

УДК 539.31:624.072.2

Э. И. СТАРОВОЙТОВ, К. В. СУСЛОВ

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь***НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРИ ИЗГИБЕ ПЯТИСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ С ДВУМЯ ЗАПОЛНИТЕЛЯМИ**

Представлено аналитическое решение краевой задачи об изгибе пятислойного симметричного по толщине стержня, в котором несущими являются тонкие внешние и центральный слои, а относительно толстые жесткие заполнители обеспечивают перераспределение нагрузок между несущими слоями. На основе решения системы дифференциальных уравнений равновесия получены расчетные формулы для перемещений в случаях жесткой заделки и шарнирного опирания торцов стержня. Приведены результаты расчета напряжений и деформаций для нагрузки, равномерно распределенной по поверхности верхнего слоя.

Ключевые слова: пятислойный стержень, упругая деформация, гипотеза Бернулли, гипотеза Тимошенко.

Введение. Применение слоистых конструкций в различных сферах современной техники стимулировало разработку методик их прочностного расчета при статических и динамических нагрузках. В монографиях [1, 2] предложены расчетные модели трехслойных стержней, пластин и оболочек, учитывающие не только различные внешние силовые нагрузки, но и влияние температурных и радиационных воздействий.

В статьях [3–5] приведены решения ряда частных задач о динамическом воздействии на композитные стержни и пластины, в которых кинематические гипотезы приняты индивидуально для каждого слоя. Несущие слои жесткие, подчиняются гипотезам Бернулли (Кирхгофа). В легких заполнителях справедлива гипотеза Тимошенко, т. е. учитывается деформация поперечного сдвига. В статье [6] предложена дискретная модель многослойной пластины с учетом внутреннего демпфирования слоев в соответствии с моделью Томпсона – Кельвина – Войта. Получено аналитическое решение задачи о вынужденных колебаниях двух- и трехслойных прямоугольных шарнирно закрепленных пластин, при прохождении через них моногармонической звуковой волны. Анализ собственных колебаний пятислойных пластин и стержней проводится в [7, 8].

Влияние сжимаемости заполнителя на деформирование трехслойной пластины исследовано в [9], функция сжимаемости принята линейной по толщине заполнителя. Термосиловое деформирование круговых упругопластических пластин нагрузкой, параллельной плоскости пластины, рассмотрено в [10], перпендикулярной – в [11]. Влияние упругого основания на напряженно-деформированное состояние трехслойных пластин исследуется в рабо-

тах [12, 13]. Решение задачи об изгибе круговой пятислойной пластины, заземленной по контуру, представлено в [14].

В статье [15] были получены дифференциальные уравнения равновесия симметричного по толщине пятислойного стержня с двумя заполнителями. В данной работе рассматривается решение задачи об изгибе такого стержня.

Постановка задачи об изгибе пятислойного стержня. В пятислойном, симметричном по толщине стержне (рисунок 1) деформирование достаточно тонких несущих слоев 1, 2, 4 подчиняется гипотезе Бернулли, а сравнительно толстых заполнителей 3, 5 – гипотезе Тимошенко, учитывающей поворот нормали на дополнительный угол $\psi(x)$, называемый относительным сдвигом. Наряду с прогибом стержня $w(x)$ эта функция является искомой. Декартова система координат связана со срединной плоскостью внутреннего несущего слоя. Нагрузка q равномерно распределена по внешней поверхности верхнего слоя.

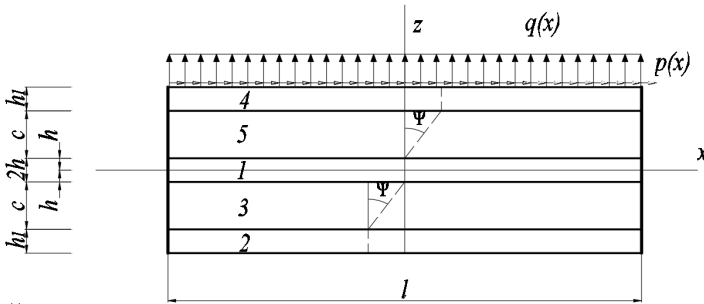


Рисунок 1 – Схема деформирования пятислойного стержня при его изгибе

Продольные перемещения $u_x^{(k)}$ в слоях ($k = 1, \dots, 5$ – номер слоя) выражаются в соответствии с принятыми гипотезами через искомые функции:

$$\begin{aligned}
 u_x^{(4)} &= -zw_{,x} + c\psi && \text{при } c + h \leq z \leq c + h + h_1; \\
 u_x^{(5)} &= -zw_{,x} + (z - h)\psi && \text{при } h \leq z \leq c + h; \\
 u_x^{(1)} &= -zw_{,x} && \text{при } -h \leq z \leq h; \\
 u_x^{(3)} &= -zw_{,x} + (z + h)\psi && \text{при } -h - c \leq z \leq -h; \\
 u_x^{(2)} &= -zw_{,x} - c\psi && \text{при } -h - h_1 - c \leq z \leq -h - c,
 \end{aligned} \quad (1)$$

где z – координата рассматриваемой точки поперечного сечения; h, h_1, c – толщины слоев, запятая в индексе обозначает дифференцирование по координате x .

Используя выражения (1) и соотношения Коши [1], получим продольные деформации (нумерация в соответствии с рисунком 1):

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x^{(4)} &= -zw_{,xx} + c\psi_{,x}; && \epsilon_{xz}^{(4)} = 0; \\
 \epsilon_x^{(5)} &= -zw_{,xx} + (z - h)\psi_{,x}; && \epsilon_{xz}^{(5)} = \frac{\psi}{2};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x^{(1)} &= -zw_{,xx}; \quad \varepsilon_{xz}^{(1)} = 0; \\
\varepsilon_x^{(3)} &= -zw_{,xx} + (z+h)\Psi_{,x}; \quad \varepsilon_{xz}^{(3)} = \frac{\Psi}{2}; \\
\varepsilon_x^{(2)} &= -zw_{,xx} - c\Psi_{,x}; \quad \varepsilon_{xz}^{(2)} = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Напряжения в слоях определяются через деформации (2) с помощью закона Гука в девятиорно-шаровой форме

$$\begin{aligned}
s_{xx}^{(k)} &= 2G_k \varepsilon_{xx}^{(k)}; \quad \sigma^{(k)} = 3K_k \varepsilon^{(k)}; \\
s_{xz}^{(3)} &= 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)}; \quad s_{xz}^{(5)} = 2G_5 \varepsilon_{xz}^{(5)},
\end{aligned} \tag{3}$$

где $s_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ – девятиоры тензоров напряжений и деформаций, $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – средние напряжения и деформации в слоях; G_k , K_k – модули упругости материалов слоев.

Система дифференциальных уравнений равновесия рассматриваемого стержня получена в [14]:

$$\begin{aligned}
a_1 \Psi_{,xx} - a_2 w_{,xxx} - a_3 \Psi &= 0, \\
a_2 \Psi_{,xxx} - a_4 w_{,xxxx} &= -q,
\end{aligned} \tag{4}$$

где $a_1 = c^2 \left(\frac{2}{3} K_2^+ c + 2K_3^+ h_1 \right)$; $a_2 = \frac{1}{3} K_2^+ c^2 (2c + 3h) + K_3^+ h_1 c (h_1 + 2h + 2c)$; $a_3 = 2G^{(2)} c$;

$$a_4 = \frac{2}{3} K_2^+ c (c^2 + 3hc + 3h^2) + K_1^+ \frac{2h^3}{3} + \frac{2}{3} K_3^+ h_1 (h_1^2 + 3(h_1 + h + c)(h + c)).$$

Для замыкания краевой задачи к системе (4) необходимо добавить граничные условия. Например, при жесткой заделке торцов стержня ($x = 0; l$):

$$\Psi(x) = w(x) = w_{,x}(x, t) = 0. \tag{5}$$

При шарнирном опирании ограничения на торцах следующие:

$$\begin{aligned}
\Psi(0, t) = w(0, t) = M_x(0, t) &= 0, \\
\Psi(l, t) = w(l, t) = M_x(l, t) &= 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Аналитическое решение краевой задачи. Проинтегрируем второе уравнение системы (4) и с его помощью из первого уравнения получим отдельное уравнение для определения относительного сдвига $\Psi(x)$:

$$\Psi_{,xx} - \beta^2 \Psi = \gamma q x + C_1, \tag{7}$$

где C_1 – константа интегрирования,

$$\beta^2 = \frac{a_3 a_4}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad \gamma = \frac{a_2}{a_1 a_4 - a_2^2}.$$

Вид решения уравнения (7) зависит от знака перед коэффициентом β^2 . Численное исследование показало, что разность $a_1 a_4 - a_2^2 > 0$ и не уходит в бесконечность [14]. Таким образом, относительный сдвиг и прогиб стержня, следующий из второго уравнения системы (4),

$$\begin{aligned} \psi &= C_2 \operatorname{sh}(\beta x) + C_3 \operatorname{ch}(\beta x) - \frac{\gamma q_0 x}{\beta^2} - \frac{\gamma C_1}{\beta^2}; \\ w &= \frac{a_2}{a_4} \left(\frac{C_2}{\beta} \operatorname{ch}(\beta x) + \frac{C_3}{\beta} \operatorname{sh}(\beta x) \right) - \frac{a_2 \gamma q_0 x^2}{2 a_4 \beta^2} + \frac{q_0}{24 a_4} x^4 + C_1 \left(-\frac{a_2 \gamma}{a_4 \beta^2} x + \frac{1}{6 a_4} x^3 \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} C_4 x^2 - C_5 x + C_6. \end{aligned} \quad (8)$$

Удовлетворяя решением (8) требованиям (5), получим алгебраическую систему уравнений для определения констант интегрирования при жесткой заделке торцов стержня. Ее решение:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{(\beta l (\beta^2 l^3 + 12 a_2 \gamma) \operatorname{sh}(\beta l) - 24 \beta a_2 \gamma (\operatorname{ch}(\beta l) - 1)) q_0}{2 l \beta (6 \gamma (l+1) a_2 + \beta^2 l^2) \operatorname{sh}(\beta l) - 24 a_2 \gamma (\operatorname{ch}(\beta l) - 1) (l+1)}; \\ C_2 &= \frac{((\beta^3 l^4 + 12 a_2 \gamma) \operatorname{sh}(\beta l) - 24 a_2 \gamma (\operatorname{ch}(\beta l) - 1)) q_0}{2 l \beta (6 \gamma (l+1) a_2 + \beta^2 l^2) \operatorname{sh}(\beta l) - 24 a_2 \gamma (\operatorname{ch}(\beta l) - 1) (l+1)}; \\ C_3 &= \frac{g (\beta l (\beta^2 l^3 + 12 a_2 \gamma) \operatorname{sh}(\beta l) - 24 a_2 \gamma (\operatorname{ch}(\beta l) - 1)) q_0}{2 \beta^2 (\beta l (6 \gamma (l+1) a_2 + \beta^2 l^2) \operatorname{sh}(\beta l) - 12 a_2 \gamma (\operatorname{ch}(\beta l) - 1) (l+1))}; \\ C_4 &= - \left[\frac{\beta l (72 \gamma^2 (l+2)(l-1) a_2^2 - 6 \beta^2 \gamma l^2 (l^2 + l - 4) a_2 + \beta^4 l^5) \operatorname{sh}(\beta l)}{12 l \beta^2 a_4 (\beta l (6 \gamma (l+1) a_2 + \beta^2 l^2) \operatorname{sh}(\beta l) - 12 a_2 \gamma (\operatorname{ch}(\beta l) - 1) (l+1))} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{24 (\operatorname{ch}(\beta l) - 1) a_2 \gamma (-6 \gamma (l+2)(l-1) a_2 + \beta^2 l^2 (l^2 + l - 3))}{12 l \beta^2 a_4 (\beta l (6 \gamma (l+1) a_2 + \beta^2 l^2) \operatorname{sh}(\beta l) - 12 a_2 \gamma (\operatorname{ch}(\beta l) - 1) (l+1))} \right] q_0; \\ C_5 &= 0; \\ C_6 &= \frac{a_2 ((-\beta^3 l^4 - 12 \beta a_2 \gamma l) \operatorname{ch}(\beta l) + \beta^3 l^5 - 2 \beta^3 l^3 - 12 \beta a_2 \gamma l + \operatorname{sh}(\beta l) a_2 \gamma) g q_0}{2 \beta^3 a_4 (-12 \gamma (l+1) a_2 \operatorname{ch}(\beta l) + \beta l (g \gamma (l+1) a_2 + \beta^2 l^2) \operatorname{sh}(\beta l) + 12 \gamma (l+1) a_2)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Константы интегрирования для случая шарнирного опирания торцов стержня получим, удовлетворяя решением (8) граничным условиям (6). Соответствующая система алгебраических уравнений

$$C_2 \operatorname{sh}(\beta l) + C_3 \operatorname{ch}(\beta l) - \frac{\gamma q_0 l}{\beta^2} - \frac{\gamma C_1}{\beta^2} = 0; \quad C_3 - \frac{\gamma C_1}{\beta^2} = 0;$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{2}{3} K_2^+ c(c^2 + 3hc + 3h^2) + K_1^+ \frac{2h^3}{3} + \frac{2}{3} K_3^+ h_1 (h_1^2 + 3(h_1 + h + c)(h + c)) \right] \times \\
& \quad \times \left[\frac{a_2}{a_4} \beta (C_2 \operatorname{sh}(\beta l) + C_3 \operatorname{ch}(\beta l)) - \frac{a_2 \gamma q_0}{a_4 \beta^2} + C_1 \frac{l}{a_4} + \frac{q_0 l^2}{2a_4} - C_4 \right] + \\
& + \left[K_3^+ h_1 c(h_1 + 2h + 2c) + \frac{1}{3} K_2^+ c^2(3h + 2c) \right] \cdot \left[\beta C_2 \operatorname{ch}(\beta l) + \beta C_3 \operatorname{sh}(\beta l) - \frac{\gamma q_0}{\beta^2} \right] = 0 ; \\
& - \left[\frac{2}{3} K_2^+ c(c^2 + 3hc + 3h^2) + K_1^+ \frac{2h^3}{3} + \frac{2}{3} K_3^+ h_1 (h_1^2 + 3(h_1 + h + c)(h + c)) \right] \times \\
& \times \left[\frac{\beta C_2 a_2}{a_4} + C_4 - \frac{a_2 \gamma q_0}{a_4 \beta^2} \right] + \left[K_3^+ h_1 c(h_1 + 2h + 2c) + \frac{1}{3} K_2^+ c^2(3h + 2c) \right] \cdot \left[\beta C_2 - \frac{\gamma q_0}{\beta^2} \right] = 0 ; \\
& \quad \frac{a_2}{a_4 \beta} C_2 + C_6 = 0 ; \\
& \frac{a_2}{a_4 \beta} (C_2 \operatorname{ch}(\beta l) + C_3 \operatorname{sh}(\beta l)) - \frac{a_2 \gamma q_0 l^2}{2a_4 \beta^2} + \frac{C_1 l^3}{6a_4} - \frac{C_1 a_2 \gamma l}{a_4 \beta^2} + \frac{q_0 l^4}{24a_4} - \frac{C_4 l^2}{2} - l C_5 + C_6 = 0. \quad (10)
\end{aligned}$$

Решение систем уравнений (9), (10) дает искомые константы интегрирования.

Численные результаты получены для случая равномерно распределенной нагрузки $q_0 = 2,5$ МПа. Для основной расчетной модели принимались несущие слои, выполненные из дюралюминия Д16-Т, заполнители – из фторопласта-4. Их упругие характеристики принимались по [1]. Толщины слоев, отнесенные к длине стержня, в (8)–(10) полагались $h = h_1 = 0,02$; $c = 0,1$; $l = 1$ м.

Рисунок 2 иллюстрирует изменение прогиба (a) и относительного сдвига (b) вдоль оси стержня при различных способах закрепления торцов: 1 – жесткая заделка; 2 – шарнирное опирание. Прогиб при шарнирном опирании примерно в 5 раз больше, чем при заделке. Это хорошо согласуется с аналогичным деформированием однослойного стержня [4]. На относительный сдвиг изменение граничных условий в данном случае не влияет.

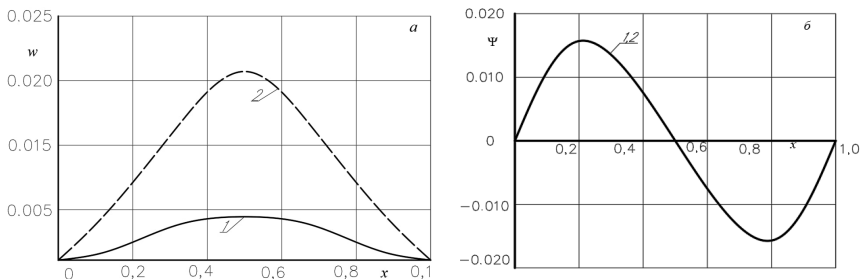


Рисунок 2 – Изменение по длине стержня x : a – прогиба; b – относительного сдвига

Рисунок 3 иллюстрирует изменение линейных деформаций (*a*) и продольных напряжений (*b*) на торце стержня ($x = 0$) при различных граничных условиях: 1 – жесткая заделка; 2 – шарнирное опирание. Линейные деформации здесь непрерывны в силу склейки слоев. Нормальные напряжения в склейках претерпевают разрыв из-за различных упругих свойств материалов несущих слоев и заполнителей. Максимальные деформации не превышают 0,12 %, что подтверждает упругое деформирование материалов слоев.

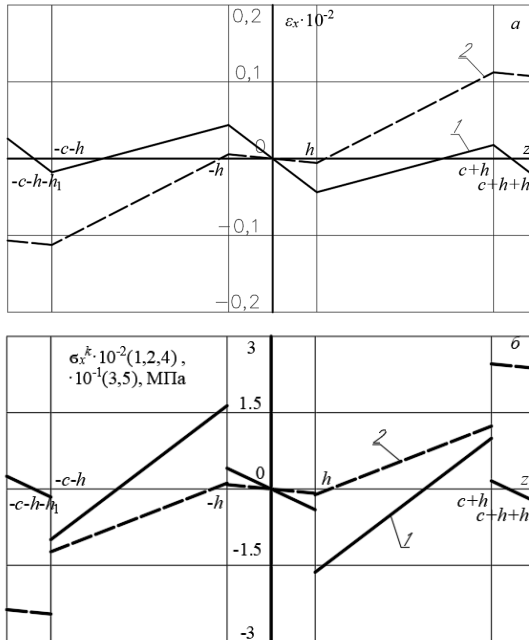


Рисунок 3 – Изменение деформаций (*a*) и напряжений (*b*) по толщине стержня z при $x = 0$

Выводы. Полученное аналитическое решение позволяет осуществлять оценку напряжений и деформаций при изгибе симметричного по толщине пятислойного упругого стержня с двумя заполнителями и принимать решение о целесообразности его применения в конкретных конструкциях.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-2025».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : Физматлит, 2005. – 576 с.

2 Абдусаттаров, А. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / А. Абдусаттаров, Э. И. Старовойтов, Н. Б. Рузиева. – Ташкент : Ideal Press, 2023. – 381 с.

3 **Tarlakovskii, D. V.** Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells / D. V. Tarlakovskii, G.V. Fedotenkov // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. – 2014. – Vol. 43, is. 2. – P. 145–152.

4 **Fedotenkov, G. V.** Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam / G. V. Fedotenkov, D. V. Tarlakovskiy, Y. A. Vahterova // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2019. – Vol. 40, is. 4. – P. 439–447.

5 **Леоненко, Д. В.** Колебания круговой трехслойной пластины под действием внешней нагрузки / Д. В. Леоненко, М. В. Маркова // *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. – 2023. – № 1. – С. 49–63.

6 **Paimushin, V. N.** Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate / V. N. Paimushin, R. K. Gazizullin // *Mechanics of Composite Materials*. – 2017. – Vol. 53, is. 3. – P. 407–436.

7 **Лачугина, Е. А.** Свободные колебания пятислойной круговой пластины с легкими заполнителями / Е. А. Лачугина // *Механика. Исследования и инновации*. – 2023. – Вып. 16. – С. 111–116.

8 **Будникова, Д. А.** Анализ собственных колебаний пятислойного стержня / Д. А. Будникова // *Механика. Исследования и инновации*. – 2024. – Вып. 17. – С. 33–39.

9 **Захарчук, Ю. В.** Напряженно-деформированное состояние круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // *Механика. Исследования и инновации*. – 2019. – Вып. 12. – С. 66–75.

10 **Нестерович, А. В.** Осесимметричное нагружение круглой физически нелинейной трехслойной пластины в своей плоскости / А. В. Нестерович // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2021. – № 3 (48). – С. 24–29.

11 **Старовойтов, Э. И.** Упругопластическое деформирование трехслойных стержней в температурном поле / Э. И. Старовойтов // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. – 2012. – № 3. – С. 91–98.

12 Деформирование круговой трехслойной пластины на упругом основании / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. – 2005. – Т. 2, № 1. – С. 16–19.

13 **Старовойтов, Э. И.** Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака / Э. И. Старовойтов, А. Г. Козел // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2018. – Т. 24, № 3. – С. 392–406.

14 **Салицкий, В. С.** Изгиб защемленной по контуру круговой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // *Механика. Исследования и инновации*. – 2022. – Вып. 15. – С. 209–213.

15 **Суслов, К. В.** Методика решения задачи о равновесии пятислойного симметричного по толщине стержня / К. В. Суслов // *Механика. Исследования и инновации*. – 2024. – Вып. 17. – С. 134–139.

E. I. STAROVOITOV, K. V. SUSLOV

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

STRESS-STRAIN STATE IN BENDING A FIVE-LAYER ROD WITH TWO FILLERS

An analytical solution is presented for the boundary value problem of bending of a five-layer rod symmetrical in thickness with the thin outer and central load-bearing layers for the case when relatively thick rigid cores provide load redistribution between the load-bearing layers. Based on the solution of a system of differential equilibrium equations, calculation formulas are obtained for displacements in cases of rigid restraint and pinned support of the rod ends. The results of stress and strain calculations are presented for a load uniformly distributed over the upper layer surface.

Keywords: five-layer rod, elastic deformation, Bernoulli hypothesis, Timoshenko hypothesis.

Получено 01.09.2025