

УДК 621.643:539.41

Д. А. ЧЕРНОУС<sup>1,2</sup>, С. В. ШИЛЬКО<sup>2</sup>, Е. В. БЕССЧЕТНОВ<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

<sup>2</sup>Институт механики металлополимерных систем им. В. А. Белого  
НАН Беларуси, Гомель, Беларусь

<sup>3</sup>ООО «Изоком», г. Дятлово, Беларусь

## МЕТОД И РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОЧНОСТНОГО РАСЧЕТА КОМПОЗИТНОЙ ТРУБЫ ДЛЯ ВОДОСНАБЖЕНИЯ

Разработана механико-математическая модель двухслойной трубы со слоями из перекрестно-армированного ортотропного полимерного композита. На основе модели предложен аналитический метод определения максимально допустимого внутреннего давления, при котором происходит разрушение трубы. Получены расчетные зависимости разрушающего давления от угла армирования и толщины композитного слоя, позволяющие оптимизировать конструкцию напорных труб для холодного и горячего водоснабжения.

**Ключевые слова:** двухслойная труба, направленно-армированный полимерный композит, гидростатическое давление, осесимметричная задача теории упругости, ортотропия, интенсивность тензора напряжений.

**Введение.** Для обеспечения безопасной эксплуатации систем холодного и горячего водоснабжения необходима расчетная оценка прочности и долговечности напорных труб, используемых в этих системах [1]. Известен ряд публикаций [2, 3], в которых достаточно полно описывается напряженно-деформированное состояние труб, изготовленных из однородного изотропного металлического или полимерного материала, в различных эксплуатационных условиях. Достаточно точное прогнозирование долговременной прочности таких труб пока осуществляется экспериментальным путем на основе экстраполяции результатов ускоренных гидравлических испытаний [4–6]. Методы расчета получивших широкое распространение в водоснабжении композитных труб [7] из направленно-армированных материалов с выраженной анизотропией механических свойств разработаны в гораздо меньшей степени. В работах [8, 9] описывается напряженное состояние композитной трубы при заданном давлении на внутренней и внешней поверхности. Однако остается нерешенным вопрос о практической применимости указанных результатов в прикладных расчетах.

В связи с вышесказанным, целью настоящего исследования является разработка метода расчетного определения критического, соответствующему началу разрушения, внутреннего давления для двухслойной трубы, содержащей направленно-армированные анизотропные слои.

**Методика расчета.** В качестве упрощенной структурной модели двухслойной трубы будем рассматривать составную цилиндрическую оболочку,

образованную внутренним «а» и внешним «b» слоями (рисунок 1). Слой «а» имеет внешний радиус  $R_1 = R - h_b$  и толщину  $h_a$ , а слой «b» – внешний радиус  $R$  и толщину  $h_b$ . Внутренний радиус трубы  $R_0 = R - h_a - h_b$ . Слои трубы жестко соединены и образованы линейно упругими орторопными материалами.

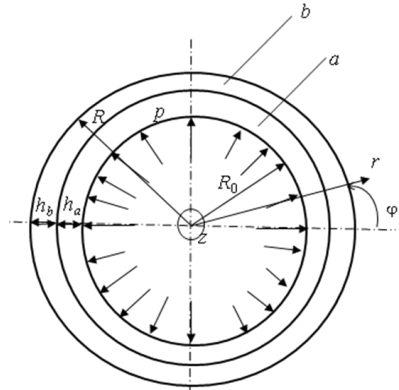


Рисунок 1 – Механическая модель двухслойной трубы

Описание напряженно-деформированного состояния осуществляется в цилиндрической системе координат  $z, r, \varphi$ , в которой ось  $z$  направлена по оси симметрии оболочки. Координатные оси  $z, r, \varphi$  соответствуют осям симметрии упругих свойств материалов слоев. Длина образующей принимается условно бесконечной. При этом оба слоя находятся в состоянии плоской деформации ( $u_z = 0$ ). На внутреннюю поверхность слоя «а» действует равномерно распределенное давление  $p$ , а наружная поверхность слоя «b» свободна от внешних напряжений. Температурный фактор, оказывающий определенное влияние на напряженно-деформированное состояние трубы, в настоящем исследовании не учитывается.

Общее решение рассматриваемой осесимметричной задачи теории упругости в перемещениях имеет вид [2]

$$u_r^i = A^i r + \frac{B^i}{r}; \quad u_z^i = u_\varphi^i = 0. \quad (1)$$

Верхний индекс параметра  $i = a, b$  соответствует слою, для которого вычисляется этот параметр. Константы  $A$  и  $B$  в решении (1) определяются из граничных условий.

В соответствии с (1) ненулевые осевые компоненты шестизначного вектора напряжений в слоях трубы задаются функциями

$$\begin{aligned} \sigma_r^i &= C_{rr}^i \left( A^i - \frac{B^i}{r^2} \right) + C_{r\varphi}^i \left( A^i + \frac{B^i}{r^2} \right); & \sigma_\varphi^i &= C_{\varphi\varphi}^i \left( A^i + \frac{B^i}{r^2} \right) + C_{r\varphi}^i \left( A^i - \frac{B^i}{r^2} \right); \\ \sigma_z^i &= C_{rz}^i \left( A^i - \frac{B^i}{r^2} \right) + C_{\varphi z}^i \left( A^i + \frac{B^i}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $C_{rr}^i, C_{\varphi\varphi}^i, C_{zz}^i, C_{r\varphi}^i, C_{\varphi z}^i, C_{rz}^i$  – компоненты матрицы модулей упругости соответствующего материала.

Для нахождения констант  $A$  и  $B$  используем следующие условия.

1 На внутреннюю поверхность слоя «а» действует равномерно распределенное (гидростатическое) давление  $p$ :

$$A^a \left( C_{rr}^a + C_{r\varphi}^a \right) - \frac{B^a}{R_0^2} \left( C_{rr}^a - C_{r\varphi}^a \right) = -p. \quad (3)$$

2 На внешней поверхности слоя «b» давление отсутствует:

$$A^b \left( C_{rr}^b + C_{r\varphi}^b \right) - \frac{B^b}{R^2} \left( C_{rr}^b - C_{r\varphi}^b \right) = 0. \quad (4)$$

3 На границе раздела слоев ( $r = R_1$ ) выполняется условие неразрывности радиальной компоненты упругого перемещения:

$$A^a R_1 + \frac{B^a}{R_1} = A^b R_1 + \frac{B^b}{R_1}. \quad (5)$$

4 На границе раздела также выполняется условие неразрывности радиальной компоненты вектора напряжений:

$$A^a \left( C_{rr}^a + C_{r\varphi}^a \right) - \frac{B^a}{R_1^2} \left( C_{rr}^a - C_{r\varphi}^a \right) = A^b \left( C_{rr}^b + C_{r\varphi}^b \right) - \frac{B^b}{R_1^2} \left( C_{rr}^b - C_{r\varphi}^b \right). \quad (6)$$

Соотношения (3)–(6) составляют систему четырех линейных уравнений для определения констант  $A^a$ ,  $A^b$ ,  $B^a$ ,  $B^b$ . Решение данной системы получено аналитически, и оно имеет вид

$$\begin{aligned} A^a &= p \frac{R_0^2}{R_1^2} \frac{R_1^2 Z^b - (R^2 - R_1^2)(C_{rr}^b + C_{r\varphi}^b)(C_{rr}^a - C_{r\varphi}^a)^{-1}}{(R_1^2 - R_0^2)Z^b (C_{rr}^a + C_{r\varphi}^a) + (R^2 - R_1^2)Z^a (C_{rr}^b + C_{r\varphi}^b)}; \\ A^b &= A^a \frac{Z^a}{Z^b} + \frac{pR_0^2}{R_1^2 Z^b (C_{rr}^a - C_{r\varphi}^a)}; \quad B^b = A^b R^2 \frac{C_{rr}^b + C_{r\varphi}^b}{C_{rr}^b - C_{r\varphi}^b}; \\ B^a &= \frac{R_0^2}{C_{rr}^a - C_{r\varphi}^a} \left[ p + A^a (C_{rr}^a + C_{r\varphi}^a) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь для краткости записи введены обозначения

$$Z^a = 1 + \frac{R_0^2}{R_1^2} \frac{C_{rr}^a + C_{r\varphi}^a}{C_{rr}^a - C_{r\varphi}^a}, \quad Z^b = 1 + \frac{R^2}{R_1^2} \frac{C_{rr}^b + C_{r\varphi}^b}{C_{rr}^b - C_{r\varphi}^b}. \quad (8)$$

Зная константы  $A^a$ ,  $A^b$ ,  $B^a$  и  $B^b$ , по формулам (2) определим зависимости компонент вектора напряжения от радиальной координаты  $r$ .

Для упрощения дальнейших выкладок примем, что рассматриваемая труба имеет один композитный анизотропный и один однородный изотропный слой, а ее разрушение начинается с разрушения внутреннего слоя. Анализ разрушения композитного анизотропного слоя является предметом дополнительного исследования.

В соответствии с критерием Мизеса [3], прочность однородного материала определяется максимальным значением интенсивности тензора напряжений  $\sigma_u^{\max}$ .

При рассматриваемом способе нагружения двухслойной трубы интенсивность  $\sigma_u$  в каждом слое является известной функцией радиальной координаты  $r$ :

$$\sigma_u^i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_r^i - \sigma_\varphi^i)^2 + (\sigma_r^i - \sigma_z^i)^2 + (\sigma_z^i - \sigma_\varphi^i)^2}. \quad (9)$$

Здесь осевые компоненты вектора напряжений определяются соотношениями (2) с учетом (7), (8).

Если материал  $i$ -го слоя однородный и изотропный, для компонент матрицы модулей упругости материала этого слоя можно записать

$$C_{rr}^i = C_{\varphi\varphi}^i = C_{zz}^i = \frac{E^i(1-\nu^i)}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)}; \quad C_{r\varphi}^i = C_{\varphi z}^i = C_{rz}^i = \frac{E^i\nu^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)}. \quad (10)$$

Здесь  $E^i$ ,  $\nu^i$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала  $i$ -го слоя соответственно.

При изотропии материала слоя выражение (9) для интенсивности тензора напряжений примет вид

$$\sigma_u^i = \frac{E^i}{(1+\nu^i)} \left( A^i + \frac{B^i}{r^2} \right). \quad (11)$$

Для определения максимального значения интенсивности тензора напряжений в соотношении (9) или (11) следует подставлять  $r = R_0$  для слоя «а» и  $r = R_1$  для слоя «б».

При анализе прочности коротких фрагментов трубы, применяемых при гидравлическом испытании [4–6] (рисунок 1), справедливо допущение о плоском напряженном состоянии трубы, в выражениях (2) имеем  $\sigma_{zz} = 0$ , а компоненты тензора модулей упругости можно вычислить по формулам

$$C_{rr(\sigma)}^i = C_{rr}^i - \frac{C_{rz}^i{}^2}{C_{zz}^i}; \quad C_{\varphi\varphi(\sigma)}^i = C_{\varphi\varphi}^i - \frac{C_{\varphi z}^i{}^2}{C_{zz}^i}; \quad C_{r\varphi(\sigma)}^i = C_{r\varphi}^i - \frac{C_{rz}^i C_{\varphi z}^i}{C_{zz}^i}. \quad (12)$$

Здесь нижний индекс ( $\sigma$ ) означает, что соответствующая величина определена для плоского напряженного состояния.

Описанный метод позволяет рассчитать критическое значение внутреннего давления  $p_{cr}$ , при котором начнется разрушение трубы. Для этого внутреннее давление первоначально принимается равным единице  $p = 1$ . Определяются соответствующие этому давлению значения параметра  $\sigma_u^{\max i(1)}$ . Критическое внутреннее давление равно наименьшему отношению предела прочности  $\sigma_T^i$  материала соответствующего слоя к максимуму интенсивности тензора напряжений при единичном внутреннем давлении:

$$p_{cr} = \min \left\{ \frac{\sigma_T^a}{\sigma_{u(1)}^{\max a}}, \frac{\sigma_T^b}{\sigma_{u(1)}^{\max b}} \right\}. \quad (13)$$

Расчет эквивалентных модулей упругости материала, перекрестно-армированного волокнами, подробно изложен в работе [12] и здесь не приводится. Компоненты матрицы модулей упругости внутреннего слоя трубы  $C_{rr}^a$  ( $C_{zz}$ ),  $C_{\varphi\varphi}^a$  ( $C_{yy}$ ),  $C_{zz}^a$  ( $C_{xx}$ ),  $C_{r\varphi}^a$  ( $C_{yz}$ ),  $C_{rz}^a$  ( $C_{xz}$ ),  $C_{\varphi z}^a$  ( $C_{xy}$ ) при фиксированном объемном содержании волокна  $c_f = 0,1$  являются известными функциями угла  $\alpha$ .

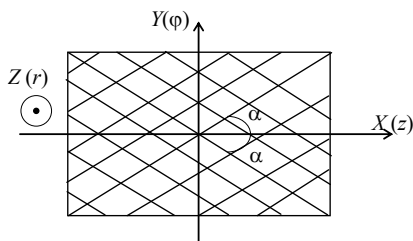


Рисунок 2 – Схема армирования композитного слоя трубы

**Расчетный пример.** Для апробации разработанного метода выполним расчет трубы, состоящей из внутреннего слоя, образованного перекрестно-армированным композитным материалом (рисунок 2) и внешнего слоя из однородного изотропного полимерного материала. Структура композита характеризуется углом  $\alpha$  между направлениями армирования и осью  $X$ , соответствующей показанной на рисунке 1

оси  $z$  цилиндрической системы координат. Рассматривая в качестве примера композит в виде стеклопластика на эпоксидной матрице, зададим для матричного материала модуль Юнга  $E_m = 1$  ГПа и коэффициент Пуассона  $\nu_m = 0,35$  [10], а модуль Юнга  $E_f$  и коэффициент Пуассона  $\nu_f$  материала армирующих волокон ( $S$ -стекла) примут значения 70 ГПа и 0,25 соответственно [11].

В качестве материала внешнего слоя трубы был рассмотрен традиционно используемый в трубах горячего водоснабжения [4] хлорированный поливинилхлорид ХПВХ (PVC-C), имеющий следующие значения механических характеристик [10]  $E^b = 2$  ГПа;  $\nu^b = 0,4$ ;  $\sigma_r^b = 40$  МПа.

На рисунке 3, а представлены расчетные зависимости критического (разрушающего) давления  $p_{cr}$  от толщины композитного слоя при  $R = 30$  мм; толщине полимерного слоя  $h_b = 3$  мм и угла армирования в композитном слое  $45^\circ$ .

Как и следовало ожидать, увеличение толщины  $h_a$  приводит к возрастанию критического внутреннего давления. Зависимость  $p_{cr}(h_a)$  близка к линейной. Скорость изменения критического внутреннего давления по мере увеличения  $h_a$  при плоском напряженном состоянии несколько выше, чем при плоской деформации.

Повышение прочности трубы (увеличение  $p_{cr}$ ) достигается не только увеличением толщины композитного слоя, но и выбором оптимального угла армирования  $\alpha$  в этом слое (рисунок 3, б). Для состояния плоской деформации трубы увеличение угла  $\alpha$  приводит к незначительному монотонному возрастанию критического значения внутреннего давления. В рассмотренном расчетном примере ( $R = 30$  мм;  $h_a = h_b = 3$  мм) при изменении угла  $\alpha$  от 0 до  $90^\circ$  значение  $p_{cr}$  увеличилось на 6,7 %. При плоском напряженном состоянии трубы зависимость  $p_{cr}(\alpha)$  характеризуется наличием максимума в окрестности значения угла армирования  $\alpha \approx 45^\circ$ .

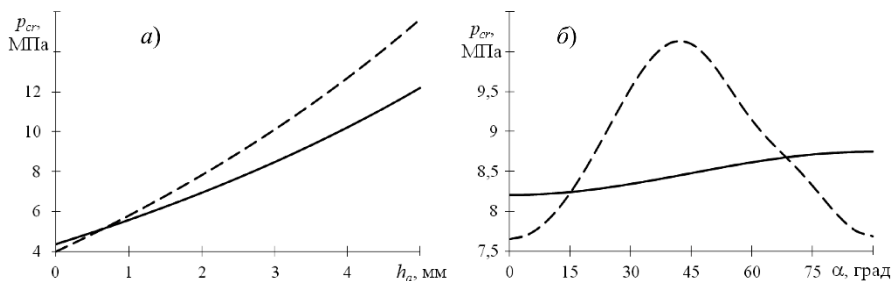


Рисунок 3 – Зависимости критического значения внутреннего давления от толщины композитного слоя (а) и угла армирования (б). Сплошная кривая – состояние плоской деформации; пунктирная – плоское напряженное состояние

**Закключение.** В результате использования разработанной механико-математической модели и метода прочностного расчета двуслойной трубы с внутренним направленно-армированным и наружным однородным изотропным слоем установлено следующее:

- критическое значение внутреннего давления, соответствующее началу разрушения рассматриваемой трубы, практически линейно возрастает с увеличением толщины композитного слоя;
- если длина рассматриваемого участка трубы много больше ее радиуса (состояние плоской деформации), оптимальной по критерию допускаемого внутреннего давления является окружная («намоточная») ориентация волокон ( $\alpha = 90^\circ$ ) армированного слоя;
- если длина участка трубы сопоставима или меньше диаметра (плоское напряженное состояние), максимальная прочность по критерию допускаемого внутреннего давления достигается при угле  $45^\circ$  между направлением армирования и осью симметрии трубы;
- данные расчетные оценки подтверждаются опытом проектирования и эксплуатации композитных водоводов, работающих в условиях плоской деформации, и реальной структурой армирования резинокордных композитов для пневматических автомобильных шин [13];
- практический интерес представляет также анализ прочности иных вариантов композитных напорных труб, что является предметом дальнейших исследований.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 A review on carbon fiber reinforced polymer as wrapping structures for pipeline / S. M. Letchumanan, A. M. T. Arifin, A. E. Ismail, I. Taib // International Journal of Integrated Engineering. – 2023. – Vol. 15, is. 1. – P. 45–57.
- 2 Лурье, А. И. Теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1970. – 941 с.
- 3 Саруев, А. Л. Исследования напряженно-деформированного состояния трубопроводов / А. Л. Саруев, А. В. Рудаченко. – Томск : Изд-во ТПУ, 2021. – 146 с.

4 ГОСТ 32415–2013. Трубы напорные из термопластов и соединительные детали к ним для систем водоснабжения и отопления. Общие технические условия. – Введ. 01.01.2015. – М. : Стандартинформ, 2014. – 79 с.

5 ГОСТ ISO 9080–2023. Трубопроводы и воздуховоды из пластмасс. Определение длительной гидростатической прочности термопластов на образцах в форме труб методом экстраполяции. – Введ. 01.12.2024. – М. : ФГБУ «РСТ», 2024. – 30 с.

6 ГОСТ ISO 1167-1–2013. Трубы, соединительные детали и узлы соединений из термопластов для транспортирования жидких и газообразных сред. Определение стойкости к внутреннему давлению. Ч. 1. Общий метод. – Введ. 01.08.2014. – М. : Стандартинформ, 2014. – 8 с.

7 **Отставнов, А. А.** О стандартизированных трубных изделиях из реактопластов, армированных стекловолокном / А. А. Отставнов, В. А. Харькин // Сантехника. – 2014. – № 2. – С. 48–52.

8 **Можаровский, В. В.** Скорость волны при гидроударе и напряженно-деформированное состояние слоистых футерованных труб их ортотропных материалов / В. В. Можаровский, С. В. Киргинцева // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 44–51.

9 **Бочкарева, С. А.** Исследование напряженно-деформированного состояния многослойных полимерных труб методом конечных элементов / С. А. Бочкарева, Ю. А. Реутов // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – № 2. – С. 81–84.

10 **Сутягин, В. М.** Основные свойства полимеров / В. М. Сутягин, О. С. Кукурина, В. Г. Бондалетов. – Томск : Изд-во ТПУ, 2010. – 96 с.

11 **Бородулин, А. С.** Свойства и особенности структур стеклянных волокон, используемых при изготовлении стеклопластиков / А. С. Бородулин // Материаловедение. – 2012. – № 7. – С. 34–37.

12 Тканые конструкционные композиты / Ф. Скардино, Дж. Хирл, С. Кавабата [и др.] ; под ред. Т.-В. Чу, Ф. Ко. – М. : Мир, 1991. – 430 с.

13 **Хотько, А. В.** Применение теории сетчатых оболочек при проектировании автомобильных шин / А. В. Хотько, С. В. Шилько // Механика машин, механизмов и материалов. – 2020. – № 1. – С. 5–11.

*D. A. CHERNOUS<sup>1,2</sup>, S. V. SHILKO<sup>2</sup>, E. V. BESSCHETNOV<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

<sup>2</sup>*V. A. Bely Metal Polymer Research Institute, Gomel, Belarus*

<sup>3</sup>*LLC "Izokom", Dyatlovo, Belarus*

## **METHOD AND RESULTS OF STRENGTH ANALYSIS OF WATER-SUPPLY COMPOSITE PIPE**

A mechanical and mathematical model of a two-layer pipe with layers of cross-reinforced orthotropic polymer composite is developed. Based on this model, an analytical method for determining the maximum allowable internal pressure for the case of the pipe fail is proposed. The calculated dependences of the failure pressure on the reinforcement angle and composite layer thickness are obtained and allow to optimize the design of pressure pipes for cold and hot water supply.

**Keywords:** two-layer pipe, directionally reinforced polymer composite, hydrostatic pressure, axisymmetric elasticity problem, orthotropy, stress tensor intensity.

Получено 16.10.2025