается, что кандидат на целевое обучение обладает высокой мотивацией к освоению, например, инженерной специальности, то возникает закономерное сомнение в соответствии его базового академического потенциала выбранному профилю. Представляется крайне проблематичным за четырехлетний период обучения сформировать высококвалифицированного инженера из абитуриента, чей уровень освоения школьного курса математики за одиннадцать лет обучения оценивается ниже удовлетворительного минимума (4 баллов).

Следующая льготная категория, вызывающая обоснованные дискуссии в академическом сообществе, – это обладатели золотой медали и диплома колледжа с отличием. Согласно актуальным правилам приема, такие абитуриенты имеют право зачисления в региональные вузы без вступительных испытаний практически на весь спектр специальностей (за исключением узкого перечня регулируемых и творческих направлений). На практике подобное преимущество нередко приводит к деструктивным последствиям. Абитуриенты, не подтвердившие свой базовый уровень знаний на ЦТ по профильным предметам (а в случае выпускников колледжей непрофильных направлений – вовсе не изучавшие их), занимают бюджетные места, руководствуясь исключительно критерием «престижности» специальности. Это приводит к вытеснению на платную форму обучения (либо полному отсеву) действительно мотивированных абитуриентов, целенаправленно готовившихся к поступлению. Не имея достаточного фундамента, такие студенты в течение первых двух-трех семестров не справляются с учебной программой и отчисляются либо переводятся на другие направления, что означает неэффективное расходование государственных средств.

Логическое противоречие прослеживается и при сравнении различных способов поступления. Неясно, почему победители профильных университетских олимпиад (еще одна альтернативная форма зачисления в вуз) ограничены строго регламентированным перечнем специальностей, в то время как наличие медали позволяет поступать без профильного ЦТ на любое направление. Представляется правильным сохранить данную льготу исключительно в рамках профильной преемственности. Например, выпускник машиностроительного колледжа с красным дипломом имеет очевидные основания для зачисления без экзаменов на машиностроительный факультет. В то же время зачисление выпускника колледжа сферы бытового обслуживания на специальность «Информационные системы и технологии» без объ-

ективной проверки профильных ИКТ-компетенций выглядит необоснованным и деформирует саму идею качественного отбора.

Резюмируя вышесказанное, следует отметить, что достижение стоящих перед высшей школой целей невозможно без качественной профориентации и тесного партнерства с профильными предприятиями. Модернизация отборочных процедур призвана обеспечить приток в вузы целеустремленных абитуриентов, нацеленных на успешное освоение профессии. При этом ключевым вектором реформирования правил приема должно стать соблюдение принципа профильной преемственности и сохранение высокого уровня требований к базовой подготовке поступающих, что позволит государству и бизнесу получить мотивированных специалистов, готовых к долгосрочному закреплению в реальном секторе экономики.

УДК 378.147:51

ОСОБЕННОСТИ ОРГАНИЗАЦИИ НЕПРЕРЫВНОГО АДАПТАЦИОННОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

Л. В. КОВГОРЕНЯ, Н. В. КОВАЛЕНОК
Белорусский национальный технический университет, г. Минск

Вопрос о связи между разными этапами математического образования давно волнует ученых. Основы непрерывного обучения были заложены такими исследователями, как Ю. К. Бабанский, Б. С. Гершунский и В. С. Леднев. А особенности подготовки инженеров подробно изучали Р. М. Зайниев и Г. А. Клековкин. Но, несмотря на всю эту теорию, большинство методов работают лишь в самом начале обучения. Чтобы решить эту проблему по-настоящему, университетам нужны новые, эффективные способы помочь студентам адаптироваться. Один из самых многообещающих подходов – это создание и внедрение единой модели прогнозирования, которая будет использоваться на протяжении всего обучения.

Предлагаемая теоретическая модель адаптационного курса не ограничена жесткими временными рамками начала учебного года, а ориентирована на непрерывную реализацию в течение всего семестра. В рамках данной модели проверка знаний и актуализация опорных понятий осуществляются поблочно – непосредственно перед изучением каждого нового раздела высшей математики. Целью такого подхода является не дублирование школьной программы, а целенаправленное и своевременное восстановление тех логических связей, вычислительных навыков и алгоритмов элементарной математики, которые непосредственно востребованы при освоении текущей вузовской темы.

Важным элементом предлагаемой модели является организация оперативного входного контроля знаний студентов, который реализуется с использованием многофункциональной образовательной платформы Online Test Pad. Организация предпрактического экспресс-тестирования строится на следующих методических принципах.

1 Различные формы контроля. Конструктор Online Test Pad позволяет сочетать вопросы с одиночным выбором (для проверки знания базовых формул), вводом текста (для проверки численного ответа) и установлением соответствия (между математическими объектами).

2 Ограничение выполнения теста по времени. Чтобы минимизировать списывание и способствовать быстрому принятию решений, на каждый вопрос отводится не более 1–1,5 минут.

3 Случайный порядок заданий. Платформа обеспечивает автоматическое перемешивание как самих вопросов из заранее созданного банка задач, так и вариантов ответов внутри каждого вопроса.

Такой подход помогает тем, что содержание каждого экспресс-теста ориентировано на те базовые математические навыки, без которых невозможно освоение конкретного раздела высшей математики.

Например, перед изучением раздела «Линейная алгебра» (матрицы, определители, системы линейных уравнений) тест в Online Test Pad направлен на проверку базовых навыков счета и элементарной арифметики. Студентам предлагаются задания на быстрое сложение и умножение отрицательных чисел, действия с обыкновенными и десятичными дробями, раскрытие скобок и простейшие линейные преобразования. Наличие навыков устного счета в данном случае является очень важным, так как алгоритмы вычисления определителей или нахождения обратной матрицы просты, однако большую часть ошибок студенты совершают именно на этапе элементарных арифметических вычислений, что приводит к неверному итоговому результату.

Аналогичным образом предваряются и другие разделы: перед темой «Пределы» актуализируются школьные методы разложения многочленов на множители, а перед разделом «Интегральное исчисление» – базовые правила дифференцирования.

Дидактический эффект использования Online Test Pad заключается в получении мгновенной обратной связи. Преподаватель еще до начала практического занятия по соответствующей теме получает полную таблицу результатов группы. Это позволяет скорректировать план занятия, не тратя аудиторное время на проверку базовых понятий, а сразу сосредоточиться на ликвидации тех конкретных дефектов счета и пробелов, которые были отмечены как наиболее проблемные для большинства обучающихся.

Таким образом, внедрение разработанной сквозной модели на базе плат-

формы Online Test Pad является эффективной в преодолении разрыва и построении единого образовательного пространства «школа – вуз». Предложенный поблочный экспресс-контроль обеспечивает непрерывную актуализацию математических навыков непосредственно перед изучением каждого нового раздела высшей математики. Методические принципы тестирования – жесткий лимит времени (1–1,5 минуты на вопрос) и автоматический случайный выбор задач – гарантируют объективность среза и минимизируют списывание. Главный дидактический эффект модели заключается в получении мгновенной обратной связи, что позволяет преподавателю точечно ликвидировать дефекты счета и дефицит базовых знаний студентов на практических занятиях, не затрачивая аудиторное время на повторение теории.

Поэтому сквозной адаптационный мониторинг формирует прочный фундамент для подготовки будущих инженеров, повышает успеваемость и сохраняет учебную мотивацию первокурсников.

Список литературы

1 **Кудрявцев, Л. Д.** Современная математика и ее преподавание : учеб. пособие для вузов / Л. Д. Кудрявцев. – 2-е изд., доп. – М. : Наука, 1985. – 176 с.

2 **Майсеня, Л. И.** Развитие математического образования студентов технических университетов / Л. И. Майсеня. – Минск : БГУИР, 2017. – 283 с.

3 **Кудринская, Л. А.** Особенности учебной мотивации студентов технического вуза / Л. А. Кудринская, В. С. Кубарев // Социологические исследования. – 2012. – № 3. – С. 145–150.

УДК 378.147:51

ПРЕЕМСТВЕННОСТЬ СОДЕРЖАНИЯ КАК УСЛОВИЕ ОПТИМИЗАЦИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В НЕПРЕРЫВНОМ ОБРАЗОВАНИИ

Л. И. МАЙСЕНЯ, В. В. МАХНАЧ
Институт информационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники, г. Минск

Идея непрерывности является ключевой для повышения эффективности образования на каждой образовательной ступени. В педагогических науках непрерывность представляется как многозначное понятие – это подход, принцип, способ существования и развития, основополагающий критерий, системообразующий фактор. Остановимся на его смысловой трактовке как системообразующего фактора, согласно которому происходит развитие образования молодых людей при их переходе от общего среднего к высшему

образованию. В таком контексте будет рассматриваться обучение математике, что особенно значимо для технических университетов.

В качестве методологических оснований непрерывности образования исследователями выделяется ряд принципов, среди которых особо значимым является *принцип преемственности*, который выступает как интегральное качество. Для математического образования школьников и студентов (и для обучения математике как его структурному компоненту) принцип преемственности также является актуальным в системном непрерывном образовании. Проблема преемственности в обучении математике не нова. В частности, ее теоретические основы представлены в [1]. Вместе с тем за последние 20 лет произошла реструктуризация системы образования Республики Беларусь, изменился ведущий подход в образовании на компетентностный, а также пересмотрено содержание обучения математике на уровне общего среднего образования.

Тенденции развития современного образования и педагогической теории обеспечивают актуальность рассмотрения преемственности обучения дисциплинам в условиях непрерывности образования. В статье [2] рассмотрена преемственность в условиях компетентностного подхода. Согласно компетентностному подходу необходимо сформировать образовательную математическую компетентность студентов технических университетов, которая формируется на базе знаниевых, деятельностных и ценностно-мотивационных компонентов математических компетенций в обучении. В связи с этим в статье [2] рассматривается актуальность преемственности в формировании образовательной компетентности при переходе к обучению в университете. В предлагаемой статье сконцентрируем внимание на преемственности содержания обучения математике и некоторых конкретных *проблемных зонах*. В целом преемственность в содержании обучения – это общий дидактический принцип, способствующий реализации научности и систематичности в расположении учебного материала и установлении связей между ранее усвоенным и новым материалом. Преемственность представляет собой минимизацию ощутимого разрыва и провала в содержании дисциплины. Следование принципу преемственности способствует оптимизации обучения математике в непрерывном образовании.

Согласно Ю. К. Бабанскому [3], обучение является оптимальным, если его содержание, структура и логика функционирования обеспечивают качественное решение задачи обучения и развития обучающихся в соответствии с требованиями учебных программ на уровне максимальных возможностей. При этом к основным критериям оптимальности образования относятся целостность и достаточная полнота содержания образования, соответствии содержания образования международному опыту в определенной области; в условиях непрерывного образования – соответствие математического содержания условиям непрерывности образования.

Рассматривая преемственность знаниевого компонента математической компетентности, который напрямую зависит от используемого в общем среднем образовании содержания обучения, следует выделить ряд проблемных зон. К стандартным трудностям вхождения студентов в изучение математического курса университета (в том числе и технического) относится их недостаточно системная математическая подготовка, а также отсутствие в школьной математике необходимых в высшем образовании некоторых математических тем. Кроме этого, изучение доказательной сферы утверждений (даже если она представлена в средствах обучения для школ), как правило, игнорируется. Таким образом, дедуктивное представление теоретического учебного материала не формируется у обучающихся, не контролируется в контрольных работах, на ЦЭ и ЦТ.

Конкретизируем некоторые проблемы, создающие трудности в обучении студентов математике из-за отсутствия преемственности.

1 Обратимся к понятию числа. В век информационных технологий многие спецпредметы для подготовки инженеров, особенно с учетом инфокоммуникационных технологий, базируются на математических знаниях чисел. Усвоенные в школьном курсе математики, они должны углубляться в математическом образовании технического университета. Однако многолетнее изучение опыта обучения математическим дисциплинам в университете (в частности, при введении комплексных чисел) показало, что введение, расширение и представление в виде диаграмм Эйлера – Венна числовых множеств не входит в прочно усвоенную информацию бывших школьников. Особую проблему составляют *иррациональные числа*. Следует отметить, что в школьном курсе математики множество иррациональных чисел обсуждаются быстро и бегло. Эти числа, по сути, представляются как какие-то исключения, по сравнению с рациональными. К тому же иллюстрация числовых множеств диаграммами в учебном пособии [4, с. 28] представлена некорректно (рисунок 1).

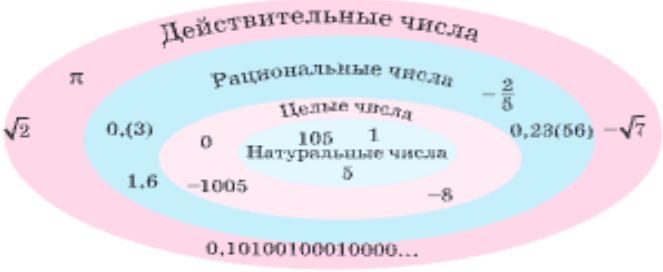


Рисунок 1

Множество I иррациональных чисел вообще не выделено. Множества N, Z, Q (натуральные, целые, рациональные числа) представлены по «расширению», где каждое предыдущее является подмножеством следующего. Затем для расширения множества рациональных чисел указываются на рисунке четыре иррациональных числа, что вместе показано как множество действительных чисел. Но на самом деле множество действительных чисел состоит в своем большинстве из чисел иррациональных. При этом множество рациональных чисел имеет счетную мощность, а множество иррациональных чисел – несчетную (континуум), т. е. его элементов бесконечно больше, чем во множестве рациональных чисел. В результате существующего предварительного обучения числам в школе студенты на вопрос: «Назовите иррациональные числа», как правило, отвечают: «Квадратный корень из двух, число π (пи)», а далее – пауза. У них не сложилось понимание, что «ln 2», «sin 3», «tg 4», «$5^{\lg 3}$», и т. д. – иррациональные числа. Если в качестве слагаемого в аналитическом выявлении функции используется «ln 2» и поставлена задача о нахождении производной, то в результате получим от большинства студентов слагаемое «0,5».

2 В школьных учебниках по математике некоторых стран (западная и американская традиции) обсуждаются *обратные операции* (действия). По своей сути они являются ключевыми в решении уравнений различного типа. Наших школьников учат решать уравнения вида: $\sqrt[3]{x} = 2$ и $x^3 = 8$. Но идея обратной операции явно не обсуждается (хотя она, по сути, введена ранее). Часто в тексте предлагают подумать, какое число следует подставить вместо «*x*», чтобы получить решение уравнения. И логично, что простейшее уравнение вида $x^{\frac{3}{5}} = 27$ далее не решается легко. Например, решение уравнения $2^x = 5$ в разобранном примере учебного пособия [5, с. 61] записано следующим образом: «Представим число 5 в виде степени с основанием 2. По основному логарифмическому тождеству получим: $5 = 2^{\log_2 5}$. Тогда данное уравнение примет вид: $2^x = 2^{\log_2 5}$, значит, $x = \log_2 5$». Таким образом, в 11-м классе школы подход решения уравнений по определению понятий (и это делается без введения обратной операции) приобретает смысловое значение при решении показательных уравнений. Но решение таких уравнений логарифмированием равенства (обратной операцией) является более рациональным – «одношаговый прием». Однако в учебном пособии [5] логарифмическая функция (и логарифмирование) вводятся через 40 страниц текста!

На взаимно обратных операциях построено решение многих задач в математических дисциплинах университета: решение дифференциальных и интегральных уравнений, прямое и обратное преобразования Фурье и т. д. Однако это понятие обсуждается впервые в университете.

К этой же проблеме следует добавить и отсутствие работы в школе по введению обратной функции и построению ее графика.

3 В качестве примеров нарушения полноты и системности представления математического содержания необходимо назвать целый *ряд выпадающих математических фактов*. Среди них находятся значимые для обучения в университете, например, формулы $(a \pm b)^3$, $(a^3 \pm b^3)$, $\sin\frac{x}{2}$, $\sin\alpha \cdot \sin\beta$, универсальная тригонометрическая подстановка. Эти формулы являются основополагающими для методов нахождения пределов функции, интегралов и т. д. Они изучались в школе (как обязательные) в предыдущих десятилетиях.

Сюда же стоит отнести отсутствие в школьном курсе математики некоторых функций и их графиков. Прежде всего, нужно назвать график функции $y = \operatorname{arctg} x$. Вне обсуждения в школе осталось, что это обратная функция для $y = \operatorname{tg} x$. Классическими примерами нахождения предела на бесконечности в математическом анализе являются $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$, что должно базироваться на устоявшихся предварительных знаниях. Далее эта функция и эти пределы востребованы при вычислении несобственного интеграла первого рода.

4 Следующей проблемной зоной в преемственности содержания обучения является *отсутствие системности* представления некоторых понятий и действий в школьном математическом курсе. Отметим, в частности, нарушения при введении корня четной степени в 8-х и 10-х классах – «путаницу» понятий «корень из числа» и «корень алгебраического уравнения», допущение, по сути, многозначного корня с четным показателем в действительном случае. К необоснованному следует добавить «устоявшуюся» в изложении для школьников (9-й класс) линию: правильное определение последовательности (с бесконечным количеством ее членов) – арифметическая (геометрическая) прогрессия, как виды последовательности – задачи с неправильной формулировкой типа «задана арифметическая прогрессия из 5 членов», «в геометрической прогрессии из семи членов». Такие ошибки (с конечными прогрессиями в условии) наблюдались и в проводимых ЦТ и ЦЭ. В частности, в пособии для учащихся учреждений общего среднего образования (рекомендовано Научно-методическим учреждением НИО Министерства образования Республики Беларусь) читаем содержание тестов: «В.2. Арифметическая прогрессия содержит 10 членов…» [6, с. 37], «А7. Числа 15 и 240 являются крайними членами конечной геометрической прогрессии…» [6, с. 38].

Понятие последовательности (как функции натурального аргумента n, $n \in \mathrm{N}$) является «стартовым» в математическом анализе, а правильное исходное усвоение этого понятия весьма значимо.

5 В продолжение остановимся еще на одной теме, которая рассматривается в школьном курсе математики и относится к курсу математического анализа в университете. Это *понятия возрастания, убывание функции и ее производной*. При изучении данной темы преподаватели университета традиционно говорят студентам, что в школьном курсе это понятие освещается не совсем правильно.

В учебном пособии для 8-го класса промежутки возрастания и убывания функции определены во многих случаях как замкнутые и пересекающиеся. Даны определения [4, с. 176–177]: «Функция возрастает на некотором промежутке, если для любых двух значений аргумента из этого промежутка большему значению аргумента соответствует большее значение функции», «Функция убывает на некотором промежутке, если для любых двух значений аргумента из этого промежутка большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции». Это приводит затем к неоднозначности понятий. Например, для функции $y = x^2$ точка $x = 0$ берется для определений дважды. В итоге приходят к тому, что функция убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$, т. е. $x = 0$ – и точка возрастания, и точка убывания. С определенной «натяжкой» школьникам объясняют, что это данность. С другой стороны, в учебном пособии для 10-го класса (при изучении темы «Производная») приведены две теоремы [7, с. 242–243]. «Теорема 1 (признак возрастания функции). Если функция имеет положительную производную в каждой точке некоторого промежутка, то она возрастает на этом промежутке», «Теорема 2 (признак убывания функции). Если функция имеет отрицательную производную в каждой точке некоторого промежутка, то она убывает на этом промежутке». Далее в задаче, решенной с применением этих теорем, получают открытые промежутки возрастания и убывания функции. Но в ответе (без всяких объяснений!) указываются замкнутые промежутки. Таким образом, в школьном курсе математики точка имеет сразу три смысла: точка возрастания, точка убывания и точка экстремума. В курсе математического анализа в университете доказывается единственная характеристика точки.

В существующей ситуации преподавателям математики в университете необходимо знать специфику математического содержания обучения в школе, зоны незнания студентов из-за необученности определенным вопросам, чтобы восполнить необходимой информацией.

При постановке задачи оптимизации обучения математике в условиях непрерывности образования на основе следования принципу преемственности целесообразно устранить неточности в содержании математики для общего среднего образования; следовать системности во введении и использовании понятий; дополнить курс обучения «выпадающими» темами.

Список литературы

1 **Сманцер, А. П.** Преемственность обучения математике в средней и высшей школе / А. П. Сманцер, Н. А. Березовик. – Минск : Университетское, 1985. – 136 с.

2 **Майсеня, Л. И.** Преемственность формирования математической компетентности школьников и студентов / Л. И. Майсеня // Математическое образование: современное состояние и перспективы : материалы Междунар. науч. конф., Могилев, 20–21 февраля 2019 г. / Могилевский государственный университет им. А. А. Кулешова. – Могилев, 2019. – С. 148–152.

3 **Бабанский, Ю. К.** Оптимизация учебно-воспитательного процесса: (Метод, основы) / Ю. К. Бабанский. – М. : Просвещение, 1982. – 192 с.

4 **Арефьева, И. Г.** Алгебра / И. Г. Арефьева, О. Н. Пирютко. – Минск : Адукацiя i выхаванне асвета, 2022. – 272 с. : ил.

5 **Арефьева, И. Г.** Алгебра : учеб. пособие для 11-го класса учреждений общего среднего образования с русским языком обучения / И. Г. Арефьева, О. Н. Пирютко. – Минск : Народная асвета, 2020. – 270 с. : ил.

6 **Арефьева, И. Г.** Повторяем математику за курс средней школы : тестовые задания для 11 класса : пособие для учащихся учреждений общего с русским языком обучения / И. Г. Арефьева. – Минск : Аверсев, 2023. – 143 с. : ил. – (Факультативные занятия).

7 **Арефьева, И. Г.** Алгебра : учеб. пособие для 10-го класса учреждений общего среднего образования с русским языком обучения / И. Г. Арефьева, О. Н. Пирютко. – Минск : Народная асвета, 2019. – 285 с. : ил.

РАЗВИТИЕ СОДЕРЖАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ТЕХНИЧЕСКИХ УНИВЕРСИТЕТАХ. МЕТОДИКИ И ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

УДК 517.521+537.21

ПОТЕНЦИАЛ СИСТЕМЫ ТОЧЕЧНЫХ ЗАРЯДОВ (МАСС) В ВИДЕ СУММЫ ЧИСЛОВОГО РЯДА

Н. А. АХРАМЕНКО
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Изучение электростатических полей занимает центральное место в классической электродинамике. Понятие потенциала является ключевой энергетической характеристикой поля при рассмотрении электрических полей (а также гравитационных полей, создаваемых распределением масс). В отличие от напряженности электрического поля (векторной физической величины) потенциал – скалярная величина. Это во многих случаях существенно упрощает математическое описание и расчет сложных электрических систем. Понимание физического смысла потенциала точечного заряда и принципа суперпозиции для системы зарядов важно как для решения фундаментальных физических задач, так и для проектирования современных микроэлектронных, электротехнических и медицинских приборов.

Изучение потенциала электрического поля студентами требует уверенного владения аппаратом математического анализа и векторного анализа. Потенциал является скалярной энергетической характеристикой электрического поля, но он неразрывно связан с векторным силовым полем.

Электростатическое поле можно описывать двумя способами: векторным (через напряженность) и скалярным (через потенциал). Переход от векторного описания к скалярному упрощает расчеты, так как оперировать скалярными функциями математически легче. При этом понимание физического смысла потенциала, его связи с напряженностью, а также методов его расчета требует привлечения развитого аппарата векторного анализа и дифференциального и интегрального исчисления.

Для нахождения потенциала системы зарядов используются методы, базирующиеся на принципе суперпозиции электрических полей [1–3]. При дискретном распределении системы точечных зарядов потенциал равен ал-

гебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым зарядом. Пусть имеется точечный заряд q. Запишем потенциал электрического поля в точке O (рисунок 1), удаленной на расстояние l от точечного заряда q [1]:

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{l}, \tag{1}$$

где ε_0 – электрическая постоянная.

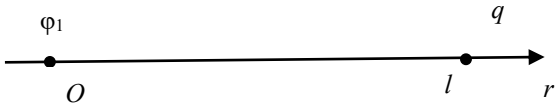


Рисунок 1 – Потенциал φ_1, создаваемый зарядом q в точке O

Возьмем два точечных заряда $q / 2$. Запишем потенциал электрического поля в точке O, создаваемый этими зарядами (рисунок 2):

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q/2}{l/2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q/2}{l}. \tag{2}$$

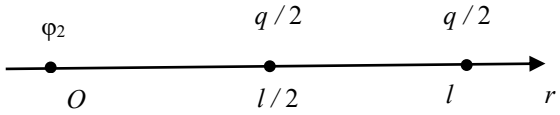


Рисунок 2 – Потенциал φ_2, создаваемый двумя зарядами $q / 2$ в точке O

Далее возьмем три точечных заряда $q / 3$. Запишем потенциал электрического поля в точке O, создаваемый этими зарядами (рисунок 3):

$$\varphi_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q/3}{l/3} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q/3}{2l/3} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q/3}{l}. \tag{3}$$

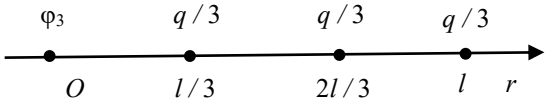


Рисунок 3 – Потенциал φ_3, создаваемый тремя зарядами $q / 3$ в точке O

Для n точечных зарядов величиной q / n расстояние между зарядами будет l / n (рисунок 4). Запишем потенциал электрического поля в точке O, создаваемый этими зарядами с учетом соотношений (1)–(3)

$$\varphi_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q/n}{l/n} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q/n}{2l/n} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q/n}{3l/n} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q/n}{(n-2)l/n} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q/n}{(n-1)l/n} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q/n}{l}. \qquad (4)$$

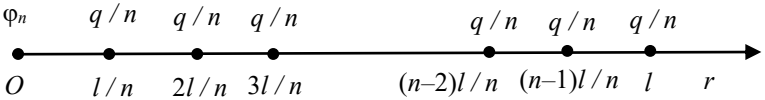


Рисунок 4 – Потенциал φ_n, создаваемый n зарядами q/n в точке O

Преобразуя соотношение (4), получим

$$\varphi_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{l}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right). \qquad (5)$$

Если n устремить к бесконечности, то заряд q распределится равномерно по отрезку длиной l. При этом потенциал на конце отрезка согласно формуле (5) может быть записан в виде

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{l}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \cdots\right). \qquad (6)$$

Сумма в соотношении (6) представляет собой сумму гармонического ряда. Сумма гармонического ряда при устремлении n к бесконечности согласно [4] может быть записана в виде

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \cdots = \ln n + C, \qquad (7)$$

где C – постоянная Эйлера.

Из соотношения (7) видно, что при бесконечном возрастании n сумма гармонического ряда растет как $\ln n$. Тогда с учетом (7) получим следующее значение потенциала из (6):

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{l}\left(\ln n + C\right). \qquad (8)$$

Согласно формуле (8) потенциал при бесконечном возрастании n стремится к бесконечности на конце отрезка. Если взять точку внутри отрезка, то она разделит исходный отрезок на два отрезка поменьше. Так как эта точка будет являться концом отрезков поменьше, то потенциал в ней будет также бесконечным. В работе [5] исследовался потенциал в плоскости равномерно заряженного кольца и было определено, что при приближении исследуемой точки к точкам локализации кольца потенциал стремится к бес-

конечности. Соответственно, можно сказать, что источником появления бесконечностей является распределение заряда вдоль некоторой линии как прямой, так и с некоторой кривизной. При определении потенциала рассмотренной системы зарядов студенты должны иметь необходимую математическую подготовку из раздела «Ряды». Без сильной математической базы изучение разделов физики является недостаточно эффективным.

Список литературы

1 **Матвеев, А. Н.** Электричество и магнетизм / А. Н. Матвеев. – М. : Высш. шк., 1983. – 463 с.

2 **Савельев, И. В.** Курс общей физики : в 3 т. Т. 2 : Электричество и магнетизм. Волны. Оптика / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1988. – 480 с.

3 **Трофимова, Т. И.** Курс физики / Т. И. Трофимова. – М. : Академия, 2006. – 560 с.

4 **Фихтенгольц, Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления : В 3 т. Т. 2 / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1970. – 800 с.

5 **Ахраменко Н. А.** Особенности распределения потенциала в плоскости равномерно заряженного кольца / Н. А. Ахраменко, М. В. Буй, А. П. Павленко // Инновационные технологии обучения физико-математическим и профессионально техническим дисциплинам = Innovative teaching techniques in physics, mathematics, vocational and mechanical training : материалы XVI Междунар. науч.-практ. конф., Мозырь, 29 марта 2024 г. / МГПУ им. И. П. Шамякина ; редкол.: И. Н. Ковальчук (отв. ред.) [и др.]. – Мозырь : МГПУ им. И. П. Шамякина, 2024. – С. 190–192.

УДК 378.147:517

ЗАМЕТКИ ПО ТЕОРИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ: ЕЩЕ РАЗ О МЕТОДЕ СВЯЗНЫХ ПАР

Л . Л. ВЕЛИКОВИЧ

Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого, Республика Беларусь

> Истина инвариантна относительно способов ее получения и имеет одно мгновение торжества между бесконечностью, когда ее считают неверной, и бесконечностью, когда ее считают тривиальной.
>
> *Анри Пуанкаре*

1 Теоретические сведения.

Начнем с авторского определения математики.

Математика – это игра по правилам, в соответствии с которыми строятся необходимые логические цепочки с целью получения информации, полезной для достижения требуемого конечного результата (ТКР).

Характерной особенностью игровой деятельности (игры) является тот факт, что участники присутствуют в ней добровольно. Напомним, что под *деятельностью* понимают взаимодействие человека и мира, в котором человек сознательно и целенаправленно изменяет мир.

При использовании понятия «информация» мы придерживаемся *фактологического* подхода. А именно: а) факт – высказывание о наличии связи между объектами; б) информация – это совокупность фактов.

А теперь немного философии. Рассмотрим информационное поле под названием «Математика». Предположим, что в нем находится некоторый объект (элемент) с неполной информацией. Назовем этот элемент *задачей*, если требуется восстановить отсутствующую информацию. *Информационной базой задачи* (ИБЗ) будем называть ту часть информационного поля, которая (предположительно) может быть использована для ее решения. Понятно, что ИБЗ – это нечеткое множество и что любая информация о ней – это шаг на пути к решению задачи. Уточним само понятие «задача». *Задачей* мы называем упорядоченную четверку (Ω, A, B, X), где Ω – носитель задачи, A – множество посылок (условие), B − множество следствий (заключение), X – решение задачи как процесс добычи информации [1, с. 7].

Одним из универсальных методов решения математических задач является процедура, которой мы дали название «метод связных пар (МСП)» [1, с. 17–18]. Его идея состоит в следующем:

– процесс поиска решения задачи включает в себя поиск информационной структуры решения (ИСР);

– носителем структурной единицы информации является минимальная ситуация, состоящая из двух объектов и связи между ними – «связная пара» (СП) (в терминах теории графов – это ребро);

– ИСР – некоторая совокупность структурных единиц информации, причем возможен вариант, когда ребро превращается в точку для построения следующего ребра.

Возникает главный вопрос: «А как строить (находить) СП?» Понятно, что общего рецепта для этого не существует, но кое-что об этом сказать можно. Действительно, пусть Q_1 – данный объект, для которого требуется найти новый объект Q_2 (будем называть его *напарником*). Далее имеет место следующая дихотомия.



Рисунок 1

«Потомок» может быть получен как непосредственное следствие из условия задачи, т. е. с помощью обычной («строгой») импликации. Что же касается «Союзника», то здесь имеет место полная неопределенность, для раскрытия которой необходима эвристическая процедура, основанная на так называемой «мягкой» импликации. Именно на изучение таких эвристических процедур и нацелена ТРЗ.

Отметим, что союзники тоже бывают двух видов: собственные и несобственные (универсальные). *Собственный* союзник создается только в контексте данной задачи. Что касается *универсального* союзника, то он находится в ИБЗ и является объектом, не зависящим от данной задачи. Теперь рисунок 1 может быть дополнен следующим образом.

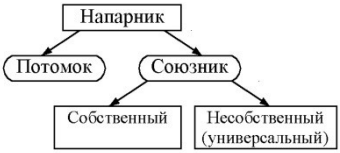


Рисунок 2

В качестве примера потомка можно предложить каждый объект в цепочке тождественных преобразований алгебраического выражения. Что же касается универсального союзника, то примерами могут служить связные пары: $\sqrt{A}-\sqrt{B} \leftrightarrow \sqrt{A}+\sqrt{B}$; $a+ib \leftrightarrow a-ib$, где $i^2 = -1$;

$\cos\alpha - \cos\beta \leftrightarrow \cos\alpha - \cos\beta$.

2 Задачи.

Задача № 1. Доказать, что если $x + y + z = 3$ (1), то $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$ (2).

Решение. (1) $\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) = 9$ (3). Теперь воспользуемся известным неравенством: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$ (4).

Из (3) $\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 9 - 2(xy + xz + yz)$ (5).

А из (4) $\Rightarrow 9 - 2(x^2 + y^2 + z^2) \leq 9 - 2(xy + xz + yz)$ (6).

$9 - 2(x^2 + y^2 + z^2) \leq x^2 + y^2 + z^2$ (7).

$9 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$ (8) $\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$ (9). Ч. т. д.

Примечание 1. Очевидно, равенство (3) является потомком для (1), а вот неравенство (4) – это союзник.

Примечание 2. Как оказалось, имеется интересное геометрическое решение данной задачи. Поскольку (1) – это уравнение плоскости в отрезках по осям, то введем в рассмотрение новый объект – пирамиду $OABC$, образованную плоскостью (1) и координатными плоскостями. Затем вычислим объем этой пирамиды двумя способами.

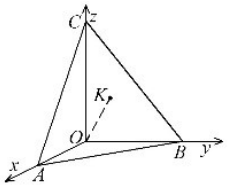


Рисунок 3

$$\begin{cases} V = \dfrac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \\ V = \dfrac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot OK = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{18\sqrt{3}}{4} \cdot OK \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{18\sqrt{3}}{4} \cdot OK \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

OK – это расстояние от т. O до плоскости ABC (по построению $OK \perp (ABC)$).

Следовательно, $OK \le OM$, где M – текущая точка плоскости (ABC). Но $OK = \sqrt{3}$, а $OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, откуда $\sqrt{3} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \ge 3$.

Задача № 2. Вершины равностороннего треугольника лежат на трех параллельных прямых, причем средняя параллель удалена от двух других на расстояния a и b. Найти длину стороны этого треугольника.

Решение. Пусть c – сторона нашего треугольника.

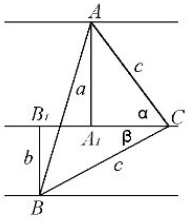


Рисунок 4

1. Из $\Delta AA_1C \Rightarrow \dfrac{a}{c} = \sin\alpha.$ (1)

2. Из $\Delta BB_1C \Rightarrow \dfrac{b}{c} = \sin\beta.$ (2)

3. $\alpha+\beta = 60° \Rightarrow \alpha\ 60°-\beta.$

4. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{a}{c} = \sin(60° \quad \beta \\ \dfrac{b}{c} = \sin\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin(60° \quad \beta}{\sin\beta};$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin 60° \quad \sin\beta \quad °}{\sin\beta} = \frac{\quad \cdot -\sin\beta \cdot 0{,}5}{\sin\beta};\ \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}\beta - \frac{1}{2};$$

$$\frac{2a-b}{b\sqrt{3}} = \operatorname{ctg}\beta;\quad \frac{4a^2+4ab+b^2}{3b^2} = \operatorname{ctg}^2\beta;$$

$$\sin^2\beta = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\beta} = \frac{1}{1+\dfrac{4a^2+4ab+b^2}{3b^2}} = \frac{3b^2}{4\left(a^2+ab+b^2\right)};\ \sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{b}{\sqrt{a^2+ab+b^2}}.$$

$$\text{Из (2)} \Rightarrow c = \frac{b}{\sin\beta};\ c = \frac{b}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{b}{\sqrt{a^2+ab+b^2}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+ab+b^2}.$$

Примечание. Роль «союзника» в этой задаче играет $\angle\beta$.

Заключительные замечания.

1 «Напарник» нужен, в частности, для того, чтобы установить (обнаружить) свойство исходного объекта Q_1. Напомним, что СП бывают двух видов: объект – свойство, объект – объект.

2 Что такое свойство объекта? Попытаемся ответить на данный вопрос с

помощью следующей классификации (дихотомии): свойства бывают внутренние и внешние. В свою очередь, *внутренние* свойства бывают двух видов: а) связь между объектом и некоторой его частью; б) связь между двумя частями объекта. *Внешнее* свойство определяется при участии другого объекта, который не является частью исходного объекта.

Список литературы

1 **Великович, Л. Л.** Теория решения задач: новый взгляд на старые истины : брошюра для математиков: студентов, репетиторов, профессионалов / Л. Л. Великович. – М. : БИЛИНГВА, 2023. – 72 с.

УДК 378.147:51:656

ОСОБЕННОСТИ ВОСПРИЯТИЯ И ПЕРЕРАБОТКИ АБСТРАКТНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ СОВРЕМЕННЫМИ СТУДЕНТАМИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ПРОФИЛЬНЫХ ДИСЦИПЛИН ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ «ОРГАНИЗАЦИЯ ПЕРЕВОЗОК И УПРАВЛЕНИЕ НА ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОМ ТРАНСПОРТЕ»

Т. А. ВЛАСЮК, И. И. СОСНОВСКИЙ, Я. В. ЖИТНИКОВА
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Профильные дисциплины специальности «Организация перевозок и управление на железнодорожном транспорте» насыщены математическим аппаратом, например, расчет пропускной и провозной способности участков, построение и анализ графика движения поездов, расчет потребного парка вагонов и локомотивов, моделирование работы сортировочных станций на основе теории массового обслуживания, решение транспортной задачи и других задач линейного программирования при планировании вагонопотоков – всё это требует от студента умения не только выполнить вычисления, но и увидеть за формулой реальный технологический процесс. Именно здесь многие студенты испытывают трудности: математические курсы первых лет обучения усвоены ими как набор формальных процедур, а профильные дисциплины требуют применять эти процедуры к конкретным производственным ситуациям.

Трудности переноса математического знания в профессиональную область известны давно, однако у современных студентов они проявляются по-новому. Нынешнее поколение выросло в среде, где информация поступает короткими фрагментами, преимущественно в визуальной форме и всегда доступна по запросу. Это формирует определенный стиль работы с информацией, который облегчает одни виды учебной деятельности и затрудняет другие [3]. Анализ психолого-педагогической литературы и специфики

профильных дисциплин позволяет выделить следующие особенности восприятия и переработки абстрактной математической информации современными студентами.

1 Преобладание наглядно-образного восприятия над знаково-символическим. Современные студенты легче воспринимают информацию, представленную в виде схем, графиков и анимации, чем в виде формул и словесных формулировок. Для дисциплин, связанных с организацией работы железнодорожного транспорта, это одновременно проблема и ресурс. График движения поездов, схема железнодорожной станции, график работы сортировочной горки по своей природе наглядны, и через них можно подвести студента к абстрактной модели. Согласно теории двойного кодирования информация, закодированная одновременно в словесной и образной форме, запоминается и воспроизводится надежнее [3]. Поэтому формулу пропускной способности целесообразно вводить не как готовое выражение, а как обобщение того, что студент видит на графике: периода графика, межпоездных интервалов, числа поездов в периоде.

2 Ограниченная готовность к длительной концентрации внимания на абстрактном материале. Вывод формулы из нескольких последовательных шагов, доказательство или многоэтапная задача требуют удерживать в рабочей памяти значительный объем промежуточной информации. Согласно теории когнитивной нагрузки, при перегрузке рабочей памяти учебный материал не усваивается, даже если каждый отдельный шаг понятен [4]. У студентов, привыкших к быстрой смене коротких информационных фрагментов, этот порог достигается раньше. Отсюда вытекает необходимость дробить сложные выводы на законченные смысловые блоки, после каждого из которых студент получает промежуточный результат, имеющий технологический смысл.

3 Инструментальное отношение к математике. Студенты нередко воспринимают формулу как средство получить число, а не как модель, отражающую связи между параметрами процесса. Такой подход позволяет решить типовую задачу, но не дает понять, как изменится результат при изменении условий, например, что произойдет с пропускной способностью участка при увеличении доли пассажирских поездов или как время простоя вагона на станции зависит от интенсивности поступления составов. Преодолению этой особенности способствуют задания, в которых требуется не вычислить значение, а проанализировать отношение результата к исходным данным и объяснить полученную зависимость с точки зрения технологии перевозочного процесса.

4 Опора на цифровые инструменты и внешнюю память. Возможность в любой момент найти формулу или выполнить расчет с помощью программного обеспечения снижает мотивацию запоминать и понимать математический аппарат. Вместе с тем цифровые инструменты при правильном ис-

пользовании освобождают время для содержательного анализа. Решение транспортной задачи в табличном процессоре или моделирование работы станции в специализированной программе позволяет студенту многократно изменять условия и наблюдать результат, то есть работать с моделью как с объектом исследования. Важно, чтобы использованию программы предшествовало «ручное» решение задачи небольшой размерности, иначе студент получает результат, не понимая, как он образуется.

5 Потребность в видимой профессиональной значимости материала. Абстрактная информация, связь которой с будущей профессией не очевидна, воспринимается как второстепенная. Это соответствует положениям теории обучения через опыт, согласно которой знание формируется в цикле «конкретный опыт – рефлексивное наблюдение – абстрактная концептуализация – активное экспериментирование» [3]. Для студентов-железнодорожников конкретным опытом служат производственная практика, посещение станций и диспетчерских центров, разбор реальных ситуаций в работе участка. Когда математическая модель вводится после такого опыта и объясняет его, она воспринимается как инструмент профессионала, а не как учебная формальность.

6 Разрыв между математической подготовкой и профильными дисциплинами. Математические курсы, как правило, читаются в первые годы обучения без опоры на транспортную специфику, а к моменту изучения профильных дисциплин многие понятия теории вероятностей, математической статистики и линейной алгебры оказываются забытыми или не связанными с практикой. Студент сталкивается одновременно с новым технологическим содержанием и с необходимостью восстановить математический аппарат, что резко повышает когнитивную нагрузку. Согласно представлениям о зоне ближайшего развития, обучение эффективно, когда новый материал опирается на уже сформированные понятия и немного превышает текущие возможности студента [2]. Разрыв между курсами нарушает это условие.

Выделенные особенности позволяют сформулировать ряд методических рекомендаций. Во-первых, целесообразно выстраивать изложение от конкретного к абстрактному, т. е. начинать с технологической ситуации и ее наглядного представления, затем переходить к математической модели и возвращаться к ситуации для интерпретации результата [1]. Во-вторых, следует сочетать словесное, графическое и формульное представление одной и той же зависимости. В-третьих, многоэтапные выводы и расчеты нужно разбивать на смысловые блоки с промежуточными результатами. В-четвертых, полезно включать в учебный процесс задания на анализ чувствительности и интерпретацию результатов, а не только на вычисление. В-пятых, цифровые инструменты следует вводить после освоения ручного решения, используя их для исследования модели. Наконец, необходимо усилить межпредметные связи: включать в математические курсы задачи с транспортным содержани-

ем, а в начале профильных дисциплин кратко повторять нужный математический аппарат.

Таким образом, восприятие и переработка абстрактной математической информации современными студентами специальности «Организация перевозок и управление на железнодорожном транспорте» характеризуются преобладанием наглядно-образного восприятия, ограниченной готовностью к длительной работе с абстрактным материалом, инструментальным отношением к математике, опорой на цифровые инструменты, потребностью в видимой профессиональной значимости знаний и разрывом между математической и профильной подготовкой. Эти особенности не следует рассматривать только как недостаток: при соответствующей организации обучения наглядность железнодорожных технологических процессов и доступность цифровых инструментов становятся опорой для формирования у студентов способности строить и анализировать математические модели перевозочного процесса. Перспективным направлением дальнейшей работы представляется эмпирическое изучение этих особенностей на выборке студентов специальности и оценка эффективности предложенных методических приемов.

Список литературы

1 **Брунер, Дж.** Психология познания. За пределами непосредственной информации / Дж. Брунер. – М. : Прогресс, 1977. – 412 с.

2 **Выготский, Л. С.** Мышление и речь / Л. С. Выготский. – 5-е изд., испр. – М. : Лабиринт, 1999. – 352 с.

3 **Ливер Бетти Лу** . Обучение всего класса : учеб. пособие / Ливер Бетти Лу. – 4-е изд., стер. – М. : Академия, 2008. – 176 с.

УДК 378.147:51:82

ФОРМИРОВАНИЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ СОВРЕМЕННЫХ СТУДЕНТОВ НА ПРИМЕРЕ ХУДОЖЕСТВЕННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

Т. А. ВЛАСЮК

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Высшая математика в технических и транспортных учреждениях высшего образования традиционно рассматривается как фундаментальная дисциплина, которая формирует понятийный аппарат для последующих профильных курсов. Однако ее роль этим не исчерпывается. Именно на занятиях по математике студент впервые систематически учится строить модели, отли-

чать строгое рассуждение от правдоподобного, проверять результат и объяснять ход решения другому человеку. Эти умения составляют основу профессиональных компетенций будущего инженера, а в образовательных стандартах высшего образования они закреплены в составе универсальных и базовых профессиональных компетенций.

Современные студенты приходят в университет с иным, чем у предыдущих поколений, опытом работы с информацией. Они привыкли к коротким фрагментам и наглядным образам, а формально-символический язык математики воспринимают как оторванный от жизни. Преподаватель сталкивается с вопросом «зачем это нужно», на который недостаточно ответить ссылкой на будущие курсы. Одним из способов показать смысл математических понятий и одновременно развивать компетенции, выходящие за рамки вычислительных навыков, служит обращение к художественной литературе. Такой подход имеет глубокие основания. Многие писатели были связаны с математикой и инженерным делом, например, Л. Кэррол 27 лет преподавал математику в оксфордском колледже Крайст-Чёрч и выпустил под своим настоящим именем множество научных трудов, а его работы по математической логике опередили свое время. Одним из самых известных его математическим произведением является сборник «История с узелками», в котором Кэрролл совместил любовь к математике и логике с фирменным юмором и неподражаемым литературным стилем. В основе каждого из десяти рассказов – «узелков» лежит математическая задача, которую автор предлагает решить читателям вместе с героями.

Следует отметить, что Евгений Замятин был корабельным инженером, а Александру Сергеевичу Пушкину принадлежит известная мысль о том, что вдохновение нужно в геометрии, как и в поэзии. В классических текстах математика появляется не как иллюстрация, а как часть человеческого опыта, в котором герои рассчитывают, ошибаются, спорят о сути понятий, решают практические задачи подручными средствами. Этот опыт студент способен прожить вместе с героем, и абстрактное понятие получает для него личный смысл.

Следует отметить, что использование художественного текста на занятиях по математике опирается на несколько известных положений. Согласно культурно-исторической теории Л. С. Выготского научное понятие усваивается тогда, когда оно встречается с житейским опытом ученика и перестраивает его [1]. Художественный текст дает такой опыт в концентрированной форме, где ситуация, в которой герою понадобилась математика, становится для студента точкой входа в понятие. Например, модель обучения через опыт Д. Колба описывает цикл «конкретный опыт – рефлексивное наблюдение – абстрактная концептуализация – активное экспериментирование». Литературный эпизод может выполнять роль первого звена этого цикла, когда реальный профессиональный опыт у студента первого курса еще отсутствует.

Д. Пойа подчеркивал, что умению решать задачи учатся через осмысле-

ние самого процесса решения: понимание условия, составление плана, его выполнение и взгляд назад. Литературные герои нередко проходят эти этапы, а иногда пропускают их, и анализ их действий помогает студенту увидеть собственные ошибки со стороны. Помимо вышеизложенного теория когнитивной нагрузки указывает, что знакомый повествовательный контекст снижает нагрузку на рабочую память при восприятии нового материала. Сюжет удерживает внимание и студент тратит меньше усилий на то, чтобы понять, о чем идет речь, и больше на математическую суть. Поэтому для занятий подходят произведения, в которых математическое содержание органично вплетено в сюжет. Примерный перечень таких произведений, соответствующих различным разделам курса, позволяющих формировать соответствующие компетенции [1–9], представлен в таблице 1.

В романе «Война и мир» в начале третьей части третьего тома Л. Н. Толстой обращается к апории об Ахилле и черепахе и пишет, что понять законы истории можно, лишь допустив бесконечно малую единицу наблюдения как «дифференциал истории» и научившись интегрировать, то есть брать суммы этих бесконечно малых [2]. Фрагмент удобно читать при введении понятий предела и интеграла, когда студенты разбирают, в чем состоит ошибка в рассуждении об Ахилле и почему предел суммы бесконечного ряда может быть конечным. Затем обсуждается, насколько правомерен перенос математического понятия в область гуманитарного знания. Такое обсуждение формирует умение, важное для инженера и управленца, заключающееся в умении видеть, где математическая модель описывает процесс адекватно, а где ее применение становится метафорой.

В рассказе А. П. Чехова «Репетитор» гимназист, нанятый репетитором, не может решить задачу о купце, купившем 138 аршин черного и синего сукна за 540 рублей, если аршин синего стоил 5 рублей, а черного – 3 рубля. Он пытается составить уравнение, а отец ученика решает задачу на счетах, рассуждая арифметически: если бы всё сукно было черным, оно стоило бы 414 рублей, а разница в 126 рублей объясняется тем, что каждый аршин синего дороже на 2 рубля. Обсуждение показывает, что формальный метод и здравое рассуждение не противоречат друг другу, а вопрос о том, какой из них выбрать в конкретной ситуации – это уже профессиональное решение [3]. Таким образом, одновременно студент видит, как выглядит специалист, владеющий методом, но не умеющий применить его под давлением обстоятельств и объяснить ход мысли.

В романе Ж. Верна «Таинственный остров» инженер Сайрес Смит определяет высоту гранитной стены с помощью шеста и подобия треугольников, а затем находит широту острова. Студенты могут восстановить расчет и представить соотношение высоты как

$$H / h = L / l, \qquad (1)$$

где H – искомая высота; h – высота шеста; L и l – расстояния от точки

наблюдения до основания стены и до шеста. Далее ставится вопрос, который в романе остается за кадром: как ошибка в измерении расстояний влияет на результат [4]. Оценка погрешности через дифференциал функции переводит эпизод в плоскость реальной инженерной практики, где любой результат измерения имеет смысл только вместе с оценкой его точности.

Таблица 1 – **Художественные произведения в курсе высшей математики**

Произведение	Математическое содержание	Раздел курса	Формируемые умения
Л. Н. Толстой «Война и мир»	Апория об Ахилле и черепахе, непрерывность движения, «дифференциал истории» и интегрирование бесконечно малых	Предел, производная, определенный интеграл	Абстрактное мышление, перенос понятий в новую предметную область
А. П. Чехов «Репетитор»	Текстовая задача о покупке двух сортов сукна; алгебраическое и арифметическое решение	Системы линейных уравнений	Выбор рационального метода, проверка результата, объяснение решения
Ж. Верн «Таинственный остров»	Определение высоты скалы и географической широты острова подручными средствами	Аналитическая геометрия, приближенные вычисления	Измерение и оценка точности, инженерная находчивость
Ж. Верн «Вокруг света за восемьдесят дней»	«Выигранные» сутки при движении на восток вокруг Земли	Функции, линейная зависимость, системы отсчета	Планирование, работа с расписанием, внимание к исходным данным
Ф. М. Достоевский «Братья Карамазовы»	Рассуждение Ивана об евклидовой геометрии и параллельных прямых	Аксиоматический метод, основания геометрии	Критическое мышление, аргументация
Е. И. Замятин «Мы»	Мнимая единица, иррациональное как вызов строго рассчитанному миру; строитель «Интеграла»	Комплексные числа	Работа с неочевидными абстракциями, осмысление ответственности инженера
Э. Эбботт «Флатландия»	Мир двух измерений и встреча с третьим	Линейная алгебра, размерность пространства	Пространственное воображение, моделирование
Л. Кэрролл «История с узелками»	Математические задачи в сюжетной форме	Логика, уравнения	Формализация текстового условия

Представляет интерес роман Ж. Верна «Вокруг света за восемьдесят дней», в котором Филеас Фогг, двигаясь на восток, возвращается в Лондон убежденным, что опоздал, и лишь затем узнает, что выиграл сутки [5]. Студенты объясняют парадокс: при движении на восток каждые 15° долготы сокращают местные сутки на один час, и после полного оборота вокруг Земли набегает 24 часа. Для студентов транспортных специальностей этот эпизод особенно ценен, так как он показывает, что расписание – это функция, зависящая от выбранной системы отсчета времени и что ошибка в исходных данных способна обесценить безупречно выполненный план.

В романе Ф. М. Достоевского «Братья Карамазовы» Иван Карамазов признаётся, что его «эвклидовский» ум не может постичь мира, в котором параллельные линии сходятся [6]. Этот фрагмент служит поводом поговорить об аксиоматическом методе, в котором евклидова геометрия – это одна из возможных систем, построенная на определенных допущениях, и что выводы любой модели верны лишь в пределах ее исходных предположений. Для будущего специалиста это одно из самых важных профессиональных убеждений.

Следует отметить, что работа с литературным материалом не должна подменять решение задач и вытеснять систематическое изложение курса. Она лишь помогает показать смысл нового понятия, когда требуется применить его в нестандартной ситуации. В связи с этим можно выделить несколько форм такой работы:

1) математическая реконструкция, при которой студенты получают короткий фрагмент текста, выделяют в нем данные, формулируют задачу и решают ее, а затем сравнивают результат с тем, что описано в произведении. Эта форма развивает умение формализовать нечетко поставленную задачу, которое в профессиональной деятельности требуется постоянно;

2) анализ ошибки героя, когда студенты выясняют, на каком этапе рассуждения персонаж ошибся или почему не смог довести решение до конца, и предлагают, как избежать такой ошибки. Здесь формируется навык самоконтроля и критического отношения к собственному решению;

3) дискуссия о пределах применимости модели, построенная вокруг фрагментов произведений Толстого, Достоевского или Замятина. Студенты учатся аргументировать позицию, опираясь на точные определения и слушать оппонента, что соответствует коммуникативной составляющей профессиональных компетенций;

4) самостоятельный поиск при котором студенты находят в прочитанных ими книгах эпизоды, связанные с математикой, и готовят короткое сообщение или задачу для однокурсников. Такое задание учитывает индивидуальные интересы студентов и развивает умение представлять результаты своей работы.

Для студентов транспортных специальностей целесообразно дополнять

перечень произведениями, где действие связано с дорогой, расписанием и движением и строить на их основе задачи о времени, скорости, расстоянии и планировании маршрута. Так литературный материал становится мостом не только между математикой и культурой, но и между математикой и будущей профессией. Эффективность такого подхода зависит от нескольких условий:

1) фрагмент текста должен быть коротким и содержать ясно различимое математическое ядро, иначе занятие превращается в литературный разбор;

2) математическое содержание эпизода должно точно соответствовать теме занятия и преподаватель должен сам свободно ориентироваться в тексте и не приписывать автору того, чего в произведении нет;

3) после литературного введения обязательно следует систематическая работа с понятием, в котором эпизод дает мотив и смысл, но не заменяет определения, теоремы и упражнения.

Следует отметить, что такой подход имеет ограничения. Часть студентов может воспринимать литературные вставки как отвлечение от основного материала, особенно при высокой плотности курса. Кроме того, круг чтения современных студентов неоднороден, поэтому нельзя рассчитывать на знакомство всей группы с конкретным произведением, в связи с этим фрагмент нужно давать непосредственно на занятии.

Таким образом, художественная литература может служить действенным средством формирования профессиональных компетенций при изучении высшей математики. Литературные эпизоды позволяют показать смысл абстрактных понятий через человеческий опыт, мотивировать студентов, для которых формально-символический язык непривычен, и развивать умения, выходящие за пределы вычислительных навыков: формализовать задачу, выбирать рациональный метод, оценивать точность результата, видеть границы применимости модели, аргументировать и объяснять свое решение. Эти умения составляют основу профессиональной деятельности инженера и специалиста по организации перевозок. Перспективным направлением представляется разработка сборника коротких литературных фрагментов с задачами к ним, сгруппированных по разделам курса высшей математики, и экспериментальная проверка влияния такой работы на учебную мотивацию и результаты обучения студентов.

Список литературы

1 **Выготский, Л. С**. Мышление и речь / Л. С. Выготский. – 5-е изд., испр. – М. : Лабиринт, 1999. – 352 с.

2 Толстой, Л. Н. Война и мир : [сокр. текст] / Л. Н. Толстой ; сост., авт. предисл., коммент. и учеб.-метод. материалов Е. Ю. Полтавец. – М. ; Назрань : АСТ : Олимп, 1998. – 683 с.

3 **Чехов, А. П.** Репетитор / А. П. Чехов // Рассказы. Повести. – М. : Дрофа, 1998. – С. 45–48.

4 **Верн, Ж.** Таинственный остров : роман : пер. с фр. / Ж. Верн. – М. : РОСМЭН, 1998. – 639 с.

5 **Верн, Ж.** Вокруг света за восемьдесят дней: роман : пер. с фр. / Ж. Верн. – М. : Эксмо, 2020. – 256 с.

6 **Достоевский, Ф. М.** Братья Карамазовы: роман. – М. : Иностранка : Азбука-Аттикус, 2020. – 832 с.

7 **Замятин, Е. И.** Мы / Е. И. Замятин // Роман. – М. : Эксмо, 2020. – 288 с.

8 **Эбботт, Э. Э.** Флатландия. Сферландия : для сред. и ст. шк. возраста / Эдвин Э. Эбботт, Дионис Бюргер ; пер. с англ. и нидерл. Ю. А. Данилова ; сост. Я. А. Смородинский. – М. : Мир, 1976 . – 360 с.

9 **Кэрролл, Л.** История с узелками / Л. Кэрролл. – М. : АСТ, 2024. – 192 с.

УДК 517.958:536.2

ОПЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ 3-ГО РОДА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

С. А. ДУДКО, И. М. ДЕРГАЧЕВА
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Методы интегральных преобразований являются мощным средством решения задач математической физики. Так, для уравнений параболического типа особенно широко используются методы интегрального преобразования Фурье [1] и метод интегрального преобразования Лапласа [2]. При этом во многих ситуациях операционный метод демонстрирует большую эффективность и более прост в реализации нежели интегральное преобразование Фурье. Особенно это проявляется при решении 3-й краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Таким образом, рассмотрим следующую краевую задачу для одномерного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x, t < +\infty. \tag{1}$$

Краевое условие на конце полупрямой $x = 0$ имеет вид

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} - hu(0,t) = -h\varphi(t),$$

где $h-$ известный коэффициент, $\varphi(t)$ – заданная функция времени.

Начальное условие для функции $u(x,t)$ в нулевой момент времени дается равенством $u(x,0) = \Phi(x)$, где $\Phi(x)$ – заданная функция.

Исходную краевую задачу для уравнения (1) удобно разбить на две краевые задачи. Сначала решаем неоднородную краевую задачу с нулевым начальным условием, т. е. краевую задачу вида

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} - hu(0,t) = -h\varphi(t),\ \ 0 < t < +\infty,\ \ u(x,0) = 0,\ \ 0 < x < +\infty. \qquad (2)$$

Вводим лаплас-образы неизвестной функции $u(x,t) \div$, и функции краевого условия $\varphi(t) \div$ При этом на лаплас-образ $U(x,p)$ накладываем условие $\lim\limits_{x \to +\infty} U(x,p) = 0$. Тогда после перехода к лаплас-образу $U(x,p)$ уравнение (1) принимает вид

$$\frac{d^2U(x,\,p)}{\partial x^2} - \left(\frac{\sqrt{p}}{a}\right)^2 U(x,\,p) = 0. \qquad (3)$$

Решение уравнения (3) имеет вид

$$U(x,p) = ce^{-\frac{x\sqrt{p}}{a}}, \qquad (4)$$

где ■ – произвольная постоянная (функцию $e^{-\frac{x\sqrt{p}}{a}}$ в общем решении отбрасываем в силу наложенного на лаплас-образ $U(x, p)$ предельного условия).

Далее переходим к лаплас-образам в краевом условии (2):

$$\frac{dU(0,p)}{dx} - hU(0,p) = -hF(p),$$

так как $U(0,p) = c$, $\dfrac{dU(0,p)}{dx} = -c\dfrac{\sqrt{p}}{a}$, получаем следующее уравнение

$$\frac{c}{a}\left(\sqrt{p} + ah\right) = hF(p),$$

из которого находим требуемое значение коэффициента $c = ah\dfrac{F(p)}{\sqrt{p} + ah}$.

Подставляя коэффициент ■ в равенство (4), находим требуемый лаплас-образ

$$U(x,p) = ah\frac{F(p)}{\sqrt{p} + ah}e^{-\frac{x\sqrt{p}}{a}} = ahF(p)\frac{e^{-\frac{x\sqrt{p}}{a}}}{\sqrt{p} + ah} \qquad (5)$$

(в равенстве (5) мы представили $U(x,p)$ как произведение двух лаплас-образов).

Находим функцию-оригинал, отвечающую лаплас-образу (5). Из [3] бе-

рём оригинал, отвечающий лаплас-образу

$$\frac{e^{-\frac{x\sqrt{p}}{a}}}{\sqrt{p}+ah} \div \cdot \quad {}^{\frac{x^2}{2\sqrt{t}}} - ahe^{hx+a^2h^2t}\left(1-\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}+ah\sqrt{t}\right)\right),$$

где $\Phi(y_0)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{y_0} e^{-y^2}dy$ – интеграл Лапласа, при записи которого мы ввели величину $y_0=\frac{x}{2a\sqrt{t}}+ah\sqrt{t}$. Произведению двух лаплас-образов отвечает свертка оригиналов, как следствие, получаем

$$F(p)\cdot\frac{e^{-\frac{x\sqrt{p}}{a}}}{\sqrt{p}+ah} \div \cdot \quad {}^{t}_{0} \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right)d\tau - ahe^{hx}\int_0^t \varphi(\tau)e^{(ah)^2(t-\tau)}\left(1-\Phi\left(\bar{y}_0\right)d\tau\right), \quad (6)$$

где $\bar{y}_0=\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}+ah\sqrt{t-\tau}$ – запаздывающий аргумент. Второе слагаемое в (6) преобразуем следующим образом. Разность

$$1-\Phi\left(\bar{y}_0\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-y^2}dy-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\bar{y}_0}e^{-y^2}dy=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\bar{y}_0}^{\infty}e^{-y^2}dy,$$

используя замену переменной $\eta=2a\sqrt{t-\tau}\,(y-\bar{y}_0)$, после элементарных преобразований можно привести к виду

$$1-\Phi\left(\bar{y}_0\right)=\frac{1}{a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-hx}e^{-(ah)^2(t-\tau)}\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{(\eta+x)^2}{4a^2(t-\tau)}-h\eta\right)d\eta.$$

С учетом этого соотношения второе слагаемое в равенстве (6) приводится к виду

$$ahe^{hx}\int_0^t\varphi(\tau)e^{-(ah)^2(t-\tau)}\left(1-\Phi\left(\bar{y}_0\right)d\tau\right)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{(\eta+x)^2}{4a^2(t-\tau)}-h\eta\right)d\eta,$$

поэтому окончательный вид функции-оригинала (6) будет таким:

$$F(p)\cdot\frac{e^{-\frac{x\sqrt{p}}{a}}}{\sqrt{p}+ah} \div \cdot \quad {}^{t}_{0} \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\left[\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right)-h\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{(\eta+x)^2}{4a^2(t-\tau)}-h\eta\right)d\eta\right]d\tau.$$

Тогда для функции-оригинала, отвечающей лаплас-образу (5), получаем следующее выражение:

$$u_1(x,t)=\frac{ah}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\left[\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right)-h\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{(\eta+x)^2}{4a^2(t-\tau)}-h\eta\right)d\eta\right]d\tau. \qquad (7)$$

Функция $u_1(x,t)$ и является решением неоднородной краевой задачи (2). Далее рассматриваем однородную краевую задачу, но с ненулевым начальным условием для функции $u(x,t)$, т. е. краевую задачу вида

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} - hu(0,t) = 0, 0 < t < +\infty,\ u(x,0) = \varphi(x)\,. \tag{8}$$

Лаплас-образ производной имеет вид

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \doteq \qquad\qquad) - u(x,0) = pU(x,p) - \varphi(x),$$

поэтому после перехода к лаплас-образу в уравнении (1) получаем неоднородное уравнение

$$\frac{d^2U(x,p)}{dx^2} - \left(\frac{\sqrt{p}}{a}\right)^2 U(x,p) = -\frac{1}{a^2}\varphi(x)\,, \tag{9}$$

решение которого должно удовлетворять однородному краевому условию

$$\frac{\partial U(0,p)}{\partial x} - hU(0,p) = 0\,, \tag{10}$$

которое получаем, переходя к лаплас-образу в краевой задаче (8).

Уравнение (9) решаем методом вариации произвольных постоянных, т. е. ищем решение в виде

$$U(x,p) = C_1(x)e^{-\frac{x\sqrt{p}}{a}} + C_2(x)e^{\frac{x\sqrt{p}}{a}}\,. \tag{11}$$

На производные функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-\frac{x\sqrt{p}}{a}} + C_2'(x)e^{\frac{x\sqrt{p}}{a}} = 0, \\ -C_1'(x)e^{-\frac{x\sqrt{p}}{a}} + C_2'(x) = -\dfrac{1}{a\sqrt{p}}\varphi(x), \end{cases}$$

решение которой имеет вид

$$C_1'(x) = \frac{1}{2a\sqrt{p}}\varphi(x)e^{\frac{x\sqrt{p}}{a}},\ C_2'(x) = -\frac{1}{2a\sqrt{p}}\varphi(x)e^{-\frac{x\sqrt{p}}{a}}\,.$$

Как следствие, после интегрирования получаем требуемые функции

$$C_1(x) = \frac{1}{2a\sqrt{p}}\int_0^x \varphi(z)e^{\frac{z\sqrt{p}}{a}}dz + C_1\,,\ C_2(x) = -\frac{1}{2a\sqrt{p}}\int_0^x \varphi(z)e^{-\frac{z\sqrt{p}}{a}}dz + C_2\,,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Найденные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ подставляем в равенство (11), для лаплас-образа $U(x,p)$ получаем

$$U(x,p)=\left(C_1+\frac{1}{2a\sqrt{p}}\int_0^x\varphi(z)e^{\frac{z\sqrt{p}}{a}}dz\right)e^{-\frac{x\sqrt{p}}{a}}+\left(C_2-\frac{1}{2a\sqrt{p}}\int_0^x\varphi(z)e^{-\frac{z\sqrt{p}}{a}}dz\right)e^{\frac{x\sqrt{p}}{a}}=$$

$$=C_1e^{-\frac{x\sqrt{p}}{a}}+C_2e^{\frac{x\sqrt{p}}{a}}+U_0(x,p),\qquad(12)$$

где при записи последнего равенства мы ввели лаплас-образ

$$U_0(x,p)=\frac{1}{2a\sqrt{p}}\int_0^x\varphi(z)\left(e^{-\frac{(x-z)\sqrt{p}}{a}}-e^{-\frac{(z-x)\sqrt{p}}{a}}\right)dz.$$

Для выполнения предельного условия $\lim\limits_{x\to+\infty}U(x,p)=0$ необходимо выполнение равенства $C_2-\frac{1}{2a\sqrt{p}}\int_0^\infty\varphi(z)e^{-\frac{z\sqrt{p}}{a}}dz=0$, из которого находим коэффициент $C_2=\frac{1}{2a\sqrt{p}}\int_0^\infty\varphi(z)e^{-\frac{z\sqrt{p}}{a}}dz$. Далее подставляем найденный коэффициент C_2 в соотношение (12) и приводим лаплас-образ $U(x,p)$ к следующему виду:

$$U(x,p)==C_1e^{-\frac{x\sqrt{p}}{a}}+\frac{1}{2a\sqrt{p}}e^{\frac{x\sqrt{p}}{a}}\int_0^x\varphi(z)e^{-\frac{z\sqrt{p}}{a}}dz+U_0(x,p).\qquad(13)$$

Так как $U_0(0,p)=0,\ \frac{dU_0(0,p)}{dx}=0$, то из (13) находим

$$U(0,p)=C_1+\frac{1}{2a\sqrt{p}}\int_0^x\varphi(z)e^{-\frac{z\sqrt{p}}{a}}dz,$$

$$\frac{dU(0,p)}{dx}=\frac{\sqrt{p}}{a}\left(-C_1+\frac{1}{2a\sqrt{p}}\int_0^\infty\varphi(z)e^{-\frac{z\sqrt{p}}{a}}dz\right).$$

Полученные соотношения для $U(0,p)$ и $\frac{dU(0,p)}{dx}$ подставляем в краевое условие (10) и после элементарных преобразований находим требуемое соотношение для коэффициента C_1, которое имеет вид

$$C_1=\frac{1}{2a\sqrt{p}}\frac{\sqrt{p}-ah}{\sqrt{p}+ah}\int_0^\infty\varphi(z)e^{-\frac{z\sqrt{p}}{a}}dz,$$

или, используя преобразование

$$\frac{\sqrt{p}-ah}{\sqrt{p}+ah}=\frac{(\sqrt{p}+ah)-2ah}{\sqrt{p}+ah}=1-\frac{2ah}{\sqrt{p}+ah},$$

для коэффициента C_1 окончательно получаем следующее выражение:

$$C_1 = \frac{1}{2a\sqrt{p}}\int_0^\infty \varphi(z)e^{-\frac{z\sqrt{p}}{a}}dz - \frac{h}{\sqrt{p}\left(\sqrt{p}+ah\right)}\int_0^\infty \varphi(z)e^{-\frac{z\sqrt{p}}{a}}dz .$$

Подставляем найденный коэффициент C_1 в равенство (13) и окончательно представим лаплас-образ в виде суммы трех слагаемых:

$$U(x,p) = U_1(x,p) + U_2(x,p) + U_0(x,p),$$

где

$$U_1(x,p) = \frac{1}{2a}\int_0^\infty \varphi(z)\left(\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\frac{(z+x)\sqrt{p}}{a}} + \frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\frac{(z-x)\sqrt{p}}{a}}\right)dz,$$

$$U_2(x,p) = -h\int_0^\infty \varphi(z)\frac{e^{-\frac{(z+x)\sqrt{p}}{a}}}{\sqrt{p}\left(\sqrt{p}+ah\right)}dz .$$

Из [3] берем все требуемые функции-оригиналы. Используя соотношение

$$\frac{e^{-\lambda\sqrt{p}}}{\sqrt{p}} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\lambda^2}{4t}} \quad \left(\lambda = \frac{z+x}{a} \text{ или } \lambda = \frac{z-x}{a}\right),$$

получаем следующие оригиналы:

$$U_1(x,p) \doteqdot \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \varphi(z)\left(e^{-\frac{(z+x)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2t}}\right)dz ,\ U_0(x,p) \doteqdot \quad . \qquad (14)$$

С учетом функции-оригинала

$$\frac{e^{-\frac{(z+x)\sqrt{p}}{a}}}{\sqrt{p}\left(\sqrt{p}+ah\right)} \doteqdot e^{h(z+x)+(ah)^2 t}\left(1-\Phi\left(\frac{z+x}{2a\sqrt{t}}+ah\sqrt{t}\right)\right),$$

находим оригинал, отвечающий лаплас-образу $U_2(x,p)$, получаем

$$U_2(x,p) \doteqdot \int_0^\infty e^{h(z+x)+(ah)^2 t}\left(1-\Phi\left(\frac{z+x}{2a\sqrt{t}}+ah\sqrt{t}\right)\right)dz .$$

Полученное соотношение с помощью элементарных преобразований, аналогичных тем, что были сделаны при решении краевой задачи (2), можно привести к виду

$$U_2(x,p) \doteqdot \frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \varphi(z)dz\int_0^\infty \exp\left(-\frac{(y+z+x)^2}{4a^2t} - hy\right)dy . \qquad (15)$$

Суммируя функции-оригиналы (14) и (15), находим функцию $u_2(x,t)$,

дающую решение краевой задачи (8)

$$u_2(x,t) \div \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \varphi(z) \left(\exp\left(-\frac{(z+x)^2}{4a^2 t} \right) + \exp\left(-\frac{(z-x)^2}{4a^2 t} \right) - \right.$$

$$\left. -2h \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{(y+z+x)^2}{4a^2 t} - hy \right) dy \right) dz \,. \qquad (16)$$

Решение исходной краевой задачи, т. е. неоднородной краевой задачи с ненулевым начальным условием, будет суммой двух функций:

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)\,,$$

где функция $u_1(x,t)$ задается равенством (7), а функция $u_2(x,t)$ – равенством (16).

Список литературы

1 **Бурдук, Б. М.** Сборник задач по уравнениям математической физики / Б. М. Бурдук, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов. – М. : Наука, 1978. – 684 с.

2 **Карслоу, Х.** Операционные методы в прикладной математике / Х. Карслоу, Д. Егер. – М. : Гос. изд-во иностранной лит., 1948. – 291 с.

3 **Дудко, С. А.** Системы дифференциальных уравнений : учеб.-метод. пособие : в 3 ч. Ч. 3. / С. А. Дудко, Е. А. Задорожнюк, А. И. Прокопенко. – Гомель : БелГУТ, 2013. – 40 с.

УДК 517.443:517.956.22

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ. РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СО СТАЦИОНАРНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

С. А. ДУДКО, *Е. А. ЗАДОРОЖНЮК*

Белорусский государственный университет транспорта, *г. Гомель*

Рассмотрим плоскую краевую задачу для уравнения эллиптического типа. Область D, на которой будем искать решение краевой задачи, представляет собой полуполосу: $0 \le x < +\infty, 0 \le y < b.$

Таким образом, постановка краевой задачи имеет следующий вид:

Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,, 0 \le x < +\infty, 0 \le y < b, \qquad (1)$$

при этом краевое условие по переменной x будет нулевым, а по переменной y возьмем стационарные краевые условия 2-го рода, т. е.

$$u(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = T_1 = \text{const}, \quad \frac{\partial u(x, b)}{\partial y} = T_2 = \text{const}. \qquad (2)$$

Краевую задачу решим методом синус-преобразования Фурье по переменной x. От функции $u(x, y)$ переходим к Фурье-образу по формуле

$$U_s(\omega, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u(x, y) \sin \omega x dx. \qquad (3)$$

После перехода к Фурье-образу уравнение (1) принимает вид

$$\frac{d^2 U_s(\omega, y)}{dy^2} - \omega^2 U_s(\omega, y) = 0. \qquad (4)$$

Решение этого уравнения ищем с учетом выполнения краевых условий $\frac{dU_s(\omega, 0)}{dy} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{T_1}{\omega}, \quad \frac{dU_s(\omega, b)}{dy} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ (переходим к Фурье-образам в краевой задаче (2)).

Общее решение уравнения (4) имеет вид

$$U_s(\omega, y) = C_1 \operatorname{ch} \omega y + C_2 \operatorname{sh} \omega y, \qquad (5)$$

тогда

$$\frac{dU_s(\omega, y)}{dy} = \omega \left(C_1 \operatorname{sh} \omega y + C_2 \operatorname{ch} \omega y \right),$$

и с учетом краевых условий получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dU_s(\omega, 0)}{dy} = C_2 \omega = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{T_1}{\omega}, \\ \dfrac{dU_s(\omega, b)}{dy} = \omega \left(C_1 \operatorname{sh} \omega b + C_2 \operatorname{ch} \omega b \right) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{T_2}{\omega}, \end{cases}$$

откуда находим требуемые значения коэффициентов

$$C_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{T_2 - T_1 \operatorname{ch} \omega b}{\omega^2 \operatorname{sh} \omega b}, \quad C_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{T_1}{\omega^2},$$

которые подставляем в равенство (5) и находим решение поставленной краевой задачи для уравнения (4), т. е. требуемый Фурье-образ:

$$U_s(\omega, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{\left(T_2 - T_1 \operatorname{ch} \omega b \right) ch \omega y}{\operatorname{sh} \omega b} + T_1 \operatorname{sh} \omega y \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{T_2 \operatorname{ch}\omega y + T_1\left(\operatorname{sh}\omega y \operatorname{sh}\omega b - \operatorname{ch}\omega b \operatorname{ch}\omega y\right)}{\omega^2 \operatorname{sh}\omega b} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{T_2 \operatorname{ch}\omega y - T_1 \operatorname{ch}\omega(b-y)}{\omega^2 \operatorname{sh}\omega b}.$$

Обращение синус-преобразования Фурье осуществляем по формуле

$$u(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty U_S(\omega, y) \sin\omega x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{T_2 \operatorname{ch}\omega y - T_1 \operatorname{ch}\omega(b-y)}{\omega^2 \operatorname{sh}\omega b} \sin\omega x d\omega. \quad (6)$$

Интеграл (6) можно вычислить следующим образом. Рассмотрим функцию

$$F_S(\omega, y) = \frac{A(\omega)}{B(\omega)} = \frac{T_2 \operatorname{ch}\omega y - T_1 \operatorname{ch}\omega(b-y)}{\omega^2 \operatorname{sh}\omega b}.$$

Функция $F_S(\omega, y)$ имеет простые полюса в точках $\omega_n b = i\pi n$, или $\omega_n = \dfrac{i\pi n}{b}$, $n = 1, 2, \ldots$ (корни уравнения $\operatorname{sh}\omega b = 0$).

Тогда получаем

$$B(\omega) = \omega^2 \operatorname{sh}\omega b,\ B'(\omega) = 2\omega \operatorname{sh}\omega b + b\omega^2 \operatorname{ch}\omega b,\ B'(\omega_n) = b\omega_n{}^2 \operatorname{ch}\omega_n b =$$

$$= b(-1)^n \left(\frac{i\pi n}{b}\right)^2 = -(-1)^n \frac{(\pi n)^2}{b},\ A(\omega_n) = T_2 \operatorname{ch}\omega_n y - T_1 \operatorname{ch}\omega_n b \operatorname{ch}\omega_n y =$$

$$= \left(T_2 - T_1 \operatorname{ch}\omega_n b\right) \operatorname{ch}\omega_n y = \left(T_2 - T_1(-1)^n\right) \operatorname{ch}\frac{i\pi n y}{b} = \left(T_2 - T_1(-1)^n\right) \cos\frac{\pi n y}{b}.$$

Далее вычисляем вычет функции $F_S(\omega, y) e^{i\omega x}$ в простом полюсе $\omega = \omega_n$:

$$\operatorname*{Res}_{\omega=\omega_n} \left(F_S(\omega, y) e^{i\omega x}\right) = \frac{A(\omega_n) e^{i\omega_n x}}{B'(\omega_n)} = -b \frac{\left(T_2 - T_1(-1)^n\right)}{(-1)^n (\pi n)^2} \cdot \cos\frac{\pi n y}{b} e^{i\left(\frac{i\pi n}{b}\right)x} =$$

$$= \frac{b}{(\pi n)^2} (-1)^n \left(T_2 - T_1(-1)^n\right) \cos\frac{\pi n y}{b} e^{-\frac{\pi n x}{b}} = \frac{b}{\pi^2} \frac{(-1)^{n+1}\left(T_2 - T_1(-1)^n\right)}{n^2} \cos\frac{\pi n y}{b} e^{-\frac{\pi n x}{b}}. \quad (7)$$

Рассмотрим особую точку $\omega = 0$. Разложим гиперболический синус в ряд Маклорена:

$$\operatorname{sh}\omega b = \omega b + \frac{1}{3!}(\omega b)^3 + \frac{1}{5!}(\omega b)^5 + \ldots \qquad \ldots .$$

Тогда функцию $F_S(\omega, y)$ представляем в виде

$$F_S(\omega, y) = \frac{T_2 \operatorname{ch}\omega y - T_1 \operatorname{ch}\omega(b-y)}{\omega^2 \cdot \omega b\left(1 + \frac{1}{3!}(\omega b)^2 + \ldots\right.} = \frac{1}{\omega^3} \frac{T_2 \operatorname{ch}\omega y - T_1 \operatorname{ch}\omega(b-y)}{\left(1 + \frac{1}{3!}(\omega b)^2 + \ldots\right.}.$$

Из полученного соотношения видно, что точка $\omega = 0$ является полюсом 3-го порядка. Вводим функцию

$$\bar{F}_S(\omega, y) = \frac{T_2 \operatorname{ch}\omega y - T_1 \operatorname{ch}\omega(b-y)}{1 + \frac{1}{3!}(\omega b)^2 + \ldots} \tag{8}$$

и вычисляем вычет функции $F_S(\omega, y)e^{i\omega x}$ в полюсе $\omega = 0$:

$$\operatorname*{Res}_{\omega=0}\left(F_S(\omega, y)e^{i\omega x}\right) = \operatorname*{Res}_{\omega=0}\left(\frac{\bar{F}_S(\omega, y)}{b\omega^3}e^{i\omega x}\right) = \frac{1}{2b}\frac{d^2}{d\omega^2}\left(\bar{F}_S(\omega, y)e^{i\omega x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2b}\left(\bar{F}_S''(\omega,y) + 2ix\bar{F}_S'(\omega,y) - x^2\bar{F}_S(\omega,y)\right)e^{i\omega x}\Big|_{\omega=0} =$$

$$= \frac{1}{2b}\left(\bar{F}_S''(0,y) + 2ix\bar{F}_S'(0,y) - x^2\bar{F}_S(0,y)\right). \tag{9}$$

Как следует из равенства (8), $\bar{F}_S(0,y) = T_2 - T_1$. Дифференцируя соотношение (8) по переменной ω, получаем

$$\bar{F}_S'(\omega,y) = \frac{T_2 y \operatorname{sh}\omega y - T_1(b-y)\operatorname{sh}\omega(b-y)}{1 + \frac{1}{3!}(\omega b)^2 + \ldots} -$$

$$- \frac{\left(\frac{2}{3!}\omega b^2 + \frac{4}{5!}\omega^3 b^4 + \ldots\right.\qquad y - T_1 \operatorname{ch}\omega(b-y)\big)}{\left(1 + \frac{1}{3!}(\omega b)^2 + \ldots\right.^2}, \text{ откуда следует } \bar{F}_S'(0,y) = 0.$$

Выражение для второй производной $\bar{F}_S''(\omega,y)$ получается очень громоздким, поэтому расчеты здесь приводить не будем, запишем окончательный результат:

$$\bar{F}_S''(0,y) = T_2 y^2 - T_1(b-y)^2 - \frac{1}{3}b^2(T_2 - T_1).$$

Подставляя найденные величины $\bar{F}_S(0,y)$, $\bar{F}_S'(0,y)$ и $\bar{F}_S''(0,y)$ в соотношение (9), находим требуемую величину вычета в полюсе $\omega = 0$:

$$\operatorname*{Res}_{\omega=0}\left(F_S(\omega,y)e^{i\omega x}\right)=\frac{1}{2b}\left(T_2y^2-T_1(b-y)^2-\frac{1}{3}b^2(T_2-T_1)-x^2(T_2-T_1)\right)=$$

$$=\frac{1}{2b}\left(T_2y^2-T_1(b^2-2by+y^2)-x^2(T_2-T_1)-\frac{1}{3}b^2(T_2-T_1)\right)=$$

$$=\frac{1}{2b}\left((T_2-T_1)(y^2-x^2)+2bT_1y-T_1b^2-\frac{1}{3}b^2(T_2-T_1)\right)=$$

$$=\frac{1}{2b}\left((T_2-T_1)(y^2-x^2)+2T_1by-T_1b^2-\frac{1}{3}b^2(T_2+2T_1)\right)=$$

$$=\frac{1}{2b}\left((T_2-T_1)(y^2-x^2)+T_1y-\frac{1}{6}b(T_2+2T_1)\right). \qquad (10)$$

Интеграл в соотношении (6) находим по формуле

$$\int_0^\infty F_s(\omega,y)\sin\omega x d\omega=\pi\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{\omega=0}\left(F_s(\omega,y)e^{i\omega x}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Res}\left(F_s(\omega,y)e^{i\omega x}\right)\right)\ (\operatorname{Im}\omega_n>0).$$

Подставляем в эту формулу найденные величины вычетов в полюсах $\omega=\omega_n$ (равенство (7)) и полюсе $\omega=0$ (равенство (9)), находим требуемый интеграл:

$$\int_0^\infty F_s(\omega,y)\sin\omega d\omega=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2b}(T_2-T_1)\left(y^2-x^2\right)+T_1y-\frac{1}{6}b(T_2+2T_1)\right)+$$

$$+\frac{b}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\left(T_2-T_1(-1)^n\right)}{n^2}\cos\frac{\pi ny}{b}e^{-\frac{\pi nx}{b}}=$$

$$=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2b}(T_2-T_1)\left(y^2-x^2\right)+T_1y-\frac{1}{6}b(T_2+2T_1)\right)+$$

$$+\frac{b}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_1+T_2(-1)^{n+1}}{n^2}\cos\frac{\pi ny}{b}e^{-\frac{\pi nx}{b}}.$$

Подставляя найденный интеграл в соотношение (6), находим решение исходной краевой задачи:

$$u(x,y)=\frac{1}{2b}(T_2-T_1)\left(y^2-x^2\right)+T_1y-\frac{1}{6}b(T_2+2T_1)+\frac{2b}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_1+T_2(-1)^{n+1}}{n^2}\cos\frac{\pi ny}{b}e^{-\frac{\pi nx}{b}}.$$

Список литературы

1 **Свешников, А. Г.** Теория функций комплексной переменной / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. – М. : Наука, 1974. – 320 с.

УДК 517.443

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ПРИ РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

С. А. ДУДКО, А. И. ПРОКОПЕНКО
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Методы интегральных преобразований являются мощным средством решения краевых задач для различных типов уравнений математической физики [1]. При этом наиболее применяемыми методами являются операционный метод (преобразование Лапласа) и метод интегрального преобразования Фурье. В особенности метод интегрального преобразования Фурье эффективен при рассмотрении краевых задач для уравнений эллиптического типа.

При рассмотрении плоских краевых задач метод Фурье можно применять в ситуациях, когда область D на плоскости, в которой ищется решение краевой задачи, представляет собой либо бесконечную полосу: $-\infty < x < \infty$, $0 \le y \le b$, либо полубесконечную полосу: $0 \le x < \infty$, $0 \le y \le b$.

Рассмотрим следующую краевую задачу. Найти решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

в полубесконечной полосе D, где $0 \le x < \infty$, $0 \le y \le b$ при краевых условиях $u(0, x) = 0, u(x, 0) = \psi_1(x)$, $u(x, b) = \psi_2(x)$, где $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ – заданные функции, то есть по переменной y мы задаем краевую задачу 1-го рода.

При нулевом краевом условии для функции $u(x, y)$ на левом конце полуполосы $x = 0$ необходимо использовать синус-преобразование Фурье. Вводим синус-образ функции $u(x, y)$ по формуле

$$U_s(\omega, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u(x, y) \sin \omega x dx, \tag{2}$$

и синус-образы функций краевых условий

$$F_{s1}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \psi_1(x) \sin \omega x dx, \quad F_{s2}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \psi_2(x) \sin \omega x dx. \tag{3}$$

Обращение синус-преобразования Фурье (2) осуществляется по формуле

$$u(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty U_s(\omega, y) \sin \omega x d\omega. \tag{4}$$

Дважды дифференцируем по x обе части равенства (4), получаем

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \left(-\omega^2 U_s(\omega, y)\right) \sin \omega x d\omega,$$

то есть частной производной $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2}$ отвечает Фурье-образ: $-\omega^2 U_s(\omega, y)$.

Поэтому, переходя к Фурье-образам в уравнении (1) и краевых условиях $u(x, 0) = \psi_1(x), u(x, b) = \psi_2(x)$, получаем краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 U_s(\omega, y)}{\partial y^2} - \omega^2 U_s(\omega, y) = 0, \tag{5}$$

$$U_s(\omega, 0) = F_{s1}(\omega), \quad U_s(\omega, b) = F_{s2}(\omega). \tag{6}$$

Общее решение уравнения (5) имеет вид

$$U_s(\omega, y) = c_1 \operatorname{ch} \omega y + c_2 \operatorname{sh} \omega y. \tag{7}$$

Из краевых условий (6) находим значения коэффициентов

$$c_1(\omega) = F_{s1}(\omega), \quad c_2(\omega) = \frac{F_{s2}(\omega) - F_{s1}(\omega) \operatorname{ch} \omega b}{\operatorname{sh} \omega b}.$$

Подставляем эти значения в равенство (7) и окончательно получаем решение краевой задачи (5), (6) в следующем виде:

$$U_s(\omega, y) = F_{s1}(\omega) \frac{\operatorname{sh} \omega (b - y)}{\operatorname{sh} \omega b} + F_{s2}(\omega) \frac{\operatorname{sh} \omega y}{\operatorname{sh} \omega b}.$$

Тогда решение исходной краевой задачи для уравнения (1) находим по формуле обращения Фурье-образа (4), используя также уравнение (3) для Фурье-образов функций краевых условий

$$u(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_{s1}(\omega) \frac{\operatorname{sh} \omega (b - y) \sin \omega x}{\operatorname{sh} \omega b} d\omega +$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_{s2}(\omega) \frac{\operatorname{sh} \omega y \sin \omega x}{\operatorname{sh} \omega b} d\omega =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \psi_1(z) \sin \omega z dz \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} \omega (b - y) \sin \omega x}{\operatorname{sh} \omega b} d\omega +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \psi_2(z) \sin \omega z dz \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} \omega y \sin \omega x}{\operatorname{sh} \omega b} d\omega =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \psi_1(z) dz \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} \omega (b - y)}{\operatorname{sh} \omega b} \sin \omega z \sin \omega x d\omega +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \psi_2(z)dz\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}\omega y}{\operatorname{sh}\omega b}\sin\omega z\sin\omega x d\omega = u_1(x,\,y)+u_2(x,\,y).$$

Рассмотрим первое слагаемое

$$u_1(x,\,y) = = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \psi_1(z)dz\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}\omega(b-y)}{\operatorname{sh}\omega b}\sin\omega z\sin\omega x d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \psi_1(z)dz\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}\omega(b-y)}{\operatorname{sh}\omega b}\big(\cos\omega(x-z)-\cos\omega(x+z)\big)d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \psi_1(z)\big(I_1-I_2\big)dz, \qquad (8)$$

где при записи функции $u_1(x,\,y)$ мы ввели интегралы

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}\omega(b-y)}{\operatorname{sh}\omega b}\cos\omega(x-z)d\omega, \quad I_2 = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}\omega(b-y)}{\operatorname{sh}\omega b}\cos\omega(x+z)d\omega.$$

Интеграл I_1 вычисляем следующим образом. Нули функции $B(\omega)=\operatorname{sh}\omega b$ в точках $\omega_n b = i\pi n$ $(n=1,\,2,\,\ldots$ дают полюса 1-го порядка, поэтому получаем

$$\operatorname*{Re}_{\omega=\omega_n} s\left(\frac{\operatorname{sh}\omega(b-y)}{B(\omega)}e^{i\omega(x-z)}\right) = \frac{\operatorname{sh}\omega_n(b-y)}{B'(\omega_n)}e^{i\omega_n(x-z)} =$$

$$= \frac{-i(-1)^n\sin\dfrac{\pi n y}{b}}{b(-1)^n}e^{i^2\frac{\pi n(x-z)}{b}} = \frac{-i}{b}\sin\frac{\pi n y}{b}e^{-\frac{\pi n(x-z)}{b}}.$$

Тогда интеграл I_1 находим по формуле [2]

$$I_1 = -\pi\sum_{n=1}^\infty \operatorname{Im}\operatorname*{Re}_{\omega=\omega_n} s\left(\frac{\operatorname{sh}\omega(b-y)}{B(\omega)}e^{i\omega(x-z)}\right) = \frac{\pi}{b}\sum_{n=1}^\infty \sin\frac{\pi n y}{b}e^{\frac{-\pi n(x-z)}{b}}. \qquad (9)$$

Полученный ряд (9) несложно суммировать. Пусть $t = e^{\frac{-\pi(x-z)}{b}}$, $k=\dfrac{\pi}{b}$, тогда находим

$$I_1 = \frac{\pi}{b}\sum_{n=1}^\infty \sin nky\cdot t^n = \frac{\pi}{2ib}\sum_{n=1}^\infty\big(e^{inky}-e^{-inky}\big)t^n =$$

$$= \frac{\pi}{2ib}\left(\sum_{n=0}^\infty\left(e^{iky}t\right)^n - \sum_{n=0}^\infty\left(e^{-iky}t\right)^n\right) = \frac{\pi}{2ib}\left(\frac{1}{1-te^{iky}}-\frac{1}{1-te^{-iky}}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2ib}\,\frac{t\left(e^{iky}-e^{-iky}\right)}{1-t\left(e^{iky}+e^{-iky}\right)+t^2} = \frac{\pi}{b}\,\frac{t\sin ky}{1-2t\cos ky+t^2} =$$

$$= \frac{\pi}{b} \frac{e^{-\frac{\pi(x-z)}{b}} \sin\frac{\pi y}{b}}{1 - 2e^{-\frac{\pi(x-z)}{b}} \cos\frac{\pi y}{b} + e^{-\frac{2\pi(x-z)}{b}}} =$$

$$= \frac{\pi}{b} \frac{\sin\frac{\pi y}{b}}{e^{\frac{\pi(x-z)}{b}} + e^{-\frac{\pi(x-z)}{b}} - 2\cos\frac{\pi y}{b}} = \frac{\pi}{2b} \frac{\sin\frac{\pi y}{b}}{\operatorname{ch}\frac{\pi(x-z)}{b} - \cos\frac{\pi y}{b}}.$$

Таким образом, получаем

$$I_1 = \frac{\pi}{2b} \frac{\sin\frac{\pi y}{b}}{\operatorname{ch}\frac{\pi(x-z)}{b} - \cos\frac{\pi y}{b}}.$$

Меняя аргумент косинуса, находим второй интеграл

$$I_2 = \frac{\pi}{2b} \frac{\sin\frac{\pi y}{b}}{\operatorname{ch}\frac{\pi(x+z)}{b} - \cos\frac{\pi y}{b}}.$$

Тогда разность интегралов

$$I_1 - I_2 = \frac{\pi}{2b} \sin\frac{\pi y}{b} \left(\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi(x-z)}{b} - \cos\frac{\pi y}{b}} - \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi(x+z)}{b} - \cos\frac{\pi y}{b}} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2b} \sin\frac{\pi y}{b} \frac{\operatorname{ch}\frac{\pi(x+z)}{b} - \operatorname{ch}\frac{\pi(x-z)}{b}}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(x-z)}{b} - \cos\frac{\pi y}{b} \right)\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(x+z)}{b} - \cos\frac{\pi y}{b} \right)} =$$

$$= \frac{\pi}{b} \frac{\sin\frac{\pi y}{b} \operatorname{sh}\frac{\pi x}{b} \operatorname{sh}\frac{\pi z}{b}}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(x-z)}{b} - \cos\frac{\pi y}{b} \right)\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(x+z)}{b} - \cos\frac{\pi y}{b} \right)}.$$

Полученное соотношение для разности $I_1 - I_2$ подставляем в равенство (8) и находим первое слагаемое:

$$u_1(x, y) = \frac{1}{b} \sin\frac{\pi y}{b} \operatorname{sh}\frac{\pi x}{b} \int_0^\infty \frac{\psi_1(z) \operatorname{sh}\frac{\pi z}{b} dz}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(x-z)}{b} - \cos\frac{\pi y}{b} \right)\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(x+z)}{b} - \cos\frac{\pi y}{b} \right)}. \quad (10)$$

Для второго слагаемого

$$u_2(x, y) = = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \psi_2(z)dz \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\omega y \sin \omega x \sin \omega z}{\operatorname{sh}\omega b} d\omega$$

все выкладки совершенно аналогичны, поэтому сразу приведем результат:

$$u_2(x, y) = \frac{1}{b}\sin\frac{\pi y}{b}\operatorname{sh}\frac{\pi x}{b}\int_0^{\infty} \frac{\psi_2(z)\operatorname{sh}\dfrac{\pi z}{b}dz}{\left(\operatorname{ch}\dfrac{\pi(x-z)}{b} + \cos\dfrac{\pi y}{b}\right)\left(\operatorname{ch}\dfrac{\pi(x+z)}{b} + \cos\dfrac{\pi y}{b}\right)}. \quad (11)$$

Суммируя равенства (10) и (11), находим решение поставленной краевой задачи для уравнения (1) в интегральной форме:

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) =$$

$$= \frac{1}{b}\sin\frac{\pi y}{b}\operatorname{sh}\frac{\pi x}{b}\left(\int_0^{\infty} \frac{\psi_1(z)\operatorname{sh}\dfrac{\pi z}{b}dz}{\left(\operatorname{ch}\dfrac{\pi(x-z)}{b} - \cos\dfrac{\pi y}{b}\right)\left(\operatorname{ch}\dfrac{\pi(x+z)}{b} - \cos\dfrac{\pi y}{b}\right)} + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\infty} \frac{\psi_2(z)\operatorname{sh}\dfrac{\pi z}{b}dz}{\left(\operatorname{ch}\dfrac{\pi(x-z)}{b} + \cos\dfrac{\pi y}{b}\right)\left(\operatorname{ch}\dfrac{\pi(x+z)}{b} + \cos\dfrac{\pi y}{b}\right)}\right).$$

Список литературы

1 **Кошляков, Н. С.** Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М. : Высш. шк., 1970. – 712 с.

2 **Свешников, А. Г.** Теория функций комплексной переменной / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. – М. : Наука, 1974. – 320 с.

УДК 519.21/.22

ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН В КУРСЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В. Е. ЕВДОКИМОВИЧ, Е. А. ЗАДОРОЖНЮК
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Работа со случайными величинами является основой любого статистического исследования. Именно поэтому изучение в курсе «Теория вероятностей и математическая статистика» многомерных случайных величин носит

сугубо прикладной практический характер. Оно позволяет продемонстрировать студентам многообразие «вероятностного мира» и подготовить их к дальнейшей работе с теми статистическими понятиями, которые они могут встретить в рамках своей специальности или специализации.

Однако регулярное сокращение количества аудиторных часов по дисциплине приводит к сокращению материала, изучаемого как на лекциях, так и на практических занятиях. В результате этого преподавателю приходится ограничивать количество изучаемого материала только одномерными случайными величинами, а многомерные случайные величины упоминать вскользь. Данная статья показывает, как можно даже в рамках относительно небольшого курса рассмотреть данную тему и закрепить ее на практических примерах [1].

Многомерной (*n*-мерной) *случайной величиной* называется функция $X(\omega)$, определенная на множестве элементарных событий Ω, которая каждому элементарному исходу ω ставит в соответствие *n* действительных чисел. Таким образом, многомерная (*n*-мерная) случайная величина является совокупностью *n* одномерных величин (компонентов). Все компоненты многомерной *дискретной* случайной величины – одномерные *дискретные* случайные величины, а компоненты многомерной *непрерывной* случайной величины – одномерные непрерывные случайные величины. Многомерные *смешанные* случайные величины содержат дискретные и непрерывные компоненты.

Функцией распределения двумерной случайной величины (ξ, η) (или совместной функцией распределения случайных величин ξ и η) называется функция $F_{\xi\eta}(x, y)$, равная вероятности того, что компонент ξ примет значение меньшее, чем *x*, а компонент η – значение, меньшее чем *y*:

$$F_{\xi\eta}(x, y) = P(\xi < x, \eta < y) = P(\{\xi < x\} \cap \{\eta < y\}). \quad (1)$$

$F_{\xi\eta}(x, y)$ в точке (x, y) определяет вероятность, с которой двумерная случайная величина примет значение в нижнем левом квадранте относительно точки (x, y) (рисунок 1).

Функция распределения двумерной случайной величины (ξ, η) обладает следующими свойствами.

Свойство 1. $F_{\xi\eta}(x, y) \geq 0$.

Свойство 2. Если $x_1 < x_2$, то $F_{\xi\eta}(x_1, y_1) \leq F_{\xi\eta}(x_2, y_1)$; если $y_1 < y_2$, то $F_{\xi\eta}(x_1, y_1) \leq F_{\xi\eta}(x_1, y_2)$.

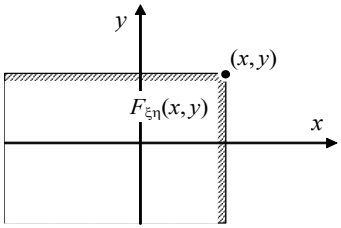


Рисунок 1

Свойство 3. $F_{\xi\eta}(x, +\infty) = F_{\xi}(x);\ F_{\xi\eta}(+\infty, y) = F_{\eta}(y)$.

Свойство 4. $F_{\xi\eta}(-\infty, y) = 0;\ F_{\xi\eta}(x, -\infty) = 0.$

Свойство 5. $F_{\xi\eta}(+\infty, +\infty) = 1.$

Свойство 6. По каждому из аргументов $F_{\xi\eta}(x, y)$ непрерывна слева.

Функция распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$ – наиболее универсальная форма закона распределения многомерных случайных величин как дискретных, так и непрерывных и смешанных. Кроме этого, закон распределения непрерывных многомерных случайных величин может быть задан с помощью функции плотности распределения.

Двумерная случайная величина называется непрерывной, если ее функция распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$ – непрерывная функция, дифференцируемая по каждому из аргументов, у которой существует вторая смешанная производная.

Определим *функцию плотности распределения* $F_{\xi\eta}(x, y)$ *непрерывной двумерной случайной величины* как предел отношения вероятности попадания значения случайной величины (ξ, η) в элементарный прямоугольник, примыкающий к точке (x, y), к площади этого прямоугольника, когда оба его размера стремятся к нулю:

$$f_{\xi\mu}(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P(\{x < \xi < x + \Delta x\} \cap \{y < \eta < y + \Delta y\})}{\Delta x \cdot \Delta y} = \frac{\partial^2 F_{\xi\eta}(x, y)}{\partial x \cdot \partial y}. \quad (2)$$

При этом данный предел есть не что иное, как вторая смешанная производная функции распределения двумерной случайной величины (ξ, η).

Функция плотности распределения непрерывной двумерной случайной величины (ξ, η) обладает следующими свойствами.

Свойство 1. $f_{\xi\eta}(x, y) \geq 0$.

Свойство 2. $P(\{x_1 \leq \xi < x_2\} \cap \{y_1 \leq \eta < y_2\}) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f_{\xi\eta}(x, y) dx dy.$

Свойство 3. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(x, y) dx dy = 1.$

Свойство 4. $\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f_{\xi\eta}(x,y)dxdy = F_{\xi\eta}(x,y).$

Свойство 5. $P(\{\xi = x\} \cap \{\eta = y\}) = 0.$

Независимыми называются случайные величины, закон распределения каждой из которых не зависит (не изменяется) от того, какое значение приняла другая случайная величина.

Рассмотрим определение функции распределения случайной величины (1)

$$F_{\xi\eta}(x,y) = P(\{\xi < x\} \cap \{\eta < y\}).$$

Если величины ξ и η независимы, то независимыми являются события $\{\xi < x\}$ и $\{\eta < y\}$. По теореме умножения вероятностей:

$$F_{\xi\eta}(x,y) = P(\{\xi < x\} \cap \{\eta < y\}) = P(\xi < x)P(\eta < y) = F_{\xi}(x)F_{\eta}(y). \quad (3)$$

Тождество (3) является необходимым и достаточным *условием независимости двух случайных величин* и называется *теоремой умножения функций распределения независимых случайных величин*.

Если ξ и η – непрерывные независимые случайные величины, то, дифференцируя левую и правую части равенства (3) по *x* и по *y*, получим

$$\frac{\partial^2 F_{\xi\eta}(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_{\xi}(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_{\eta}(y)}{\partial y}.$$

Учитывая определения функции плотности распределения непрерывной двумерной случайной величины и функции плотности распределения непрерывной одномерной величины, получаем равенство, называемое *теоремой умножения функций плотности распределения независимых величин*:

$$f_{\xi\eta}(x,y) = f_{\xi}(x)f_{\eta}(y). \quad (4)$$

Если компоненты двумерной случайной величины (ξ, η) зависимы, то для нахождения совместного закона распределения недостаточно знать законы распределения компонентов: требуется знать так называемый условный закон распределения одной из них.

Условным законом распределения величины ξ называется закон ее распределения, вычисленный в предположении, что другая случайная величина (η) приняла определенное значение.

Функция распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ системы зависимых случайных величин может быть записана в виде, называемом *теоремой умножения функций распределения величин*:

$$F_{\xi\eta}(x, y) = P(\xi < x)P(\eta < y \mid \xi < x) = F_{\xi}(x)F_{\eta}(y \mid \xi < x), \qquad (5)$$

где $F_{\eta}(y \mid \xi < x) = P(\eta < y \mid \xi < x)$ – условная функция распределения величины η при условии наступления события $\{\xi < x\}$.

На практике чаще используют другую форму условного закона распределения: $F_{\eta}(y \mid \xi = x)$ или $f_{\eta}(y \mid \xi = x)$, т. е. когда величина ξ принимает фиксированное значение x. Тем более, что для непрерывных случайных величин справедлива следующая *теорема умножения плотностей*:

$$f_{\xi\eta}(x, y) = f_{\xi}(x)f_{\eta}(y \mid \xi = x). \qquad (6)$$

Для описания многомерных случайных величин используются числовые характеристики ее составляющих, а также параметры, характеризующие зависимость между компонентами многомерной величины. Одна из таких характеристик – корреляционный момент (ковариация).

Корреляционным моментом η двух случайных величин ξ и η называют математическое ожидание произведения отклонений этих величин от своих математических ожиданий: $\mu_{\xi\eta} = M[(\xi - M[\xi])(\eta - M[\eta])]$. (7)

Корреляционный момент имеет размерность, равную произведению размерностей величин ξ и η. Часто пользуются характеристикой «*коэффициент корреляции*» случайных величин, которая определяется по формуле

$$r_{\xi\eta} = \frac{\mu_{\xi\eta}}{\sigma[\xi]\sigma[\eta]}. \qquad (8)$$

Коэффициент корреляции может принимать значения из отрезка $[-1;\ 1]$. Корреляционный момент и коэффициент корреляции характеризуют степень линейной зависимости между двумя величинами. Нулевое значение данных характеристик указывает на *отсутствие линейной зависимости* между исследуемыми величинами (при этом может существовать *нелинейная зависимость*). Равенство коэффициента корреляции $r_{\xi\eta}$ единице указывает на наличие *положительной линейной функциональной зависимости* между величинами ξ и η (с увеличением ξ величина η также увеличивается). Если же $r_{\xi\eta} = -1$, то между величинами ξ и η существует *отрицательная* (с увеличением ξ величина η уменьшается) *линейная функциональная зависимость*. Промежуточные значения коэффициента корреляции ($r_{\xi\eta} \in (-1;\ 0)$ или $r_{\xi\eta} \in (0;\ 1)$) указывают на тенденцию к наличию линейной зависимости между величинами ξ и η.

Пример. Рассмотрим систему двух дискретных случайных величин (ξ, η), где случайная величина ξ – число поездов в сутки (п./сут), задержанных станцией *А*, случайная величина η – число (п./сут), задержанных станцией *Б*. Известна матрица распределения системы случайных величин (ξ, η) (таблица 1).

Таблица 1 – **Матрица распределения двумерной случайной величины** (ξ, η)

(ξ, η)	$\eta = 0$	$\eta = 1$	$\eta = 2$
$\xi = 0$	0,4	0,05	0,05
$\xi = 1$	0,2	0,02	0,03
$\xi = 2$	0,05	0,2	0

Требуется: 1) найти законы распределения случайных величин ξ и η; 2) вычислить числовые характеристики (математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайных величин ξ и η, математическое ожидание произведения $\xi\eta$, корреляционный момент η и коэффициент корреляции $r_{\xi\eta}$); 3) выяснить, являются ли величины ξ и η зависимыми.

Решение. 1 Вероятности значений случайной величины ξ найдем по формуле

$$P(\xi = x_i) = \sum_{j=1}^{3} p_{ij}. \quad P(\xi = 0) = 0,5; \quad P(\xi = 1) = 0,25; \quad P(\xi = 2) = 0,25.$$

Ряд распределения случайной величины ξ можем записать в виде таблицы 2.

Таблица 2 – **Матрица распределения случайной величины** ξ

x_i	0	1	2
$P(\xi = x_i)$	0,5	0,25	0,25

Вероятности значений случайной величины η найдем по формуле

$$P(\eta = y_i) = \sum_{i=1}^{3} p_{ij}. \quad P(\eta = 0) = 0,65; \quad P(\eta = 1) = 0,27; \quad P(\eta = 2) = 0,08.$$

Ряд распределения случайной величины η можем записать в виде таблицы 3.

Таблица 3 – **Матрица распределения случайной величины** η

y_j	0	1	2
$P(\eta = y_i)$	0,65	0,27	0,08

2 Вычислим числовые характеристики.

Вычислим математическое ожидание случайной величины ξ, используя ряд распределения из таблицы 2:

$$M[\xi] = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = 0 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,25 + 2 \cdot 0,25 = 0,75 \text{ п./сут.}$$

Вычислим математическое ожидание случайной величины η, используя ряд распределения из таблицы 3:

$$M[\eta] = \sum_{j=1}^{3} y_j p_j = 0 \cdot 0,65 + 1 \cdot 0,27 + 2 \cdot 0,08 = 0,43 \text{ п./сут.}$$

Вычислим дисперсию случайной величины ξ, используя ряд распределения из таблицы 2: $D[\xi] = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 p_i - (M[\xi])^2 = 0,6875 \text{ (п./сут)}^2$.

Вычислим дисперсию случайной величины η, используя ряд распределения из таблицы 3: $D[\eta] = \sum_{j=1}^{3} y_j^2 p_j - (M[\eta])^2 = 0,675 \text{ (п./сут)}^2$.

Средние квадратические отклонения случайных величин ξ и η равны:

$$\sigma[\xi] = \sqrt{D[\xi]} \approx 0,829 \text{ п./сут;} \quad \sigma[\eta] = \sqrt{D[\eta]} \approx 0,822 \text{ п./сут.}$$

Вычислим математическое ожидание произведения случайных величин ξ и η, пользуясь заданной матрицей распределения:

$$M[\xi\,\eta] = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x_i y_j p_{ij} = 0,48 \text{ (п./сут)}^2.$$

Корреляционный момент двух случайных величин ξ и η вычисляется по формуле $\mu_{\xi\eta} = M[\xi\,\eta] - M[\xi]M[\eta] = 0,1575 \text{ (п./сут)}^2$.

Коэффициент корреляции двух случайных величин ξ и η по формуле

$$r_{\xi\eta} = \frac{\mu_{\xi\eta}}{\sigma[\xi]\sigma[\eta]} = \frac{0,1575}{0,829 \cdot 0,822} \approx 0,231.$$

3 Так как коэффициент $r_{\xi\eta} \neq 0$, то случайные величины ξ и η зависимы.

Наличие зависимости между случайными величинами ξ и η можно проверить и на основании определения независимости: если $P(\xi = x_i,\ \eta = y_j) = P(\xi = x_i)P(\eta = y_j)$, то случайные величины ξ и η независимы. Если данное равенство нарушается, то величины зависимы.

Список литературы

1 **Евдокимович, В. Е.** Основы теории вероятностей : учеб.-метод. пособие для всех специальностей факультета УПП / В. Е. Евдокимович. – Гомель : БелГУТ, 2007. – 122 с.

УДК 519.711

МОДЕЛИ СИСТЕМ С ПРОТИВОПОЛОЖНО ДЕЙСТВУЮЩИМИ ОСНОВНЫМИ ФАКТОРАМИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ В КОМПЛЕКСЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И СПЕЦИАЛЬНЫХ ДИСЦИПЛИН

Д. В. КОМНАТНЫЙ
Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого, Республика Беларусь

В теории безопасности сложных технических систем находит применение модель безопасности, в которой рассматривается действие двух главных факторов. Эти факторы зависят от общего физического параметра функционирования системы и действуют в противоположных направлениях. Такая модель первоначально была предложена для анализа радиационной безопасности.

В общем виде рассматриваемая модель имеет следующую математическую форму [1]. Параметр функционирования X изменяется в пределах $X_1 < X < X_2$. Фактор S описывается функцией $S(X)$, монотонно возрастающей в пределах изменения параметра функционирования. Фактор Y описывается функцией $Y(X)$, монотонно убывающей в пределах изменения параметра функционирования. Сумма функций $R(X) = S(X) + Y(X)$ отображает обобщенный показатель функционирования. Справедливы соотношения для производных функций $Y'(X) < 0$, $Y''(X) > 0$ – функция убывает, график ее вогнутый; $S'(X) > 0$, $S''(X) > 0$ – функция возрастает, график ее вогнутый. Тогда $R''(X) = S''(X) + Y''(X) > 0$ и имеется значение X, для которого $R(X)$ имеет минимум. Найти его можно классическими методами дифференциального исчисления.

На базе рассмотренной обобщенной модели можно построить частные модели электротехнических устройств, анализ которых востребован при обеспечении функциональной безопасности систем управления ответственными технологическими процессами.

Так, предложена детерминистская модель помехоустойчивости электронной аппаратуры, в которой функционирование аппаратуры описывается энергией электромагнитных процессов. Компонентами энергии являются энергия полезного сигнала и энергия помех. Энергия помех возрастает пропорционально квадрату амплитуды напряжения помех, энергия полезного сигнала монотонно убывает по нелинейному закону в зависимости от амплитуды напряжения помех. При некотором значении амплитуды напряжения помех возникает минимум энергии в системе, отвечающий предельно допустимому уровню помех.

При расчете электромагнитных экранов общая эффективность экранирования имеет две составляющие. Составляющая, выражающая потери на поглощение волны, монотонно возрастает с ростом частоты излучения. Составляющая, учитывающая потери на отражение волны, монотонно убывает с ростом частоты. На некоторой частоте возникает минимум эффективности экранирования. Это минимальное значение может быть недостаточно для обеспечения помехоустойчивости экранированной аппаратуры.

В теории цепей с распределенными параметрами показано, что километрический коэффициент затухания является суммой двух слагаемых, зависящих от характеристического сопротивления линии, и (опосредованно) от ее первичных параметров. Первое слагаемое прямо пропорционально характеристическому сопротивлению, второе – обратно пропорционально. Результирующий коэффициент затухания имеет минимум, соответствующий условию Хэвисайда для линии без искажений.

В цепях с комбинированной связью, которая является паразитным каналом проникновения помех, сопротивление связи вычисляется как сумма индуктивного и емкостного сопротивления. Зависимости этих сопротивлений от частоты таковы, что сопротивление связи имеет минимум в рабочей полосе частот. На частоте, соответствующей минимуму, проникновение помех через паразитный канал усиливается, что может оказаться недопустимым.

Системы, описание которых может быть осуществлено в рамках рассматриваемой модели, встречаются не только в теории безопасности, но и в других областях. Зачастую эти области практически не имеют точек соприкосновения.

Так, при сложном нагружении, вызванном образованием трещины, с ростом логарифма длины трещины касательные напряжения убывают, а нормальные возрастают. Имеется значение длины трещины, при которой суммарная интенсивность напряжений имеет минимум.

В прикладной аэродинамике самолета аналогичные модели возникают при анализе сил сопротивления полету. Параметром функционирования здесь является скорость самолета, противоположными действующими факторами – сила индуктивного сопротивления и сила сопротивления формы, в качестве показателя функционирования могут быть приняты суммарная сила сопротивления или мощность двигателя.

В нефтяном деле при подъеме флюида в добывающей скважине потери напора на трение возрастают с ростом расхода газа, а потери напора на дегазацию убывают. Общие потери напора имеют явно выраженный минимум, соответствующий оптимальному расходу газа.

В технико-экономическом анализе надежности технических систем известна классическая модель, учитывающая затраты на производство и затраты на эксплуатацию. С ростом вероятности отказа изделия затраты на производство убывают обратно пропорционально вероятности, а затраты на эксплуатацию возрастают прямо пропорционально вероятности. При численно равных значениях обоих видов затрат возникает оптимальная вероятность отказа, которой соответствуют минимальные суммарные затраты.

Кроме технической сферы аналогичные системы с двумя противоположно действующими факторами обнаруживаются в сфере экономики. В качестве примера могут быть указаны известные модели математической теории управления запасами (модели EOQ, формула Уилсона и ее обобщения). В области биофизики при приложении термодинамики и теории теплопередачи к анализу энергетики живого организма также предложена модель с двумя противоположно действующими факторами.

Такое разнообразие областей, в которых существуют системы с рассматриваемой моделью, делает чисто математическое описание недостаточным для полного объяснения природы подобных систем. Для исчерпывающего объяснения требуется сочетание математического и специального системного подхода к анализу, как это обосновано в [2].

Применение двух указанных подходов позволяет выявить глубокую аналогию в свойствах всех описанных систем. Она заключается в том, что факторы, определяющие функционирование системы, ведут себя как выраженные альтернативы. При этом показатель функционирования системы имеет ярко выраженный минимум. Зачастую (но не всегда) этот минимум соответствует оптимальному функционированию системы.

С позиции диалектики, на которой базируется методология системного подхода, альтернативные величины являются тезисом и антитезисом диалектической триады. Увеличение одного фактора – тезиса – влечет за собой уменьшение второго фактора – антитезиса, и наоборот. Причиной этого является единство тезиса и антитезиса в явлении. Синтез в триаде – это формирование обобщающей величины, в которой может возникнуть ярко выраженный минимум. Если этот минимум соответствует выгодным режимам

функционирования, то в этом режиме противоположности уравновешиваются, что является признаком гармонии в системе. В некоторых системах режим минимума обобщающей величины является противоположностью выгодного режима. Это соответствует взаимопереходу противоположностей в диалектике.

Для всех систем с альтернативными факторами может применяться единый способ анализа. Этот способ заключается в отражении действующих факторов и обобщающей величины в единой системе координат, выявлении экстремума и свойств экстремального режима [3].

По результатам доклада может быть сделан вывод, что системы с двумя ярко выраженными альтернативными факторами функционирования могут быть выделены в отдельное семейство. Математическая модель функционирования таких систем достаточно проста, но позволяет получить важные практические результаты. Применение методов системного подхода выявляет глубокие основания, которые имеются в функционировании сравнительно простых систем.

Следовательно, обобщенное рассмотрение таких систем имеет и теоретическое, и прикладное значение. С позиций подготовки специалистов железнодорожного транспорта использование в учебном процессе анализа рассмотренных систем путем сочетания математического анализа и системного подхода как общенаучного имеет значение для тех специальностей, в которых осуществляется изучение сложных технических систем. Такими специальностями являются «Системы обеспечения движения поездов» и «Технологии транспортных процессов».

Студенты указанных специальностей, во-первых, закрепляют знания дифференциального исчисления путем рассмотрения простых, но практически полезных примеров. Во-вторых, они получают первоначальные навыки применения системного подхода, которые затем становятся основой для изучения методов анализа сложных технических и технико-экономических систем. В-третьих, изучение студентами философии привязывается к практике, что благотворно сказывается на усвоении как философии, так и специальных дисциплин.

Список литературы

1 **Белов, П. Г.** Системный анализ и моделирование опасных процессов в техносфере / П. Г. Белов. – М. : Академия, 2003. – 512 с.

2 Природа моделей и модели природы / Д. М. Гвишиани, И. Б. Новик, С. А. Пегов [и др.]. – М. : Мысль, 1986. – 270 с.

3 **Межжерин, В. А.** Рассказы об экономии природы / В. А. Межжерин. – Киев, Вища шк., 1988. – 174 с.

УДК 656.222.4:[378.147+001]

НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ГРАФИКА ДВИЖЕНИЯ ПОЕЗДОВ НА ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОМ ТРАНСПОРТЕ

В. Г. КУЗНЕЦОВ, В. Г. КОЗЛОВ, Н. Н. КАЗАКОВ
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

График движения поездов (ГДП) на участках инфраструктуры железнодорожного транспорта представляет собой сложную модель организации пропуска поездов различных категорий на полигоне железной дороги, который образуется из множества станций и перегонов и требует согласования технологий работы множества участников перевозочного процесса (оператора инфраструктуры, в том числе предприятий пути, сигнализации и связи, энергоснабжения, перевозчиков, операторов тяги и других) [1]. Организация процесса движения грузовых и пассажирских поездов основана на применении методов моделирования их движения исходя из технических характеристик составов поездов, поездных локомотивов, путевой инфраструктуры, соблюдения норм времени перемещения, ограничений в пропускной способности и других технико-эксплуатационных условий [2, 3]. Решение таких задач требует применения системных знаний в области перевозочного процесса, использования методов тяги поездов, графического и имитационного моделирования и достаточной математической подготовки специалистов.

Раздел «График движения поездов» является важной составной частью учебной дисциплины «Организация вагонопотоков и движения поездов» (ОВДП) и позволяет системно представить знания при подготовке по специальности «Технология транспортных процессов» о пропуске транспортного потока в железнодорожной сети. Формирование необходимых компетенций специалистов закладывается во всех видах учебной работы: лекции, практические и лабораторные занятия, курсовой проект. Кроме того, разработка ГДП, как правило, является частью дипломных проектов по вопросам организации перевозочного процесса.

Учебный материал по разделу «График движения поездов» представляет теорию организации поездной работы на участках железной дороги и включает следующие фундаментальные научно-методические решения [2, 4, 5], требующие естественнонаучных знаний:

– представление ГДП как сетевой модели пообъектного пропуска поездов различных категорий с отражением технологических процессов;

– применение процессного подхода к разработке ГДП и определение теоретических принципов прокладки ниток поездов различных категорий на

маршруте их следования, методологию и классификацию типов ГДП в зависимости от совокупности условий (технических, эксплуатационных и т. п.);

– описание дифференциального уравнения движения поездов в различных режимах движения и тяги, формирование аналитических зависимостей основных параметров движения поезда: разгон, движение в режиме тяги, инерции, торможения состава поезда;

– графическая интерпретация станционных и межпоездных интервалов движения взаимодействующих поездов, последовательность выполнения операций на основе требований НПА по обеспечению безопасности движения в ГДП и с учетом результатов расчета затрат времени на выполнение операций движения поездов на перегонах и железнодорожных станциях;

– моделирование поездной нагрузки и использования пропускной способности на участках инфраструктуры; выбор типа графика и способов движения поездов на основе структурного анализа категорий поездов в ГДП, прогнозных значений объемов вагонопотоков на участках инфраструктуры, заявок перевозчиков, показателей оптимального ПФ и других условий;

– методология расчета пропускной и провозной способности железнодорожных участков, применение аналитических и вероятностных моделей расчета; оценка результативной пропускной способности на основе сравнительного анализа элементов (объектов) подсистем транспортного комплекса;

– принципы и методика расчета наличной пропускной способности при параллельном и непараллельном графике; применение теории расчета коэффициента съема и ее использование для расчета пропускной способности на железнодорожных участках инфраструктуры;

– оценка соответствия потребной и наличной пропускной способности и выбор способов интенсификации использования пропускной способности при организации движения поездов в условиях предельной загрузки участков и технических станций железных дорог;

– композиционные основы прокладки на ГДП пассажирских и грузовых поездов с учетом ПФ и логистических схем перемещения грузо- и вагонопотока в сети; создание поездной модели работы участков на основе изучения закономерностей поездобразования, требований ресурсо- и энергосбережения при пропуске поездов, особенностей обеспечения требуемых параметров надежности работы технического комплекса и подвижного состава;

– теория расчета скорости движения поездов различных категорий и комплексная оценка качества организации поездной работы на участках отделений железной дороги и дороги в целом;

– ряд других.

Модель ГДП разрабатывается на основе трансформации на железнодорожных станциях (как правило технических и грузовых) корреспонденций вагонопотока в поездопоток и представляет собой организованную совокуп-

ность поездов различных категорий и назначений $\{N_{pqi}\}$, которые упорядочиваются в их перемещении в железнодорожной сети по каждой технической станции (i) и железнодорожному участку (i, $i-1$, i, $i+1$), участвующих в поездной работе [2, 4]. Назначение поезда (pq) образует вектор его перемещения в железнодорожной сети от станции формирования (p) до станции расформирования поезда (q), а множество поездов определяются транспортной нагрузкой – плановым (расчетным) вагонопотоком, который моделируется на основе вероятностной модели образования поездных заявок [5].

Выбор оптимального ГДП является сложной технико-эксплуатационной и экономической задачей. Минимизация издержек при реализации ГДП сопряжена с выполнением ряда системных ограничений: освоение всех заявленных перевозчиками поездов – пропускная способность технических станций и участков на маршруте следования $\{ N^{\text{Т.С}}_{pq(i)}, N^{\text{уч}}_{pq(i,i+1)} \}$, количество ниток ГДП $\{ N^{\text{ГДП}}_{pq(i,i+1)} \}$ должно быть больше заявленных размеров; время нахождения поездов в пути на участках инфраструктуры $\{ N^{\text{П}}_{pq(i,i+1)} \}$ должно соответствовать норме в сроке доставки ($T^{\text{дост}}_{pq}$), которая включает время нахождения вагонов в поездах на участках; эффективное использование ресурсов для осуществления поездной работы на участке.

Расчетная эксплуатационная нагрузка, которая устанавливается в модели ГДП, обладает свойством неустойчивости [1, 2]. Коэффициенты годовой неравномерности в объемах поездной работы на железнодорожных участках изменяются в диапазоне от 1,2 до 1,4, а месячной неравномерности – от 1,1 до 1,5. Кроме того, параметры поездов (масса, количество вагонов в составе и т. п.) не всегда унифицированы и имеют существенные отклонения от средних значений. Например, масса грузовых поездов на участке Минск – Орша образует вариационный ряд от 1000 до 8000 т. Тяговое моделирование траектории движения грузовых поездов с их уникальными параметрами приводит к необходимости использовать в ГДП дифференцированные времена хода поездов на перегонах участка. Поэтому в моделях ГДП предусматривается временное резервирование для погашения как неравномерности перевозок, учета траектории каждого поезда, так и возникновения затруднений в движении поездов при отказах. Специалистам в области организации поездной работы требуется методологическое понимание оперативной готовности технического комплекса и технологического процесса к обеспечению параметров перевозки исходя из ситуационной модели поездообразования и уровня надежности инфраструктуры и подвижного состава.

Методология разработки ГДП опирается на совокупность аналитических методов расчета составляющих элементов графика (расчёт времен хода, интервалов, размеров движения и т. п.), а также на априорных моделях, ко-

торые учитывают процессную неопределенность, которая возникает в связи множеством условий пропуска различных категорий поездов, их приоритетов и согласованности взаимодействия участков и технических станций, переходов между железными дорогами и т. п. Компенсация технологической неопределенности обеспечивается за счет поэтапной адаптации ГДП к ситуации в поездной работе. В рамках комплексной системы управления поездной работы (КСУПР) предложены модели нормативного, вариантного, прогнозного (актуального) ГДП и переход на интеллектуальные процессы разработки ГДП [4, 5].

Интеллектуализация разработки ГДП позволяет проводить итерационное улучшение исходного варианта ГДП (нормативного) на основе установленных правил, критериев, требований. Такой подход позволяет учесть в моделях уникальные для участков закономерности, структурировать поездопотоки и установить мероприятия по использованию суточного бюджета времени. Например, выделить в ГДП устойчивое «ядро» поездов, установить сквозные нитки пропуска поездов по логистическим цепям перевозки массовых грузов, учесть особенности ГДП при электротяге, соблюсти требования ресурсо- и энергосбережения при построении ГДП, представить в ГДП «окна» для проведения ремонтно-профилактических работ и т. п.

На кафедре «Управление эксплуатационной работой и охрана труда» БелГУТа выполнен ряд научных исследований и разработок в области теории ГДП, информатизации процессов поездообразования и моделирования пропуска поездов на участках инфраструктуры Белорусской железной дороги. Данные научные разработки включены в технологию работы Центра управления перевозками (ЦУП) железной дороги и Центров управления местной работой (ЦУМР) на отделениях. Важной частью функционирования ЦУП стала автоматизированная система диспетчерского управления с использованием программных средств АС «Графист», что позволяет обеспечить переход к информационно-управляющим системам, развивать интеллектуальные системы управления [4, 5].

Дальнейшее развитие системы организации движения поездов на железнодорожном транспорте требует подготовки специалистов, обладающих системными знаниями и математической подготовкой решения ряда эксплуатационных задач: математическое описание цифровых моделей сетевой инфраструктуры железной дороги, композиция объектов сети на основе теории графов в железнодорожные направления, коридоры; создание адекватных моделей поездопотока в транспортной сети на основе дифференциации по устойчивым признакам и условиям пропуска на маршрутах следования; ситуационное моделирование пропуска поездов на участках инфраструктуры на основе тяговых расчетов; оптимизация взаимодействия между техническими станциями и железнодорожными участками на основе методов теории массового обслуживания и надежности функционирования их

подсистем; обеспечение устойчивости поездной работы на основе систем мониторинга технического и технологического состояния, системного анализа выполнения качественных показателей и норм НПА.

Изучение студентами естественнонаучных и профильных дисциплин ориентировано на формирование достаточных компетенций специалиста в области организации перевозок на железнодорожном транспорте, позволяющих исследовать закономерности образования и изменения поездопотока на железной дороге, определять его устойчивость, устанавливать численные значения; проводить структуризацию транспортного потока по требуемым признакам при перемещении в сети; определять статистические закономерности обслуживания поездопотока в подсистемах участков; оценивать надежность и готовность подсистем к обслуживанию, устанавливать предельное состояние железнодорожных участков, обеспечивающих устойчивую поездную работу; проводить исследования и эксперименты на основе имитационного моделирования работы железнодорожных участков; давать технико-экономическую оценку вариантов ГДП и проводить выбор наилучшего по заданным критериям [2, 3].

Интеллектуальная оптимизация ГДП основана на использовании знаний о свойствах поездопотока, его мониторинга, состоянии инфраструктуры и подвижного состава, формировании баз данных о технологических процессах в поездной работе, формировании информационно-аналитических моделей с использованием детерминированных и стохастических методов описания перемещения транспортного потока в сети, методах моделирования пропуска поездами различных категорий в подсистемах и схемах их пропуска по железнодорожному участку.

Выводы. 1 Формирование компетенций по специальности «Технология транспортных процессов» в области теории разработки графика движения поездов требует наличия достаточных комплексных знаний исследования и структурирования поездопотока в транспортной сети, формализованной для процессов поездной работы.

2 Развитие учебного материала по дисциплине ОВДП следует ориентировать на формирование у студентов устойчивой способности решать сложные задачи выбора способа организации поездной работы на основе моделирования пропуска поездов различных категорий на участках сети с учетом совокупности условий и требований перевозочного процесса.

Список литературы

1 Управление эксплуатационной работой железных дорог и качеством перевозок : учеб. / П. С. Грунтов, Ю. В. Дьяков, А. М. Марочкин ; под общ. ред. П. С. Грунтова. – М. : Транспорт, 1994. – 542 с.

2 **Каретников, А. Д.** График движения поездов : монография / А. Д. Каретников, Н. А. Воробьев. – М. : Транспорт, 1979. – 301 с.

3 Порядок разработки графика движения поездов на Белорусской железной дороге : СТП БЧ 15.114-2018. – Утв. приказом 365НЗ от 14.04.2018. – Минск : Бел. ж. д., 2013. – 114 с.

4 **Ерофеев, А. А.** Интеллектуальная система управления перевозочным процессом на железнодорожном транспорте : монография / А. А. Ерофеев. – Гомель : БелГУТ, 2022. – 407 с.

5 **Кузнецов, В. Г.** Формирование интегрированной технологии организации вагонопотоков и движения грузовых поездов в цифровой модели железной дороги / В. Г. Кузнецов, Е. А. Федоров, В. Г. Козлов // Интеллектуальные транспортные системы : материалы Междунар. науч.-практ. конф., Москва, 26 мая 2022 г. / Рос. ун-т трансп. (МИИТ), 2022. – М. : Перо, 2022. – С. 204–214 с.

УДК 378.147.091.31:004-054.6

ОПЫТ ВНЕДРЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННО-КОММУНИКАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ ИНОСТРАННЫХ СТУДЕНТОВ ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

А. А. МИХАЛЬЧЕНКО
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Математическая подготовка иностранных студентов инженерно-технических специальностей в области организации работы железнодорожного транспорта имеет определенные особенности. При их обучении используются коммуникационные технологии с элементами искусственного интеллекта. При этом имеет большое значение использование информационно-коммуникационных технологий, которые играют ключевую роль в математическом образовании иностранных студентов инженерно-технических специальностей. Повышается эффективность обучения, при этом происходит адаптация его к неродному (русскому) языку и профессиональной среде, а также формируются необходимые компетенции. Особенная проблема возникает при обучении студентов, в родном языке которых используются иероглифы и отсутствует математическая формализация технологических процессов. Для решения этой проблемы используются системы компьютерной математики.

К таким системам относятся современные табличные процессоры (*Microsoft Excel, OpenOffice.org Calc*), системы для статистических расчетов (*SPSS, Statistica, STADIA, PolyAnalyst*) и программы для моделирования, анализа и принятия решений (*GPSS, ELCUT, Model Vision Studium, ANSYS*). Они позволяют автоматизировать вычисления при организации перевозочного процесса, визуализировать этапы расчетов и решать сложные математические задачи.

При решении технологических задач по организации перевозочного процесса используются системы динамической геометрии. Они помогают использовать соответствующие разделы математики и развивать навыки исследовательской деятельности через графический метод решения задач [1].

С учетом того, что проводятся дистанционные и смешанные форматы обучения, сочетание очных занятий для студентов, которые проходят курс обучения в БелГУТе, с использованием коммуникационных технологий с элементами искусственного интеллекта (презентации, видеоконференции, онлайн-платформы) позволяет организовывать учебный процесс интегрированно, обеспечивать самостоятельную работу и адаптировать обучение под индивидуальные способности студентов.

В процессе обучения для закрепления уровня знаний студентов используется компьютерное тестирование пройденного материала [2]. При этом применяются автоматизированные системы тестирования с возможностью перевода формулировок заданий на иностранные языки. Они помогают оперативно поэтапно контролировать степень усвоения терминологии и учебного материала, корректировать процесс обучения в ходе занятий.

На кафедре используются мультимедийные технологии, которые предусматривают электронные презентации учебного материала и видеоэффекты на нескольких языках в одном файле. Они способствуют наглядности преподаваемого материала, улучшению его восприятия студентами, экономии времени на занятиях и эффективности подготовки к экзаменам и зачетам. Это позволяет обеспечить обучение студентов языковой группы, которая не предусматривает формализацию математического обоснования технологического процесса.

Особенности обучения иностранных студентов математике учитывают:

– наличие языкового барьера при изучении и использовании математического аппарата, поскольку обучение математике ведется на русском языке с максимальной визуализацией материала и использованием цифровых технологий для преодоления языковых трудностей;

– при формировании коммуникативной компетенции система заданий формирует речевые действия, характерные для языка специальности;

– выбор инструментов по адаптации учебного материала к иноязычной культурной среде.

Использование коммуникационных технологий с элементами искусственного интеллекта имеет преимущества:

– индивидуализация учебного процесса, что важно при одновременном обучении студентов различных языковых групп;

– выход на новый уровень восприятия качества обучения и эффективности познавательной деятельности студентов;

– развитие навыков математического моделирования и применения технологий в транспортной деятельности;

– визуализация учебной информации и экспериментального наблюдения

за свойствами объектов, которая позволяет шире использовать математический аппарат при пояснении технологических процессов на транспорте;

– возможность организации обратной связи с обучаемыми и оперативного контроля знаний, что позволяет оперативно оценивать пробелы профессиональной подготовки студентов-иностранцев.

Использование таких технологий становится неотъемлемой частью математического образования иностранных студентов, позволяет сочетать их фундаментальную подготовку с подготовкой к будущей профессиональной деятельности с использованием современных цифровых инструментов [3].

В процессе обучения студентов методы выступают как система последовательных и взаимосвязанных действий (преподавателя и иностранных студентов), обеспечивающих хорошее усвоение математической подготовки. При этом большое значение имеют словесные методы обучения: аудирование, учебники, учебные пособия, слайды, подготовленные на нескольких языках, технические визуальные и аудиовизуальные.

Развитие динамичности и сложности процесса обучения иностранных студентов и повышение требований к их подготовке, качественное и количественное изменение учебной информации – важные факторы в требованиях к средствам обучения. Особым условием эффективного обучения являются учебные презентации на всех этапах учебной подготовки.

Использование аудиовизуальной презентации, информационно-экранных средств в процессе профессиональной подготовки связано с сообщением актуализированных данных по конкретной дисциплине. У преподавателя имеется больше возможностей передать условия математической формализации на родном языке студентов. Использование таких средств позволяет реализовать основные дидактические принципы обучения иностранных студентов и обеспечивает эффективность решения поставленных задач – одновременное обучение русскому языку и специальности.

Список литературы

1 **Аликина, Ю. Д.** Включение англоязычных фрагментов в занятие по математике как способ повышения мотивации обучающихся гуманитарной направленности к изучению дисциплины / Ю. Д. Аликина, В. Ю. Бодряков // Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий : межвуз. сб. науч. работ / Урал. гос. пед. ун-т. – Екатеринбург, 2018. – С. 135–145.

2 **Азимов, Э. Г.** Информационно-коммуникативные технологии в обучении РКИ: от тренировочных упражнений к виртуальной образовательной среде / Э. Г. Азимов, И. Ю. Низовая, Г. С. Аркабаева // Методика преподавания РКИ: традиции и современность : сб. материалов науч.-практ. конф. (к сорокалетию кафедры преподавания РКИ). – М. : Гос. ИРЯ им. А. С. Пушкина, 2015. – С. 5–9.

3 **Хачатурова, Е. Т.** О некоторых аспектах повышения мотивации к освоению математических знаний / Е. Т. Хачатурова, А. И. Громов // Актуальные проблемы методики преподавания естественнонаучных дисциплин в вузе : межвуз. сб. науч.-метод. статей. – Калининград : РГУ им И. Канта. – 2007. – Вып. 3 – С. 33–37.

УДК 531.3:796.012

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ БИОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ В СПОРТЕ

А. Е. ПОКАТИЛОВ, М. А. КИРКОР, Ю. В. ВОРОНОВИЧ, А. М. ГАЛЬМАК, В. Н. ПОПОВ

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, г. Могилев

Отметим сложность исследований в области динамики спорта. Причины в следующем: организовать исследования по кинематике движения проще, т. к. многие характеристики легче измерить и рассчитать. В динамике же некоторые характеристики вообще измерить невозможно, например, силы при выполнении силового анализа. Реакции в суставах (внутренние силы) можно только рассчитать в вычислительном эксперименте. Кроме того, модели целенаправленного движения на динамическом уровне сложнее, чем на кинематическом [1].

Также получаемый массив данных в биомеханическом анализе движений спортсмена значительно больше в области динамики по сравнению с кинематикой движения. По этой причине определение скоростно-силовых качеств мышечной системы затруднено и в определенной мере ограничено. В результате измерительных экспериментов можно получить достаточно приблизительные данные, так как они основаны на выполнении спортсменом движений в строго определенных положениях тела и с определенными фиксированными усилиями.

Для преодоления данной проблемы введем такие понятия, как динамическая скорость и динамическое ускорение по определенной динамической характеристике движения. Такими характеристиками могут быть моменты управляющих сил мышечной системы, биомеханическая мощность, опорные и суставные реакции и пр. [2].

Рассмотрим данные понятия на примере динамической скорости по управляющему моменту. Она отличается от понятия кинематической скорости, связанной с изменением координат БМС по времени. Динамическая скорость по управляющему моменту, Н·м/с, есть первая производная момента по времени, или третья производная от координат по времени. Уравнение имеет вид

$$V_{M_{i-1,i}} = \frac{dM_{i,i-1}}{dt}. \qquad (1)$$

Динамическое уравнение движения спортсмена выглядит так:

$$M_{i,i-1} = g\sum_{j=i}^{N} C_{ij}\cos Q_j - \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=i}^{N} A_{jk}Q_k^2 \sin\left(Q_k - Q_j\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=i}^{N} A_{jk}Q_k \sin\left(Q_k - Q_j\right). \qquad (2)$$

Здесь уравнение (2) подходит для биомеханического анализа в динамике для гимнастических упражнений в условиях жесткой опоры или, например, для упражнений в тяжелой атлетике.

Отметим чрезвычайную сложность получения и анализа уравнений динамических скоростей и ускорений на теоретическом уровне. Получаемые уравнения весьма громоздки и для отдельного звена могут занимать не одну страницу.

Поэтому эффективным путем анализа динамических характеристик является численное дифференцирование соответствующих данных [3], получаемых в результате вычислительного эксперимента, по уравнению (1).

На рисунке 1 показан результат вычислительного эксперимента для движущего момента биомеханической системы относительно опоры при выполнении большого оборота назад на перекладине.

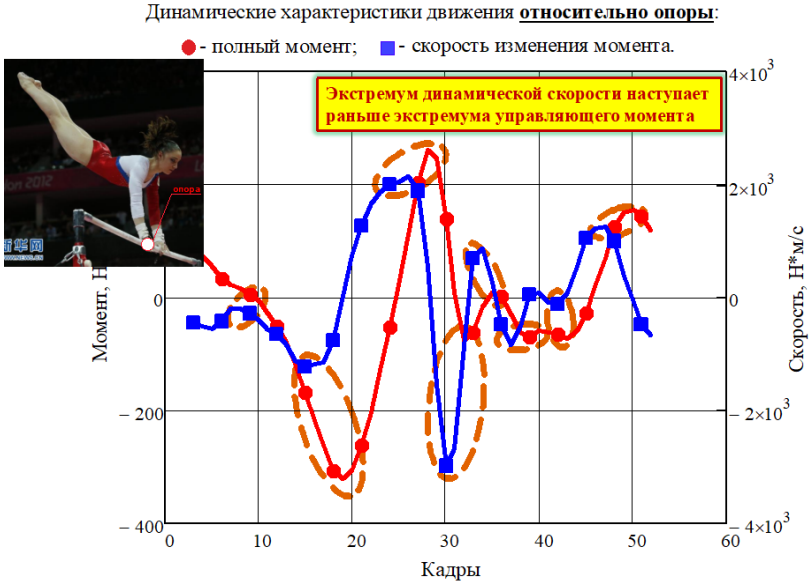


Рисунок 1 – Динамика движения в спортивной гимнастике

Подобная картина, показанная на рисунке 1, наблюдается и для управляющих моментов относительно плечевого и тазобедренного суставов спортсмена.

Ниже показано динамическое уравнение для управляющих моментов мышечных сил в случае выполнения упражнения в условиях упругой опоры.

$$M_{i,i-1} = g\sum_{j=i}^{N} C_{ij}\cos Q_j - L_{0r}\sum_{j=i}^{N} C_{ij}\sin Q_j + L_{0B}\sum_{j=i}^{N} C_{ij}\cos Q_j -$$

$$-\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=i}^{N} A_{jk}Q_k^2\sin\left(Q_k - Q_j\right) + \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=i}^{N} A_{jk}Q_k\cos\left(Q_k - Q_j\right). \qquad (3)$$

В уравнении (3) часть членов отражает деформацию грифа перекладины, а другая часть – движение биомеханической системы, т. е. спортсмена. Анализ выражения показывает, что при дифференцировании формулы (3), согласно уравнению (1), мы получаем производные тригонометрических функций следующего содержания:

$$\frac{d\left[\sin(x)\right]}{dt} = \cdot \qquad (4)$$

$$\frac{d\left[\cos(x)\right]}{dt} = -\cdot \qquad (5)$$

Анализ уравнений (4) и (5) вместе с графиками рисунка 1 показывает причину сдвига графиков управляющего момента и его динамической скорости. При дифференцировании меняются функции и может меняться знак на противоположный. В этом случае мы получаем сдвиг функций, как показано на рисунке 2.

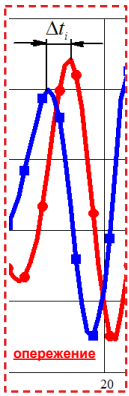


Рисунок 2 – Сдвиг графиков

При этом сдвиг наблюдается как в верхней части графиков, так и в нижней.

Отметим, что локальные экстремумы динамической скорости опережают локальные экстремумы самого момента управляющих сил мышечной системы. И такая картина наблюдается на всей траектории движения спортсмена и для всех суставов, включая внешнюю кинематическую пару, т. е. опору. При этом наличие или отсутствие упругой опоры на данную закономерность не влияет.

Покажем изменение управляющего момента и его динамической скорости в тяжелой атлетике для рывка штанги (рисунок 3).

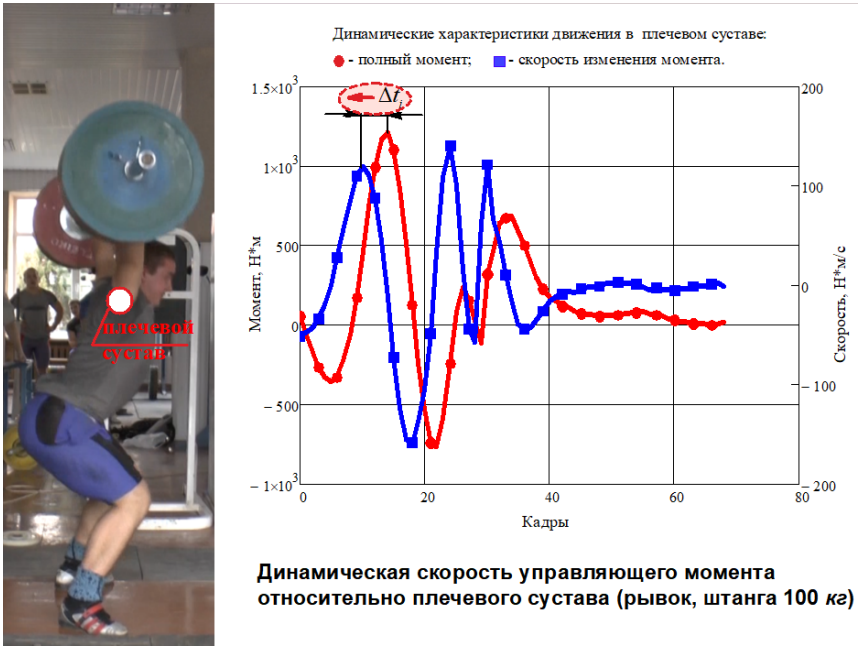


Рисунок 3 – Динамика движения в тяжелой атлетике. Рывок штанги

На рисунке 3 изменение динамических характеристик показано на примере управляющего момента относительно плечевого сустава.

Список литературы

1 Моделирование сложно-координированного целенаправленного движения спортсмена: проблемы и пути решения / М. А. Киркор, А. Е. Покатилов, А. М. Гальмак, Ю. В. Воронович // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 4 (45). – С. 68–75.

2 **Покатилов, А. Е.** Скоростно-силовые качества мышечной системы спортсмена / А. Е. Покатилов, В. Н. Попов, Ю. В. Воронович // Математическая морфология. Электронный математический и медико-биологический журнал. – 2024. – Вып. 4. – Т. 23. – URL: http://sgma.alpha-design.ru/MMORPH/N-84-html/TITL-84.html. (дата обращения: 23.12.2024).

3 **Шуп, Т.** Решение инженерных задач на ЭВМ / Т. Шуп. – М. : Мир, 1982. – 238 с.

УДК 531.3:796.012

МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОГО УСИЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В БИОМЕХАНИКЕ СПОРТА

А. Е. ПОКАТИЛОВ, М. А. КИРКОР, Ю. В. ВОРОНОВИЧ, А. М. ГАЛЬМАК
Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, г. Могилев

Структура механико-математических моделей. При исследовании влияния упругой опоры на целенаправленное движение спортсмена необходимо определиться с важными терминами и определениями, отражающими это влияние.

Модели для расчета параметров движения опорно-двигательного аппарата человека в целом, т. е. с учетом влияния упругого снаряда, получат название моделей биомеханической системы в условиях упругой опоры, а комплексные модели, включающие две системы (отдельно взятую опору и биомеханическую систему (БМС) с учетом всего влияния спортивного снаряда) – полных моделей биомеханической системы, или просто полные модели. Соответственно, систему, состоящую из механической и биомеханической систем, назовем полной системой.

Во все вышеуказанные модели параметры опоры входят в явном виде. В работе [1] показано, что спортивный снаряд влияет на движение не только через изменение параметров своего движения, но и путем изменения параметров движения самой биомеханической системы. Для описания этих процессов введем еще одно понятие: части моделей биомеханической системы в условиях упругой опоры, не содержащие параметры спортивного снаряда в явном виде, назовем выделенными. Сама биомеханическая система, для которой получены эти модели, тоже будет выделенной.

После выделения остаются части уравнений с параметрами спортивного снаряда в явном виде. Их назовем выделенными моделями опоры:

$$f_k(\text{ПС}) = f_1(\text{ОП}) + f_2(\text{БМС}^{\text{В}}) = f_1(\text{ОП}^{\text{В}}) + f_2(\text{БМС}^{\text{В}}), \qquad (1)$$

где $f_k(\text{ПС})$ – полная модель кинематики (полная система); $f_1(\text{ОП})$ – модель кинематики опоры; $f_1(\text{ОП}^{\text{В}})$ – выделенная модель кинематики опоры; $f_2(\text{БМС}^{\text{В}})$ – выделенная модель кинематики биомеханической системы.

В этом случае по уравнению (1) модель кинематики опоры и ее выделенная модель есть одно и то же. Имеем

$$f_1(\text{ОП}) = f_1(\text{ОП}^{\text{В}}). \qquad (2)$$

Таким образом, уравнение, показывающие отношение систем, составляющих полную систему БМС на кинематическом уровне, имеет две состав-

ляющие – одна относится к механической системе, т. е. к снаряду, вторая непосредственно к биомеханической системе, т. е. к самому спортсмену.

Для моделей динамики справедливо отношение

$$f_{\text{Д}}(\text{ПС}) = f_3(\text{ОП}) + f_4(\text{БМС}); \tag{3}$$

$$f_4(\text{БМС}) = f_5(\text{ОП}^{\text{В}}) + f_6(\text{БМС}^{\text{В}}), \tag{4}$$

где $f_{\text{Д}}(\text{ПС})$ – полная модель динамики; $f_3(\text{ОП})$ – модель динамики опоры; $f_4(\text{БМС})$ – модель динамики биомеханической системы в условиях упругой опоры; $f_5(\text{ОП}^{\text{В}})$ – выделенная модель динамики опоры; $f_6(\text{БМС}^{\text{В}})$ – выделенная модель динамики биомеханической системы.

Выражение (3) позволяет любую полную модель динамики представить как

$$f_{\text{Д}}(\text{ПС}) = f_3(\text{ОП}) + f_5(\text{ОП}^{\text{В}}) + f_6(\text{БМС}^{\text{В}}). \tag{5}$$

Здесь параметры опоры в явном виде дважды входят в уравнения динамики полной системы. Первый раз – в виде отдельно взятых формул $f_3(\text{ОП})$, а второй – тоже в явном, то есть выделенном в отдельные зависимости $f_5(\text{ОП}^{\text{В}})$, но уже составными частями моделей биомеханической системы в условиях упругой опоры.

Сравнительный анализ уравнений (1)–(5) показывает разные отношения между системами в моделях кинематики и динамики.

Динамическое усиление движения. Укажем, что в биомеханике необходим анализ динамики каждого звена. Так, для гимнаста при выполнении маховых упражнений представляет практический интерес движение и верхних конечностей, и нижних, и туловища, и пр. [1, 2]. При этом нет возможности сравнить выполнение спортивного упражнения на упругом снаряде и на абсолютно жестком, так как последнего не существует, как не существует и техники выполнения необходимых движений на нем. Но этого и не требуется. Ведь интерес представляют не просто общие закономерности взаимодействия спортсмена с упругой опорой, но и оценка каждого конкретного выполнения упражнения каждым спортсменом в каждый момент времени.

В работах [1, 2] показано, что обобщенные координаты Q_i, характеризующие положение спортсмена, и параметры $\dot{Q}$ $\ddot{Q}$ представляющие кинематику его движения: обобщенные скорости и обобщенные ускорения в определенной степени зависят и от упругости спортивного снаряда. Их значения при движении биомеханической системы в условиях жесткой опоры

имели бы иную величину, чем при выполнении упражнения на спортивном снаряде с упругими свойствами.

С этой точки зрения обобщенную координату Q_i биомеханической системы можно представить в виде суммы:

$$Q_i = Q_i^{\text{БМС}} + \Delta Q_i = Q_i^{\text{БМС}} + Q_i^{\text{ОП}},$$

где $Q_i^{\text{БМС}}$ – часть угла, образованная *i*-м звеном с осью *OY* и зависящая только от движения биомеханической системы без учета упругих свойств спортивного снаряда; ΔQ_i – часть угла, образованная *i*-м звеном с осью *OY* и зависящая от упругих свойств спортивного снаряда, $\Delta Q_i = Q_i^{\text{ОП}}$.

При первом приближении про углы $Q_i^{\text{БМС}}$ можно было бы сказать и так: это обобщенные координаты биомеханической системы в условиях жесткой опоры.

На самом деле картина взаимного влияния снаряда и спортсмена более сложна. На рисунке 1 проиллюстрировано это положение. Спортсменка стоит на одной ноге в статичной позе, но на рисунке 1, *а* опорой является неподвижный ковер, а на рисунке 1, *б* опора – это относительно неподвижные руки партнеров.

а) *б*)



Рисунок 1 – Спортивные упражнения:
а – гимнастика; *б* – акробатика

Конечно же, во втором случае для баланса тело спортсменки должно учитывать возможную подвижность опоры, т. е. рук, что сказывается на технике удержания статичной позы (балансировке) самой БМС.

Проиллюстрируем взаимное влияние на рисунке 2. Данная схема расширена по сравнению с формулами (1)–(4), в которых отраженно влияние в целом только снаряда и БМС.

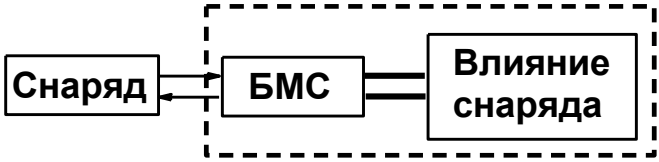


Рисунок 2 – Функциональные связи между опорой и БМС

Здесь пунктирным прямоугольником объединены БМС и влияние снаряда на БМС. Этим подчеркивается, что нет независимого от спортивного снаряда движения БМС, оно уже изменено влиянием упругой опоры.

Представляется, что на данном этапе исследований искать способы определения такого влияния на технику спортивного упражнения нужно путем сравнения выполнения упражнения одним и тем же спортсменом на упругом и жестком спортивных снарядах, проведения таких натурных испытаний для группы спортсменов, статистической обработки полученных результатов и (на основании этого) выведении общих закономерностей.

Список литературы

1 Структура механико-математических моделей динамического ускорения по управляющему моменту мышечной системы спортсмена / А. Е. Покатилов, Ю. В. Воронович, М. А. Киркор, А. М. Гальмак // Биомеханика двигательных действий и биомеханический контроль в спорте : материалы XI Всерос. с междунар. участием науч.-практ. конф., Москва, 14–15 ноября 2024 г. / Московская государственная академия физической культуры ; под ред. А. Н. Фураева. – Малаховка : МГАФК, 2024. – С. 112–119.

2 **Покатилов, А. Е.** Биомеханический анализ спортивных упражнений на примере тяжелой атлетики и спортивной гимнастики : монография / А. Е. Покатилов, Ю. В. Воронович. – Могилев : БГУТ, 2024. – 369 с.

3 **Артоболевский, И. И.** Теория механизмов и машин : учеб. для втузов / И. И. Артоболевский. – М. : Наука, 1988. – 640 с.

4 **Маркеев, А. П.** Теоретическая механика / А. П. Маркеев. – 2-е. изд. – Ижевск : РХД, 1999. – 569 с.

УДК 621.372:517

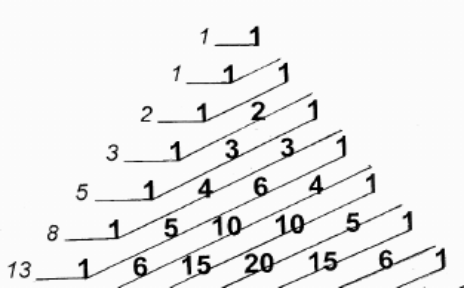
ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АРИФМЕТИЧЕСКОГО ТРЕУГОЛЬНИКА ПАСКАЛЯ

Н. Ф. СЕМЕНЮТА
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Треугольник Паскаля является одной из фундаментальных математических структур, которая лежит в основе теории чисел, взаимосвязанной с

законами природы, науки и техники [1, 2]. Закономерности треугольника широко проявляются в математическом анализе, комбинаторике, теории вероятностей, программировании и др. Он и по сей день является предметом многих исследований с неожиданными результатами. К таким неожиданным результатам относится и связь треугольника Паскаля с параметрами неоднородной лестничной электрической цепи, биноминальными коэффициентами, числами Фибоначчи, треугольными числами, натуральными числами и др.

В основе треугольника Паскаля лежит бином Ньютона – формула разложения произвольной натуральной степени бинома $(a + b)^n$ (рисунок 1).



$$C_0^0$$
$$C_1^0\ C_1^1$$
$$C_2^0\ C_2^1\ C_2^2$$
$$C_3^0\ C_3^1\ C_3^2\ C_3^3$$
$$C_4^0\ C_4^1\ C_4^2\ C_4^3\ C_4^4$$
$$C_5^0\ C_5^1\ C_5^2\ C_5^3\ C_5^4\ C_5^5$$
$$C_6^0\ C_6^1\ C_6^2\ C_6^3\ C_6^4\ C_6^5\ C_6^6$$

Рисунок 1 – Арифметический треугольник Паскаля

Биномиальные коэффициенты: $C_n^0 = C_n^n = 1.$ Каждое число, начиная с третьего ряда, равно сумме двух расположенных над ним чисел:

$$C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k. \qquad (1)$$

Левая и правая стороны треугольника соответствуют ряду единиц 1, следующие строки – последовательности натуральных чисел N = 1, 2, 3, …, далее – последовательности треугольных чисел 1, 3, 6, …:

$$T_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Одним из удивительных свойств треугольника Паскаля является связь его «диагональных чисел» и чисел последовательности Фибоначчи (рисунок 1). Суммы диагональных чисел сумм биноминальных коэффициентов треугольника равны числам Фибоначчи:

$$C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + C_{n-3}^3 + C_{n-4}^4 + \ldots = F_n\ .$$

Электрической модели треугольника Паскаля соответствует неоднородная лестничная электрическая цепь (рисунок 2), состоящая из каскадного соединения n-го числа простейших четырехполюсников с резисторами в продольных ветвях R_{n1} = 1 и поперечных – суммы двух резисторов R_{n2} =1 и $R_{n3} = T_n$. Особенностью электрической модели треугольника Паскаля явля-

ется то, что токи всех поперечных ветвей цепи равны единице 1, а токи продольных ветвей – натуральным числам $N = 1, 2, 3, \ldots$.

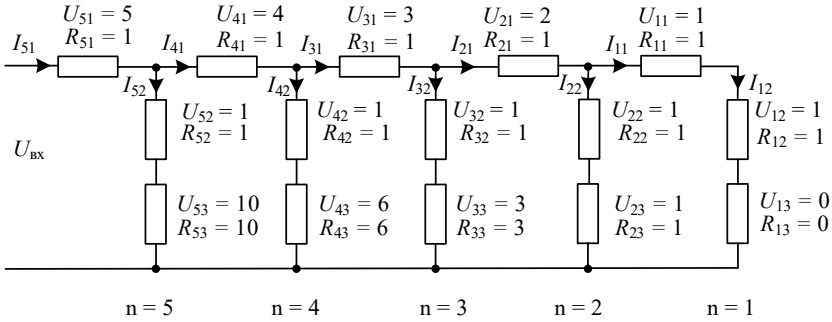


Рисунок 2 – Электрическая модель треугольника Паскаля

Сложность электрической модели треугольника Паскаля состоит в том, что необходимо моделировать последовательности чисел (1), ряды натуральных чисел N и треугольных чисел T_n.

В соответствии с правилами Кирхгофа токи узлов электрической цепи (рисунок 2) определяются следующими соотношениями:

$$I_{51} = I_{52} + I_{41}, \quad I_{41} = I_{42} + I_{31}, \quad I_{31} = I_{32} + I_{21}, \quad I_{21} = I_{22} + I_{11}, \quad I_{11} = I_{12},$$

$$C_5^1 = C_4^0 + C_4^1,\ C_4^1 = C_3^0 + C_3^1,\ C_3^1 = C_2^0 + C_2^1,\ C_2^1 = C_1^0 + C_1^1,\ C_1^1 = C_0^0.$$

Значение общего тока на входе цепи I_{51} равно сумме токов продольных ветвей:

$$I_{51} = I_{52} + I_{42} + I_{32} + I_{22} + I_{12};$$

$$C_5^1 = C_4^0 + C_4^0 + C_3^0 + C_2^0 + C_1^0,$$

Напряжения ветвей замкнутых контуров каждого четырехполюсника при этом

$$U_{вх} = U_{51} + U_{52} + U_{53}, \quad U_{52} + U_{53} = U_{41} + U_{42} + U_{43},$$
$$U_{42} + U_{43} = U_{31} + U_{32} + U_{33}, U_{32} + U_{33} = U_{21} + U_{22} + U_{23},$$

$$U_{вх} = C_5^1 + C_5^2 + 1; \qquad C_5^2 + 1 = \quad C_4^1 + C_4^2 + 1.$$

Напряжения на входе всей цепи $U_{вх}$ равно сумме напряжений продольных резисторов и напряжения оконечного резистора:

$$U_{вх} = U_{51} + U_{41} + U_{31} + U_{21} + U_{11} + U_{12};$$

$$U_{вх} = C_6^2 + 1 = T_6 + 1; \qquad U_{вх} = C_5^1 + C_4^1 + C_3^1 + C_2^1 + C_1^1 + 1.$$

Результаты анализа токов и напряжений электрической модели приведены в таблице 1.

Таблица 1 – **Результаты анализа токов и напряжений электрической модели**

n	1	2	3	4	5
R_{n1}	1	1	1	1	1
R_{n2}	1	1	1	1	1
R_{n3}	0	1	3	6	10
I_{n1}	1	2	3	4	5
I_{n2}	1	1	1	1	1
U_{n2}	1	1	1	1	1
U_{n1}	1	2	3	4	5
U_{n3}	0	1	3	6	10

Из таблицы 1 следует, что последовательности напряжений U_{n1} и U_{n2} равны биномиальным коэффициентам, а напряжение U_{n3} – треугольным числам:

$$U_{11} = 1 = C_1^1 \qquad U_{12} = 1 = C_1^0 \qquad U_{13} = 0 = C_1^2$$

$$U_{21} = 2 = C_2^1 \qquad U_{22} = 1 = C_2^0 \qquad U_{23} = 1 = C_2^2 = T_2$$

$$U_{31} = 3 = C_3^1 \qquad U_{32} = 1 = C_3^0 \qquad U_{33} = 3 = C_3^2 = T_3$$

$$U_{41} = 4 = C_4^1 \qquad U_{42} = 1 = C_4^0 \qquad U_{43} = 6 = C_4^2 = T_4$$

$$U_{51} = 5 = C_5^1 \qquad U_{52} = 1 = C_5^0 \qquad U_{53} = 10 = C_5^2 = T_5 .$$

Таким образом, в работе установлена еще одна скрытая связь арифметического треугольника Паскаля и лестничных электрических цепей; произошла «электрификация» треугольника.

В результате получен треугольник напряжений лестничной электриче-

ской цепи, подобный арифметическому треугольнику Паскаля:

$$U_{00}^{1} = C_0^0 = 1$$

$$U_{01}^{1} = C_1^0 = 1 \quad U_1 = C_1^1 = 1$$

$$U_{02}^{1} = C_2^0 = 1 \quad U_2 = C_2^1 = 2 \quad U_{02}^{11} = C_2^2 = 1$$

$$U_{03}^{1} = C_3^0 = 1 \quad U_3 = C_3^1 = 3 \quad U_{03}^{11} = C_3^2 = 3 \quad U_{03}^{1} = C_3^3 = 1$$

$$U_{04}^{1} = C_4^0 = 1\, U_4 = C_4^1 = 4\, U_{04}^{11} = C_4^2 = 6\, U_4 = C_4^3 = 4\, U_{04}^{1} = C_4^4 = 1$$

$$U_{05}^{1} = C_5^0 = 1 \quad U_5 = C_5^1 = 5 \quad U_{05}^{11} = C_5^2 = 10 \quad U_{05}^{11} = C_5^3 = 10$$

$$U_5 = C_5^4 = 5 \quad U_{05}^{1} = C_5^5 = 1$$

Полученные результаты также подтверждают мысль американского математика Мартина Гарднера (1914–2010), что треугольник Паскаля связывает воедино различные аспекты математики, не имеющие, на первый взгляд, ничего общего (в рассмотренной статье – теорию чисел и теорию электрических цепей). Это эвристическое открытие в теории чисел и теории электрических цепей, начало которым было положено в работах [3, 4]. Думаем, что электрическая модель арифметического треугольника Паскаля представляет интерес для современной науки и может стать источником новых исследований как в науке, так и в электрических цепях.

В следующих работах будут рассмотрены результаты применения треугольника Паскаля, чисел Фибоначчи и треугольных чисел в конкретных объектах.

Список литературы

1 **Успенский, В. А.** Треугольник Паскаля / В. А. Успенский. – М. : Наука, 1979. – 48 с.

2 **Грехем, Р.** Конкретная математика. Основание информатики / Р. Грехем, Д. Кнут, О. Поташник. – М. : Мир,1998. – 703 с.

3 **Семенюта, Н. Ф.** Моделирование линий с распределенными параметрами рекуррентными числами / Н. Ф. Семенюта // Актуальные проблемы информатики: математическое, программное и информационное обеспечение : материалы межгос. науч. конф. – Минск : БГУ, 1996. – С. 123–124.

4 **Семенюта, Н. Ф.** О взаимосвязи чисел треугольника Паскаля и параметров электрических цепей / Н. Ф. Семенюта // Информатизация обучения математике и информатике : педагогические аспекты. – Минск : БГУ, 2006. – С. 412–414.

5 **Семенюта, Н. Ф.** Электрические модели золотого сечения и рекуррентных последовательностей чисел / Н. Ф. Семенюта // Гармоничное развитие систем – третий путь человечества. – Одесса : Институт креативных технологий, 2011. – С. 87–93.

6 **Семенюта, Н. Ф.** Взаимосвязь электрических моделей последовательностей чисел Фибоначчи с правилами Кирхгофа и тождествами Кассини / Н. Ф. Семенюта // Академия Тринитаризма. – Эл № 77-6567, публ. 29843, 27.01.2026.

УДК 378.147:51

РАЗРАБОТКА СОДЕРЖАНИЯ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ КОМПЕТЕНТНОСТНОГО ПОДХОДА В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ БУДУЩИХ ИНЖЕНЕРОВ

О. В. ФИЛИПЕНКО
Белорусско-Российский университет, г. Могилев

В качестве ведущего подхода в системе профессионального образования Республики Беларусь законодательно определен компетентностный подход [1, с. 2]. Обучающийся как субъект образовательного процесса признается главной фигурой. Как отмечает В. И. Байденко, «компетентностный подход требует переориентации на студентоцентрированный характер образовательного процесса» [2, с. 9]. Согласно А. А. Вербицкому, «в вузе необходимо организовать такое обучение, которое обеспечивает переход, трансформацию одного типа деятельности (познавательный) в другой (профессиональный) с соответствующей сменой потребностей и мотивов, целей, действий (поступков), средств, предметов и результатов» [3, с. 51].

Сконцентрируем внимание на подготовке инженеров по направлению «Мехатроника и робототехника». Проведенный анализ образовательного стандарта данного направления подготовки и рабочей программы по математике установил, что содержание математического образования является обязательной частью содержания профессионального образования будущих инженеров. В связи с этим актуальной является проблема разработки содержания обучения математике для реализации компетентностного подхода.

Для формирования у студентов технических специальностей ценностного отношения к математическим знаниям, которые необходимы в их будущей профессиональной деятельности, разработаны профессионально ориентированные задания. Основная цель их разработки и использования в процессе обучения математике – ликвидировать разрыв между математической теорией и производственной практикой. Согласно А. А. Вербицкому, в условиях компетентностного подхода «предметное содержание деятельности студента проектируется как система учебных проблемных ситуаций, проблем и задач, постепенно приближающихся к профессиональным» [4, с. 44]. Из исследования Т. И. Федотовой под *профессионально ориентированной задачей* понимается задача, условие и требование которой определяют собой модель определенной профессиональной ситуации, для решения которой используется математический аппарат [5, с. 9]. Применение таких задач в практике обучения математике способствует профессиональному развитию личности будущего инженера. Регулярное решение профессионально ориентированных задач на занятиях по математике способствует

формированию у будущих инженеров осознанного понимания значимости математических знаний для выбранной профессии.

Разработка содержания профессионально ориентированных задач по математике предусматривает учет следующих требований:

1) связь содержания задач с будущей профессиональной деятельностью студентов;

2) понимание студентами терминологии, используемой в профессионально ориентированных задачах;

3) наглядность информации – представление условия задачи в виде диаграмм, таблиц, рисунков, схем;

4) доступность для студентов математического аппарата в решении задач;

5) значимость полученного результата для решения конкретной профессиональной проблемы.

Представим алгоритм формирования у студентов значимости математических знаний в будущей профессиональной деятельности в процессе решения профессионально ориентированных задач по математике: вначале содержание профессионально ориентированной задачи вызывает интерес у студентов в силу прослеживания связи с профессией; затем у них формируется потребность в решении задачи для приобретения новых знаний; далее студенты анализируют условие задачи, рассматривают возможные варианты ее решения; затем наблюдается активность к действию. Таким образом, студенты осознают цель приобретения нового знания, имеют представление о сфере его применения.

Преимуществами использования разработанного для реализации компетентностного подхода содержания обучения математике будущих инженеров-мехатроников или робототехников является формирование целостного профессионального мышления. Для решения профессионально ориентированных задач студенту необходимы знания из различных областей: математики, механики, электроники, информатики и систем управления. Использование профессионально ориентированных задач на занятиях по математике развивает у студентов творческую активность и самостоятельность. Задания с возможностью варьирования условий, процедур и результатов активизируют мыслительную деятельность и развивают творческий подход к решению поставленных профессиональных проблем. К преимуществам использования профессионально ориентированных задач можно отнести повышение мотивации и осознанности обучения. Понимание студентом практического применения своих знаний повышает интерес к учебе, развивает осознанное отношение к процессу познания. Решение профессионально ориентированных задач позволяя выпускнику не просто владеть теорией, а быть готовым к решению практических задач, стоящих в реальном промышленном секторе.

Список литературы

1 Концепция развития системы образования Республики Беларусь до 2030 года. – Утв. Постановлением Совета Министров респ. беларусь 30.11.2021 № 683 // Национальный правовой Интернет-портал Республики Беларусь, 02.12.2021, 5/49678. – URL : https://pravo.by/dokuvent/?quid=3871&pO=C22100683 (дата обращения: 10.09.2026).

2 **Байденко, В. И.** Выявление состава компетенций выпускников вузов как необходимый этап проектирования ГОС ВПО нового поколения : методическое пособие / В. И. Байденко. – М. : Исследовательский центр проблем качества подготовки специалистов, 2006. – 72 с.

3 **Вербицкий, А. А.** Активное обучение в высшей школе : контекстный подход : метод. пособие / А. А. Вербицкий. – М. : Высш. шк., 1991. – 207 с.

4 **Вербицкий, А. А.** Контекстное обучение в компетентностном подходе / А. А. Вербицкий // Высшее образование в России. – 2006. – № 11. – С. 39–46.

5 **Федотова, Т. И.** Профессионально ориентированные задачи как содержательный компонент математической подготовки студентов технического вуза в условиях уровневой дифференциации : автореф. дис. канд. пед. наук : 13.00.02 / Т. И. Федотова. – Омский гос. пед. ун-т. – Красноярск, 2009. – 25 с.

УДК 37.018.43

ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

И. П. ШАБАЛИНА, Е. Е. ГРИБОВСКАЯ
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

Работа со студентами заочной формы обучения имеет ряд особенностей. Короткий срок пребывания студентов на сессии предъявляет свои требования к организации учебного процесса. Во-первых, такая форма получения образования предполагает высокий уровень самостоятельности и самоорганизации со стороны самих студентов. Во-вторых, на преподавателей ложится ответственность за организацию самостоятельной работы студентов, а также по ее контролю.

Организация самостоятельной работы студента – это совместная работа сотрудников деканата и преподавателей, ведущих занятия. Особая роль отводится преподавателям общеобразовательных дисциплин, т. к. их дисциплины первые изучаются студентами.

Работа студента-заочника начинается с установочной сессии. Именно во время этой первой недели обучения, которая в нашем учреждении образования обычно проходит в сентябре, первокурсники получают все необходимые установки, учебные материалы и т. д. Все вопросы организационного плана освещаются на собрании первокурсников с руководством деканата.

Также все студенты получают памятку студента-заочника, в которой содержится вся необходимая информация, рекомендации по самостоятельной работе, там же имеется перечень кафедр с номерами телефонов, график работы кафедр во время консультационных суббот и т. д.

Далее студентам выдается их рабочий план на текущий учебный год, в котором содержатся сведения об учебных дисциплинах, изучаемых в этом учебном году, а именно количество аудиторных занятий, их виды, форма отчетности. Этот план студенты-заочники также могут увидеть на сайте заочного факультета. Таким образом, задается своеобразный вектор образовательной работы учащегося на учебный год.

Следующий этап – непосредственно самостоятельная работа по предметам. Рассмотрим его на примере изучения дисциплины «Математика», которое начинается с проработки теоретического материала, полученного во время лекций на установочной сессии, затем учебной литературы.

Поскольку основная работа студентов-заочников – самостоятельная и проводится она в межсессионный период, то важно наличие и доступность учебно-методического обеспечения образовательной деятельности, наличие в библиотеке достаточного количества комплектов учебной литературы, наличие электронных учебно-методических комплексов дисциплин на сайте университета. Для того, чтобы обучающимся было проще систематизировать теоретический материал, кроме лекций, материалы которых они могут взять в электронном виде, мы готовим раздаточный материал в виде кратких карточек-памяток по основным разделам математики на соответствующий семестр.

Далее студенты выполняют практические и лабораторные работы, во время которых они могут пользоваться выданными им карточками-памятками.

Для правильного понимания материала необходимо предоставить возможность получения консультации. Консультации проводятся как очно, так и онлайн. В университете ежегодно утверждается график консультаций для студентов заочного факультета, который отображается в памятке студента. Также, учитывая различный график работы наших студентов, получить консультацию они могут в любой будний день по предварительному согласованию с преподавателем.

В межсессионный период студенты могут ознакомиться с учебными материалами, а также проверить свои знания, выполняя тесты, в системе Moodle. Важным этапом в подготовке к промежуточной аттестации является текущая аттестация, которая, согласно Правилам проведения аттестации, утвержденным 13 октября 2023 года, должна проводиться не менее одного раза в течение семестра. В качестве текущей аттестации по математике для студентов заочной формы обучения мы проводим контрольные работы, они позволяют оценить качество усвоения материала, умение решать практиче-

ские и теоретические задачи. Контрольные работы проводятся в период зимней и весенней лабораторно-экзаменационной сессии. Проведение их непосредственно перед промежуточной аттестацией позволяет скорректировать полученные знания, а для повышения мотивации и более ответственного отношения к работе мы предлагаем студентам при 60 % правильно выполненных заданий отметку «четыре» на экзамене, при 70 % – «пять», за полностью выполненную работу – «шесть». Студенты, которые хотят повысить свою отметку, могут это сделать во время экзамена.

Следующий этап самостоятельной работы студента – участие в студенческой научно-технической конференции. Изучение дисциплины «Математика» должно помогать в освоении инженерных дисциплин, но из-за нехватки времени и сокращения аудиторных часов по дисциплине связь с практикой часто теряется. Поэтому наиболее способным студентам предлагается для разработки определенная тема. Они собирают информацию, выполняют расчетную часть, готовят доклад и, приезжая на следующую сессию в апреле, выступают с докладом на студенческой конференции.

Таким образом, обучаясь на младших курсах, студенты приобретают опыт самостоятельной работы, который затем закрепляется при изучении специальных дисциплин, что в конечном итоге будет использовано при подготовке дипломного проекта.

Для эффективной самостоятельной работы студентов-заочников необходима мотивация. И здесь студенты, обучающиеся по интегрированным планам с планами средне-специального образования, показывают лучшие результаты по сравнению со студентами дневной формы, т. к. после колледжа они уже работают по своей специальности, а значит, более мотивированы на результат. Заочная форма получения высшего образования дает возможность студенту сразу применить полученные знания в своей профессиональной деятельности, это способствует карьерному росту, а следовательно, повышению мотивации к обучению.

Среди сложностей, с которыми могут сталкиваться студенты-заочники – отсутствие опыта самостоятельной работы, высокая учебная нагрузка в период сессии, дефицит живого общения с преподавателями и сокурсниками. Для успешной работы со студентами заочного факультета учреждение образования в лице преподавателей, сотрудников деканата заочного факультета должно уделять больше внимания организации самостоятельной работы, контролю знаний, консультационной поддержке, расширять формы дистанционного общения, так как студенты нашего университета проживают во всех регионах страны.

Научно-практическое издание

Научные и методические аспекты
математической подготовки
в университетах технического профиля

Материалы VIII Международной
научно-практической конференции
(Гомель, 30 октября 2026 г.)

Издается в авторской редакции

Технический редактор *В. Н. Кучерова*
Корректор *А. А. Павлюченкова*

Подписано в печать 15.10.2026 г. Формат 60×84 1/16
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 7,21. Уч.-изд. л. 7,03. Тираж 50 экз.
Зак № 1600. Изд № 39.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский государственный университет транспорта.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий
№ 1/361 от 13.06.2014.
№ 2/104 от 01.04.2014.
№ 3/1583 от 14.11.2017.
Ул. Кирова, 34, 246653, Гомель.