

УДК 691-419:539.374

Э. И. СТАРОВОЙТОВ, В. С. САЛИЦКИЙ

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

ДЕФОРМИРОВАНИЕ КРУГОВОЙ ПЯТИСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ С УПРУГИМИ И УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИМИ СЛОЯМИ

Предлагается модель несимметричной по толщине пятислойной круговой пластины, в которой одни слои деформируются упруго, другие проявляют пластические свойства. Для описания неупругого поведения используются уравнения теории малых упругопластических деформаций. Гипотезы Кирхгофа описывают деформирование несущих слоев, гипотеза Тимошенко – заполнителей. Для решения краевой задачи использован метод упругих решений Ильюшина. Приведены результаты численных расчетов на основе полученного в итерационном виде решения.

Ключевые слова: пятислойная несимметричная пластина, изгиб, упругость, пластичность, аналитическое решение.

Введение. В связи с расширяющимся применением в машиностроении и строительстве слоистых элементов появляется необходимость разработки механико-математических моделей таких конструкций с учетом линейного и нелинейного деформирования материалов слоев. В монографиях [1, 2] предложены различные подходы к разработке расчетных моделей слоистых конструкций, проявляющих в процессе деформирования упругие и пластические свойства. Тонкие несущие слои приняты достаточно жесткими, для них выполняются гипотезы Кирхгофа. Заполнители легкие, для них справедлива гипотеза Тимошенко, то есть учитывается деформация относительного сдвига.

Динамическое деформирование трехслойных цилиндрических оболочек под действием локальных нагрузок анализировалось в статьях [3, 4]. Анализ собственных и вынужденных колебаний стержней, включающих три и пять слоев, приведен в [5, 6]. Динамическое деформирование, обусловленное внешним воздействием на трех- и пятислойные круговые пластины, рассмотрено в статьях [7, 8]. Для решения названных задач использован метод разложения искомых перемещений в ряды по системам собственных функций.

Дисперсионные и энергетические характеристики изгибных волн в пластине, расположенной на двухпараметрическом упругом основании, исследованы в статье [9]. Постановки и решения иных краевых задач о деформировании трехслойных упругих стержней и круговых пластин, связанных с упругими однопараметрическими и двухпараметрическими основаниями, рассмотрены в статьях [10, 11]. Изгиб трехслойных упругопластических пластин при термосиловых нагрузках изучался в работах [12, 13]. Деформирование упругих пятислойных симметричных и несимметричных по толщине круговых пластин под действием непрерывных и локальных нагрузок исследовано в статьях [14–16].

В данной работе разрабатывается математическая модель пятислойной пластины, в которой часть несущих слоев деформируется неупруго.

1 Постановка задачи. Исследуется осесимметричный изгиб несимметричной по толщине круговой пятислойной пластины нагрузкой $q(r)$ (рисунок 1). Принимаются кинематические допущения: для тонких жестких несущих слоев 1, 2, 4 – гипотезы Кирхгофа; для заполнителей 3, 5 – гипотеза Тимошенко, учитывающая дополнительные повороты нормалей на углы $\psi_1(r)$, $\psi_2(r)$ – относительные сдвиги в верхнем и нижнем заполнителях. Цилиндрическая система координат связана со срединной плоскостью несущего слоя 1. Подлежат определению: прогиб пластины $w(r)$, углы $\psi_1(r)$, $\psi_2(r)$ и радиальное перемещение $u(r)$ срединной плоскости центрального слоя.

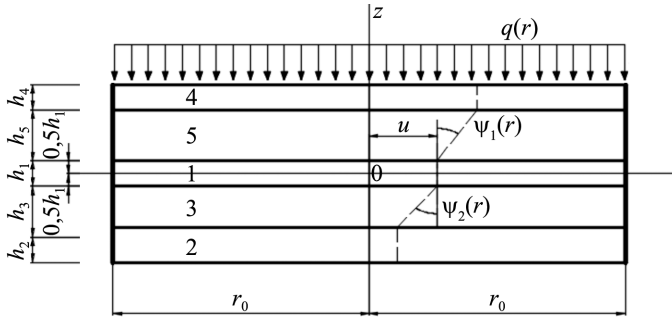


Рисунок 1 – Расчетная схема пятислойной пластины

Выражения радиальных перемещений в слоях через искомые функции:

$$\begin{aligned}
 u_r^{(1)} &= u - zw_{,r}, \quad -0,5h_1 \leq z \leq 0,5h_1, \\
 u_r^{(2)} &= u - zw_{,r} - h_3\psi_2, \quad -0,5h_1 - h_3 - h_2 \leq z \leq -0,5h_1 - h_3 \\
 u_r^{(3)} &= u - zw_{,r} + (z + 0,5h_1)\psi_2, \quad -0,5h_1 - h_3 \leq z \leq -0,5h_1, \\
 u_r^{(4)} &= u - zw_{,r} + h_5\psi_1, \quad 0,5h_1 + h_5 \leq z \leq 0,5h_1 + h_5 + h_4, \\
 u_r^{(5)} &= u - zw_{,r} + (z - 0,5h_1)\psi_1, \quad 0,5h_1 \leq z \leq 0,5h_1 + h_5,
 \end{aligned} \quad (1)$$

где h_k – толщина k -го слоя.

Деформации следуют из соотношений Коши [2] и перемещений (1). Деформирование верхнего защитного несущего слоя 4 и заполнителей 3, 5 (см. рисунок 1) предполагается упругим, подчиняющимся закону Гука. Физические характеристики несущих слоев 1, 2 нелинейные, для них справедливы соотношения теории малых упругопластических деформаций Ильюшина [1]:

$$s_\alpha^{(k)} = 2G_k \left(1 - \omega_k(\epsilon_u^{(k)})\right) \vartheta_\alpha^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k \epsilon^{(k)} \quad (\alpha = r, \varphi; k = 1, 2), \quad (2)$$

где $s_\alpha^{(k)}$, $\vartheta_\alpha^{(k)}$ – девиаторная часть, $\sigma^{(k)}$, $\epsilon^{(k)}$ – шаровые составляющие тензоров напряжений и деформаций; G_k , K_k – модули сдвига и объемной дефор-

магии; $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)})$ – функции пластичности, которые при $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}$ следует положить равными нулю; $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций [2]; $\varepsilon_y^{(k)}$ – деформационный предел текучести.

Введем в рассмотрение обобщенные внутренние усилия и моменты:

$$T_\alpha \equiv \sum_{k=1}^5 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^5 \int \sigma_\alpha^{(k)} dz; \quad M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^5 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^5 \int \sigma_\alpha^{(k)} z dz;$$

$$Q_1 = \int_{h_5} \sigma_{rz}^{(5)} dz; \quad Q_2 = \int_{h_3} \sigma_{rz}^{(3)} dz;$$

$$H_{1\alpha} = h_5 T_\alpha^{(4)} + M_\alpha^{(5)} - 0,5 h_1 T_\alpha^{(5)}; \quad H_{2\alpha} = -h_3 T_\alpha^{(2)} + M_\alpha^{(3)} + 0,5 h_1 T_\alpha^{(3)}, \quad (3)$$

где $\sigma_\alpha^{(k)}$ – нормальные напряжения ($\alpha = r, \varphi$).

Используя соотношения (2), компоненты напряжений представим в виде суммы упругой (индекс «e») и нелинейной «w» составляющих:

$$\sigma_\alpha^{(k)} = \sigma_{\alpha e}^{(k)} - \sigma_{\alpha w}^{(k)}; \quad (\alpha = r, \varphi; k = 1, 2);$$

$$\sigma_{\alpha e}^{(k)} = 2G_k \varepsilon_\alpha^{(k)} + K_k \theta^{(k)}; \quad \sigma_{\alpha w}^{(k)} = 2G_k \omega_k \varepsilon_\alpha^{(k)}. \quad (4)$$

Аналогично поступаем с внутренними усилиями (3):

$$T_\alpha^{(k)} = T_{\alpha e}^{(k)} - T_{\alpha w}^{(k)}; \quad M_\alpha^{(k)} = M_{\alpha e}^{(k)} - M_{\alpha w}^{(k)} \quad (\alpha = r, \varphi; k = 1, 2). \quad (5)$$

Входящие в (5) упругие $T_{\alpha e}^{(k)}, M_{\alpha e}^{(k)}, Q_{ie}$ и нелинейные $T_{\alpha w}^{(k)}, M_{\alpha w}^{(k)}, Q_{iw}$ составляющие вычисляются по формулам (3), в которых напряжения $\sigma_\alpha^{(k)}$ следует заменить на выражение (4), содержащее величины $\sigma_{\alpha e}^{(k)}, \sigma_{\alpha w}^{(k)}$.

В итоге суммарные внутренние усилия принимают вид

$$T_\alpha = T_{\alpha e} - T_{\alpha w} \equiv \sum_{k=1}^5 T_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^2 T_{\alpha w}^{(k)}; \quad M_\alpha = M_{\alpha e} - M_{\alpha w} \equiv \sum_{k=1}^5 M_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^2 M_{\alpha w}^{(k)};$$

$$H_{1\alpha} = H_{1\alpha e} - H_{1\alpha w}; \quad H_{1\alpha e} = h_5 T_{\alpha e}^{(4)} + M_{\alpha e}^{(5)} - 0,5 h_1 T_{\alpha e}^{(5)}; \quad H_{1\alpha w} = h_5 T_{\alpha w}^{(4)};$$

$$H_{2\alpha} = H_{2\alpha e} - H_{2\alpha w}; \quad H_{2\alpha e} = -h_3 T_{\alpha e}^{(2)} + M_{\alpha e}^{(3)} - 0,5 h_1 T_{\alpha e}^{(3)}; \quad H_{2\alpha w} = -h_3 T_{\alpha w}^{(2)}. \quad (6)$$

Полученная в [15] система дифференциальных уравнений равновесия пластины во внутренних обобщенных усилиях справедлива и здесь, так как при ее выводе не был использован закон Гука. С учетом (6) она приобретает вид

$$T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) = p_w, \quad H_{1r,r} + \frac{1}{r}(H_{1r} - H_{1\varphi}) - Q_1 = h_{1w},$$

$$H_{2r,r} + \frac{1}{r}(H_{2r} - H_{2\varphi}) - Q_2 = h_{2w}, \quad M_{r,r} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) = -q + q_w. \quad (7)$$

Здесь слева от знака равенства находятся упругие составляющие внутренних усилий, в которых индекс «e» опущен для простоты. Они выражают

ся через искомые функции формулами, приведенными в [15]. Справа располагаются слагаемые с индексом « ω », учитывающие физическую нелинейность материалов слоев:

$$\begin{aligned} p_\omega &= T_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(T_{r\omega} - T_{\varphi\omega}); \quad h_{1\omega} = H_{1r\omega,r} + \frac{1}{r}(H_{1r\omega} - H_{1\varphi\omega}); \\ h_{2\omega} &= H_{2r\omega,r} + \frac{1}{r}(H_{2r\omega} - H_{2\varphi\omega}); \quad q_\omega = M_{r\omega,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega,r} - M_{\varphi\omega,r}). \end{aligned} \quad (8)$$

Соответственно следующая из (7) система уравнений равновесия в перемещениях пластины с упругопластическими слоями имеет вид

$$\begin{aligned} L_2(a_1u + a_2\Psi_1 - a_3\Psi_2 - a_4w_r) &= p_\omega; \quad L_2(a_2u + a_5\Psi_1 - a_6w_r) - h_5G_5\Psi_1 = h_{1\omega}; \\ L_2(-a_3u + a_7\Psi_2 - a_8w_r) - h_3G_3\Psi_2 &= h_{2\omega}; \\ L_3(a_4u + a_6\Psi_1 + a_8\Psi_2 - a_9w_r) &= -q + q_\omega, \end{aligned} \quad (9)$$

где L_i – дифференциальные операторы:

$$L_2(g) \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}; \quad L_3(g) \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3};$$

a_i – коэффициенты:

$$\begin{aligned} a_1 &= K_4^+ h_4 + K_5^+ h_5 + K_1^+ h_1 + K_3^+ h_3 + K_2^+ h_2; \quad K_k^+ \equiv K_k + \frac{4}{3}G_k; \\ a_2 &= K_5^+ \frac{h_5^2}{2} + K_4^+ h_4 h_5; \quad a_3 = K_3^+ \frac{h_3^2}{2} + K_2^+ h_2 h_3; \\ a_4 &= K_4^+ \frac{h_4}{2}(h_1 + 2h_5 + h_4) + K_5^+ \frac{h_5}{2}(h_1 + h_5) - K_3^+ \frac{h_3}{2}(h_1 + h_3) - K_2^+ \frac{h_2}{2}(h_1 + 2h_3 + h_2); \\ a_5 &= K_4^+ h_4 h_5^2 + K_5^+ \frac{h_5^3}{3}; \quad a_6 = K_4^+ \frac{h_4 h_5}{2}(h_1 + 2h_5 + h_4) + K_5^+ h_5 \left(\frac{h_1 h_5}{4} + \frac{h_5^2}{3} \right); \\ a_7 &= K_2^+ h_2 h_3^2 + K_3^+ \frac{h_3^3}{3}; \quad a_8 = K_2^+ \frac{h_2 h_3}{2}(h_1 + 2h_3 + h_2) + K_3^+ h_3 \left(\frac{h_1 h_3}{4} + \frac{h_3^2}{3} \right); \\ a_9 &= K_4^+ h_4 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_4}{2} + h_1 h_5 + \frac{h_4^2}{3} + h_4 h_5 + h_5^2 \right) + K_5^+ h_5 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_5}{2} + \frac{h_5^2}{3} \right) + \\ &+ K_1^+ \frac{h_1^3}{12} + K_3^+ h_3 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) + K_2^+ h_2 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_2}{2} + h_1 h_3 + \frac{h_2^2}{3} + h_2 h_3 + h_3^2 \right). \end{aligned}$$

Система дифференциальных уравнений (9) является нелинейной, поэтому для ее решения воспользуемся методом линейных последовательных приближений, основанном на методе «упругих» решений Ильюшина. В этом случае на каждом шаге итерации рассматриваемая задача сводится к соот-

ветствующей задаче теории упругости с дополнительными «внешними» нагрузками, а система (9) принимает следующий итерационный вид:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u^{(n)} + a_2 \Psi - a_3 \Psi_2^{(n)} - a_4 w_{,r}^{(n)}) &= p_{\omega}^{(n-1)}; \\ L_2(a_2 u^{(n)} + a_5 \Psi_1^{(n)} - a_6 w_{,r}^{(n)}) - h_5 G_5 \Psi_1^{(n)} &= h_{1\omega}^{(n-1)}; \\ L_2(-a_3 u^{(n)} + a_7 \Psi_2^{(n)} - a_8 w_{,r}^{(n)}) - h_3 G_3 \Psi_2^{(n)} &= h_{2\omega}^{(n-1)}; \\ L_3(a_4 u^{(n)} + a_6 \Psi_1^{(n)} + a_8 \Psi_2^{(n)} - a_9 w_{,r}^{(n)}) &= -q + q_{\omega}^{(n-1)}, \end{aligned} \quad (10)$$

где n – номер приближения.

Для жестко заделанного контура пластины

$$\Psi_1^{(n)}(r_0) = \Psi_2^{(n)}(r_0) = w^{(n)}(r_0) = w_{,r}^{(n)}(r_0) = u^{(n)}(r_0) = 0. \quad (11)$$

При шарнирном опирании с учетом наличия жесткой диафрагмы на контуре, препятствующем относительному сдвигу слоев, выполняются условия

$$u^{(n)}(r_0) = \Psi_1^{(n)}(r_0) = \Psi_2^{(n)}(r_0) = w^{(n)}(r_0) = 0; \quad M_r^{(n)}(r_0) = M_{r\omega}^{(n-1)}(r_0). \quad (12)$$

На первом шаге нелинейные добавки в (10) полагаются равными нулю

$$p_{\omega}^{(0)} = h_{1\omega}^{(0)} = h_{2\omega}^{(0)} = q_{\omega}^{(0)} = 0.$$

При последующих итерациях они вычисляются на основе предыдущего приближения с использованием формул типа (8):

$$\begin{aligned} q_{\omega}^{(n-1)} &= M_{r\omega}^{(n-1)}{}_{,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega}^{(n-1)}{}_{,r} - M_{\varphi\omega}^{(n-1)}{}_{,r}); \quad p_{\omega}^{(n-1)} = T_{r\omega}^{(n-1)}{}_{,r} + \frac{1}{r}(T_{r\omega}^{(n-1)} - T_{\varphi\omega}^{(n-1)}); \\ h_{1\omega}^{(n-1)} &= H_{1r\omega}^{(n-1)}{}_{,r} + \frac{1}{r}(H_{1r\omega}^{(n-1)} - H_{1\varphi\omega}^{(n-1)}); \quad h_{2\omega}^{(n-1)} = H_{2r\omega}^{(n-1)}{}_{,r} + \frac{1}{r}(H_{2r\omega}^{(n-1)} - H_{2\varphi\omega}^{(n-1)}). \end{aligned} \quad (13)$$

Нелинейные составляющие в (12), (13):

$$\begin{aligned} T_{\alpha\omega}^{(n-1)} &\equiv \sum_{k=1}^2 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k,n-1)} dz = \sum_{k=1}^2 2G_k \int_{h_k} \omega_k (\epsilon_u^{(k,n-1)}) \vartheta_{\alpha}^{(k,n-1)} dz, \\ M_{\alpha\omega}^{(n-1)} &\equiv \sum_{k=1}^2 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k,n-1)} z dz = \sum_{k=1}^2 2G_k \int_{h_k} \omega_k (\epsilon_u^{(k,n-1)}) \vartheta_{\alpha}^{(k,n-1)} z dz, \\ H_{1\alpha\omega}^{(n-1)} &= h_5 T_{\alpha\omega}^{(4,n-1)}, \quad H_{2\alpha\omega}^{(n-1)} = -h_3 T_{\alpha\omega}^{(2,n-1)} \quad (\alpha = r, \varphi). \end{aligned} \quad (14)$$

2 Аналитическое решение. Используя методику решения подобной системы уравнений [15], решение системы (10) запишем в виде

$$\begin{aligned} \Psi_1^{(n)} &= C_2^{(n)} I_1(\beta_1 r) + C_4^{(n)} I_1(\beta_2 r) + \Psi_{1r}^{(n)}, \\ \Psi_2^{(n)} &= C_2^{(n)} k_1 I_1(\beta_1 r) + C_4^{(n)} k_2 I_1(\beta_2 r) + \frac{b_2^2 - b_1 b_3}{b_2 h_3 G_3} L_2(\Psi_{1r}^{(n)}) + \frac{b_3 h_5 G_5}{b_2 h_3 G_3} \Psi_{1r}^{(n)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{b_3 h_{1\omega}^{(n-1)} - b_2 h_{2\omega}^{(n-1)}}{b_2 h_3 G_3} + \frac{b_2 \gamma_2 - b_3 \gamma_1}{b_2 h_3 G_3} \left(L_1^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) + \frac{a_4}{a_1} p_\omega^{(n-1)} \right) - \frac{a_2 b_3 + a_3 b_2}{a_1 b_2 h_3 G_3} p_\omega^{(n-1)}; \\
w^{(n)} = & - \left(\gamma_1 + \gamma_2 \frac{b_3 h_5 G_5}{b_2 h_3 G_3} \right) \int \Psi_{1r}^{(n)} dr - \frac{\gamma_2 (b_2^2 - b_1 b_3)}{b_2 h_3 G_3} \int L_2(\Psi_{1r}^{(n)}) dr - \frac{\gamma_2 (b_2 \gamma_2 - b_3 \gamma_1)}{b_2 h_3 G_3} \times \\
& \times \left(L_1^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) dr + \frac{a_4}{a_1} \int p_\omega^{(n-1)} dr \right) - \frac{\gamma_2}{b_2 h_3 G_3} \left(b_3 \int h_{1\omega}^{(n-1)} dr - b_2 \int h_{2\omega}^{(n-1)} dr - \right. \\
& \left. - \frac{a_2 b_3 + a_3 b_2}{a_1} \int p_\omega^{(n-1)} dr \right) - \gamma \left(\int (L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)})) dr + \frac{a_4}{a_1} \int L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) dr \right) - \\
& - C_2^{(n)} \frac{I_0(\beta_1 r)(\gamma_1 + \gamma_2 k_1)}{\beta_1} - C_4^{(n)} \frac{I_0(\beta_2 r)(\gamma_1 + \gamma_2 k_2)}{\beta_2} + \frac{C_6^{(n)} r^2}{2} + C_8; \\
u^{(n)} = & \left(\frac{a_3 - a_4 \gamma_2}{a_1} \frac{b_3 h_5 G_5}{b_2 h_3 G_3} - \frac{a_2 + a_4 \gamma_1}{a_1} \right) \Psi_{1r}^{(n)} + \frac{a_3 - a_4 \gamma_2}{a_1} \frac{b_2^2 - b_1 b_3}{b_2 h_3 G_3} L_2(\Psi_{1r}^{(n)}) + \quad (15) \\
& + \frac{L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)})}{a_1} - \frac{a_4}{a_1} \gamma \left(L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) + \frac{a_4}{a_1} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) \right) + \frac{a_3 - a_4 \gamma_2}{a_1 b_2 h_3 G_3} \times \\
& \times \left(b_3 h_{1\omega}^{(n-1)} - b_2 h_{2\omega}^{(n-1)} + (b_2 \gamma_2 - b_3 \gamma_1) \left(L_1^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) + \frac{a_4}{a_1} p_\omega^{(n-1)} \right) - \frac{a_2 b_3 + a_3 b_2}{a_1} p_\omega^{(n-1)} \right) + \\
& + \frac{a_2 + \gamma_1 a_4 - k_1 (a_3 - \gamma_2 a_4)}{a_1} C_2^{(n)} I_1(\beta_1 r) + \frac{a_2 + \gamma_1 a_4 - k_2 (a_3 - \gamma_2 a_4)}{a_1} C_4^{(n)} I_1(\beta_1 r) + C_9^{(n)} r,
\end{aligned}$$

где учтено, что из условия ограниченности перемещений в центре пластины константы $C_1 = C_3 = C_5 = C_7 = C_{10} = 0$; I_1 – функции Бесселя; $\Psi_{1r}^{(n)}$ – частное решение уравнения Бесселя для сдвига ψ_1 ; интегралы берутся в пределах от 0 до r ; L_i^{-1} – интегральные операторы

$$L_1^{-1}(g) \equiv \frac{1}{r} \int r g dr, \quad L_3^{-1}(g) \equiv \frac{1}{r} \int_r \int_r \int_r r g dr dr dr;$$

$$b_1 = \frac{a_5 a_4^2 - a_1 a_5 a_9 + a_2^2 a_9 - 2 a_2 a_4 a_6 + a_1 a_6^2}{a_4^2 - a_1 a_9}; \quad b_2 = \frac{a_1 a_6 a_8 + a_3 a_4 a_6 - a_2 a_4 a_8 - a_2 a_3 a_9}{a_4^2 - a_1 a_9};$$

$$b_3 = \frac{a_4^2 a_7 - a_1 a_7 a_9 + 2 a_3 a_4 a_8 + a_3^2 a_9 + a_1 a_8^2}{a_4^2 - a_1 a_9};$$

$$\gamma = \frac{a_1}{a_4^2 - a_1 a_9}; \quad \gamma_1 = \frac{a_1 a_6 - a_2 a_4}{a_4^2 - a_1 a_9}; \quad \gamma_2 = \frac{a_1 a_8 + a_3 a_4}{a_4^2 - a_1 a_9}.$$

При жестком защемлении контура пластины остальные константы интегрирования получим, удовлетворяя решением (15) условиям (11):

$$\begin{aligned}
 C_2^{(n)} &= -C_4^{(n)} \frac{I_1(\beta_2 r_0)}{I_1(\beta_1 r_0)} - \frac{\Psi_{1r}^{(n)} \Big|_{r=r_0}}{I_1(\beta_1 r_0)}, \\
 C_4^{(n)} &= \left[\frac{h_5 G_5 b_3 - k_1 h_3 G_3 b_2}{h_3 G_3 b_2 I_1(\beta_2 r_0)(k_1 - k_2)} \Psi_{1r}^{(n)} + \frac{L_2(\Psi_{1r}^{(n)})}{I_1(\beta_2 r_0)(\beta_1^2 - \beta_2^2)} + \frac{b_3 h_{1\omega}^{(n-1)} - b_2 h_{2\omega}^{(n-1)}}{b_2 h_3 G_3 I_1(\beta_2 r_0)(k_1 - k_2)} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{b_2 \gamma_2 - b_3 \gamma_1}{b_2 h_3 G_3 I_1(\beta_2 r_0)(k_1 - k_2)} \left(L_1^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) + \frac{a_4}{a_1} p_\omega^{(n-1)} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{a_2 b_3 + a_3 b_2}{a_1 b_2 h_3 G_3 I_1(\beta_2 r_0)(k_1 - k_2)} p_\omega^{(n-1)} \right] \Big|_{r=r_0}, \\
 C_6^{(n)} &= \frac{\gamma}{r_0} \left(L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) + \frac{a_4}{a_1} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) \right) \Big|_{r=r_0}, \\
 C_8^{(n)} &= \gamma \left(\int L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) dr + \frac{a_4}{a_1} \int L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) dr \right) \Big|_{r=r_0} - \frac{C_6^{(n)} r_0^2}{2}, \\
 C_9^{(n)} &= -\frac{1}{a_1 r_0} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0}. \tag{16}
 \end{aligned}$$

Таким образом, итерационные формулы (15), (16) с учетом (13), (14) позволяют вычислять перемещения при изгибе круговой пятислойной несимметричной по толщине пластины с упругими и упругопластическими слоями. При шарнирном закреплении контура константы интегрирования следуют из условий (12).

Численные результаты получены для пластины единичного радиуса со слоями: кордиерит–фторопласт–4–дюралюминий–фторопласт–4–дюралюминий, контур которой защемлен. Толщины слоев, отнесенные к радиусу r_0 , $h_1 = h_2 = h_4 = 0,01$, $h_3 = h_5 = 0,1$. Функции пластичности и нелинейности в соотношениях (2), (4) приняты в виде

$$\omega_k(\varepsilon_u) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u \leq \varepsilon_y, \\ A_k (1 - \varepsilon_y^{(k)} / \varepsilon_u)^{\alpha_k}, & \varepsilon_u > \varepsilon_y. \end{cases}$$

Механические характеристики материалов: для кордиерита $G_4 = 258$ ГПа, $K_4 = 558$ ГПа; для дюралюминия $G_1 = 26,7$ ГПа, $K_1 = 80$ ГПа, $A_1 = 0,96$; $\alpha_1 = 2,34$; $\varepsilon_y^{(1)} = 0,735$ %; для фторопласта–4 – $G_3 = 90$ МПа, $K_3 = 345$ МПа [2]. Интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q_0 = -20$ МПа.

На рисунке 2 показаны графики изменения перемещений вдоль радиуса пластины. Четвертые приближения приняты за физически нелинейные перемещения, их отличие от предыдущих составляет менее 1 %, что свидетельствует о достаточно быстрой сходимости итерационного процесса.

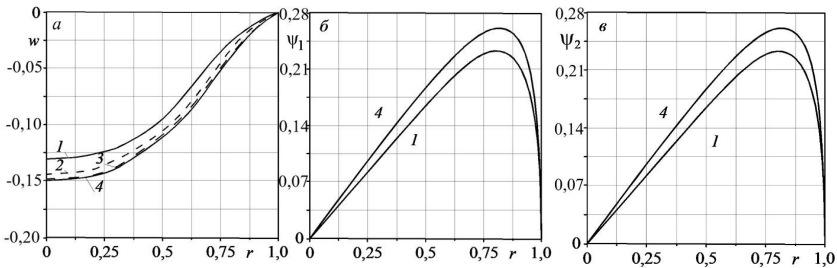


Рисунок 2 – Перемещения (а – прогиб w ; относительные сдвиги b – ψ_1 , v – ψ_2) в пятислойной пластине с кордиеритовым внешним слоем:

1 – упругие; 2, 3 – второе и третье приближения; 4 – физически нелинейные

В рассматриваемой пластине за счет учета упругопластических свойств двух несущих слоев перемещения на 12,8 % больше, чем у упругой пластины. Радиальные перемещения малы, они на три порядка меньше прогиба и сдвигов, поэтому на пластическое деформирование влияния практически не оказывают.

Выводы. Численные результаты подтвердили необходимость учета физически нелинейных свойств материалов слоев при изгибе пятислойной несимметричной по толщине пластины с двумя упругопластическими несущими слоями. Приведенные итерационные формулы позволяют вычислять перемещения в пятислойных пластинках и могут применяться в прочностных расчетах машиностроительных организаций.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-2025».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Zhuravkov, M. Mechanics of Solid Deformable Body / M. Zhuravkov, Y. Lyu, E. Starovoitov. – Singapore : Springer Verlag, 2023. – 317 p.

2 Деформирование трехслойных пластин при термосиловых нагрузках / Э. И. Старовойтов, Ю. В. Шафиева, А. В. Нестерович, А. Г. Козел. – Гомель : БелГУТ, 2024. – 395 с.

3 Leonenko, D. V. Vibrations of cylindrical sandwich shells with elastic core under local loads / D. V. Leonenko, E. I. Starovoitov // International Applied Mechanics. – 2016. – Vol. 52, is. 4. – P. 359–367.

4 Semenov, A. A. Dynamic buckling analysis of doubly curved orthotropic shallow shells via the Kantorovich and Rosenbrock methods / A. A. Semenov // Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering. – 2024. – Vol. 46, is. 7. – Article 410.

5 Горшков, А. Г. Гармоническое нагружение слоистых вязкоупругопластических систем / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая // Известия Академии наук. Механика твердого тела. – 2000. – № 6. – С. 91–98.

6 Будникова, Д. А. Анализ собственных колебаний пятислойного стержня / Д. А. Будникова // Механика. Исследования и инновации. – 2024. – Вып. 17. – С. 33–39.

7 Лачугина, Е. А. Свободные колебания пятислойной круговой пластины с легкими заполнителями / Е. А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2023. – Вып. 16. – С. 111–116.

8 Леоненко, Д. В. Колебания круговой трехслойной пластины под действием внешней нагрузки / Д. В. Леоненко, М. В. Маркова // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2023. – № 1. – С. 49–63.

9 Erofeev, V. I. Dispersion and energy characteristics of bending waves in a plate lying on a two-parameter elastic foundation / V. I. Erofeev, E. E. Lisenkova // Acoustical Physics. – 2023. – Vol. 69, is. 3. – P. 285–291.

10 Козел, А. Г. Термоупругопластический изгиб трехслойной круглой пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 100–108.

11 Старовойтов, Э. И. Изгиб прямоугольной трехслойной пластины на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Е. П. Доровская // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2006. – № 3. – С. 45–50.

12 Захарчук, Ю. В. Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 10. – С. 80–87.

13 Старовойтов, Э. И. Упругопластическое деформирование трехслойных стержней в температурном поле / Э. И. Старовойтов // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2012. – № 3. – С. 91–98.

14 Салицкий, В. С. Изгиб защемленной по контуру круговой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 209–213.

15 Салицкий, В. С. Изгиб локальной нагрузкой круглой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 27–31.

16 Салицкий, В. С. Круглая пятислойная пластина под действием осесимметричной кольцевой нагрузки / В. С. Салицкий // Механика. Исследования и инновации. – 2024. – Вып. 17. – С. 114–119.

E. I. STAROVOITOV, V. S. SALICKY

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

DEFORMATION OF A CIRCULAR FIVE-LAYER PLATE WITH ELASTIC AND ELASTOPLASTIC LAYERS

A model of a five-layer circular plate, asymmetric in thickness, is proposed; some layers are deformed elastically, while others exhibit plastic properties. The inelastic behavior is described by the equations of small elastoplastic deformation theory. The Kirchhoff's hypotheses describes the deformation of the load-bearing layers, while the Timoshenko's hypothesis describes the deformation of the cores. The Ilyushin's method of elastic solutions is used to solve the boundary-value problem. The results of numerical calculations based on the iterative solution are presented.

Keywords: five-layer asymmetric plate, bending, elasticity, plasticity, analytical solution.

Получено 29.10.2025