

УДК 539.37

*Д. Е. МАРМЫШ, А. С. ШЕЛЕГ**Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь***ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ
В ТЕЛАХ С НЕОДНОРОДНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ**

Рассматривается задача об определении напряженного состояния тела с использованием аналитического граничного элемента, получаемого для случая действия распределенной нагрузки интегрированием фундаментального решения, в качестве которого берется решение Кельвина для сосредоточенной силы, приложенной в произвольной точке упругого пространства. Численно решаются задачи о напряженном состоянии многосвязной области (плоскости с круговым отверстием) и тела с выпукло-вогнутой геометрией (сечение железнодорожного рельса).

Ключевые слова: метод граничных элементов, фундаментальное решение теории упругости, напряженное состояние, численное моделирование, неоднородная геометрия.

Введение. Метод граничных элементов (МГЭ) является одним из популярных и эффективных методов в механике для анализа напряженно-деформированного состояния твердого тела. Основным преимуществом МГЭ, по сравнению с популярными численными методами: конечных элементов, конечных разностей и конечных объемов – является возможность построения расчетной сетки только по границе тела, тем самым на один порядок снижается размерность задачи и уменьшается количество алгебраических уравнений итоговой системы [1].

С другой стороны, для применения МГЭ необходимо наличие фундаментальных решений, которые, во-первых, могут быть получены не для каждой постановки задачи, во-вторых, являются сингулярными. Для того чтобы избежать сингулярности, можно предварительно проинтегрировать фундаментальные решения для равномерно или неравномерно распределенных нагрузок вдоль некоторой конечной области. Как показано в работах [2–4], получаемые аналитические решения не являются сингулярными и могут быть использованы для гранично-элементного моделирования напряженно-деформированного состояния.

Аналитический граничный элемент (ГЭ). Для решения задач о плоском деформированном состоянии упругой изотропной среды методом граничных элементов в случае выпуклой геометрии тела используют фундаментальное решение Фламана, при невыпуклой геометрии – Кельвина.

Рассмотрим решение Кельвина для плоской деформации под действием сосредоточенной силы $\mathbf{F}(F_x, F_y)$, приложенной вдоль оси Oy упругой изотропной среды, вводя функцию [5]

$$g(x, y) = -\frac{\ln \sqrt{x^2 + y^2}}{4\pi(1-\mu)},$$

где μ – коэффициент Пуассона.

Компоненты напряжений получим по формулам

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^F &= F_x \left[2(1-\mu) g_{,x} - x g_{,xx} \right] + F_y \left(2\mu g_{,y} - y g_{,yy} \right); \\ \sigma_{yy}^F &= F_x \left(2\mu g_{,x} - x g_{,xx} \right) + F_y \left[2(1-\mu) g_{,y} - y g_{,yy} \right]; \\ \sigma_{xy}^F &= F_x \left[(1-2\mu) g_{,y} - x g_{,xy} \right] + F_y \left[(1-2\mu) g_{,x} - y g_{,xy} \right],\end{aligned}\tag{1}$$

где $g_{,x} = \partial g / \partial x$, $g_{,y} = \partial g / \partial y$.

При действии распределенной нагрузки аналитические выражения для компонент напряжений получаем интегрированием выражений (1). Запишем эти выражения для случая действия равномерной нагрузки $\mathbf{P}(q_0, p_0)$, распределенной вдоль отрезка $[-a, a]$ оси Ox :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{q_0}{4\pi(1-\mu)} \left[y^2 \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) + (3-2\mu) \ln \frac{r_1}{r_2} \right] + \\ &+ \frac{p_0 y}{4\pi(1-\mu)} \left[\frac{a-x}{r_1^2} + \frac{a+x}{r_2^2} - \frac{2\mu}{y} (\theta_1 + \theta_2) \right]; \\ \sigma_{yy} &= \frac{q_0}{4\pi(1-\mu)} \left[y^2 \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) - (1-2\mu) \ln \frac{r_1}{r_2} \right] + \\ &+ \frac{p_0 y}{4\pi(1-\mu)} \left[-\frac{a-x}{r_1^2} - \frac{a+x}{r_2^2} - \frac{2(1-\mu)}{y} (\theta_1 + \theta_2) \right]; \\ \sigma_{xy} &= \frac{q_0}{4\pi(1-\mu)} \left[y^2 \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) + (1-2\mu) (\theta_1 + \theta_2) + \ln \frac{r_1}{r_2} \right] + \\ &+ \frac{p_0 y}{4\pi(1-\mu)} \left[y^2 \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) + (1-2\mu) \ln \frac{r_1}{r_2} \right],\end{aligned}\tag{2}$$

где $r_{1,2}^2 = (a \mp x)^2 + y^2$, $\theta_{1,2} = \arctg \frac{a \mp x}{y}$.

Выражения (2) не являются сингулярными и определяют напряжения в любой точке бесконечного пространства (x, y) . Напряжения в локальной системе координат (\bar{x}, \bar{y}) граничного элемента с центром в точке (c_x, c_y) и ориентированного под углом β к системе (x, y) получаются путем подстановки формул для преобразования координат:

$$\bar{x} = (x - c_x) \cos \beta + (y - c_y) \sin \beta; \quad \bar{y} = -(x - c_x) \sin \beta + (y - c_y) \cos \beta$$

в выражения (2).

При реализации метода фиктивных нагрузок воспользуемся системой уравнений [3, 5]

$$\begin{cases} \sigma_s^i = \sum_{k=1}^N A_{ss}^{ik} P_s^k + \sum_{k=1}^N A_{sn}^{ik} P_n^k; \\ \sigma_n^i = \sum_{k=1}^N A_{ns}^{ik} P_s^k + \sum_{k=1}^N A_{nn}^{ik} P_n^k \end{cases} \quad (i = 1, \dots, N), \quad (3)$$

где N – количество граничных элементов, на которое разбита кривая, ограничивающая рассматриваемую область; $\mathbf{P}^k (P_s^k, P_n^k)$ – соответственно, фиктивные касательные и нормальные напряжения, приложенные к k -му ГЭ; A_{ss}^{ik}, \dots – граничные коэффициенты влияния напряжений, определяемые из (2) для действия единичных усилий, которые распределены вдоль k -го ГЭ.

Система уравнений (3) решается относительно неизвестных фиктивных нагрузок $\mathbf{P}^k (P_s^k, P_n^k)$, которые не равны действительным напряжениям σ_s^k и σ_n^k , возникающим при действии приложенных граничных условий на всех N элементах граничной кривой.

Численный эксперимент. Рассмотрим задачу Кирша об одноосном растяжении усилиями p бесконечной упругой пластины с круглым отверстием радиуса a . Аналитическое решение этой задачи для случая полярных координат (r, θ) можно найти в [5–7]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{P}{2}(1 - \alpha^2) + \frac{P}{2}(1 - 4\alpha^2 + 3\alpha^4) \cos 2\theta; \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{P}{2}(1 + \alpha^2) - \frac{P}{2}(1 + 3\alpha^4) \cos 2\theta; \\ \sigma_{r,\theta} &= -\frac{P}{2}(1 + 2\alpha^2 - 3\alpha^4) \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\alpha = a/r$.

Схема, иллюстрирующая численное решение задачи Кирша, представлена на рисунке 1. Напряжения, действующие на каждом граничном элементе,

$$\sigma_s^i = -\frac{P}{2} \sin 2\theta_i; \quad \sigma_n^i = \frac{P}{2} (1 + \cos 2\theta_i). \quad (5)$$

Как видно из рисунка 1, круговое отверстие разбивалось на 12 одинаковых ГЭ, для которых по формулам (5) определялись значения касательных и нормальных напряжений на границе. Обход контура кругового отверстия производится против часовой стрелки. Подставляя (5) в (3), получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения вектора фиктивных нагрузок $\mathbf{P}^k (P_s^k, P_n^k)$ на каждом граничном элементе:

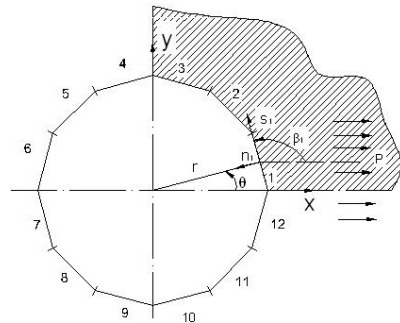


Рисунок 1 – Схема для численного решения задачи Кирша

$$\begin{cases} -\frac{p}{2} \sin 2\theta_i = \sum_{k=1}^{12} A_{ss}^{ik} P_s^k + \sum_{k=1}^{12} A_{sn}^{ik} P_n^k; \\ \frac{p}{2} (1 + \cos 2\theta_i) = \sum_{k=1}^{12} A_{ns}^{ik} P_s^k + \sum_{k=1}^{12} A_{nn}^{ik} P_n^k \end{cases} \quad (i = 1, \dots, 12).$$

На рисунке 2 представлено сравнение численного (точки) и аналитического (сплошная линия) решений для радиальных и касательных напряжений при угле $\theta = 15^\circ$ в (4) и коэффициенте Пуассона $\mu = 0,33$ в (2).

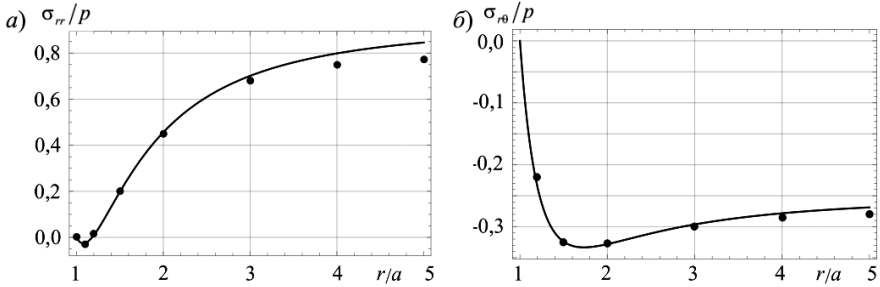


Рисунок 2 – Радиальные (а) и касательные (б) напряжения

Отметим, что из выражений (4) при угле $\theta = 15^\circ$ на бесконечности, то есть при $\alpha = a/r \rightarrow 0$, следует, что

$$\sigma_{rr}/p = 0,5 + 0,25\sqrt{3}; \quad \sigma_{\theta\theta}/p = 0,5 - 0,25\sqrt{3}; \quad \sigma_{r0}/p = -0,25.$$

Напряженное состояние сечения рельса. Как уже было отмечено выше, фундаментальное решение Кельвина (1), соответственно, и его модификация для аналитического граничного элемента может быть использована для тел, геометрия которых не является выпуклой. Именно такой геометрией обладает сечение железнодорожного рельса, гранично-элементное моделирование напряженного состояния которого рассмотрим. На рисунке 3 изображена расчетная схема к задаче с гранично-элементной сеткой по контуру рельса. Геометрические размеры взяты для рельса Р65 [8].

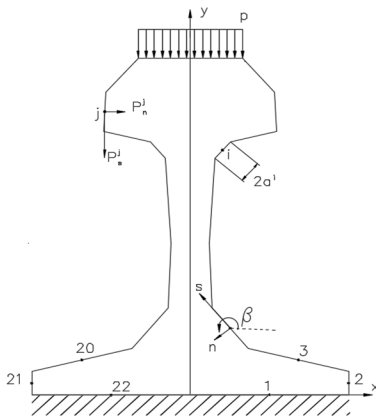


Рисунок 3 – Схема для численного решения задачи о напряженном состоянии сечения рельса

Как видно из приведенной схемы, гранично-элементная сетка является неоднородной и состоит из 22 элементов. Кроме

того, граничные условия являются смешанными: верхний контур рельса нагружен равномерно распределенной нагрузкой, направленной по нормали к контуру, нижний контур рельса жестко закреплен. Граничные условия в терминах перемещений приводят к необходимости использований также и фундаментальных решений для перемещений среды в задаче Кельвина [5]:

$$\begin{aligned} u_x^F &= \frac{F_x}{2G} [(3-4\mu)g - xg_{,x}] + \frac{F_y}{2G} (-yg_{,x}); \\ u_y^F &= \frac{F_x}{2G} (-xg_{,y}) + \frac{F_y}{2G} [(3-4\mu)g - yg_{,y}], \end{aligned} \quad (6)$$

где G – модуль сдвига.

Интегрирование решений (6) для равномерно распределенных касательных q_0 и нормальных нагрузок p_0 вдоль отрезка $|x| \leq a$ приводит к выражениям:

$$\begin{aligned} u_x &= -\frac{q_0}{8\pi(1-\mu)G} \left\{ -8(1-\mu)a + 4(1-\mu)(\theta_1 + \theta_2)y + \right. \\ &+ (3-4\mu) \left[(a-x)\ln r_1 + (a+x)\ln r_2 \right] \left. - \frac{p_0 y}{8\pi(1-\mu)G} \ln \frac{r_1}{r_2} \right\}; \\ u_y &= -\frac{q_0}{8\pi(1-\mu)G} \left\{ -2(3-4\mu)a + 2(1-2\mu)(\theta_1 + \theta_2)y + \right. \\ &+ (3-4\mu) \left[(a-x)\ln r_1 + (a+x)\ln r_2 \right] \left. - \frac{p_0 y}{8\pi(1-\mu)G} \ln \frac{r_1}{r_2} \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Учет граничных условий в перемещениях аналогичен учету в напряжениях с той лишь разницей, что в системе уравнений, аналогичной (3),

$$\begin{cases} u_s^i = \sum_{k=1}^N B_{ss}^{ik} P_s^k + \sum_{k=1}^N B_{sn}^{ik} P_n^k; \\ u_n^i = \sum_{k=1}^N B_{ns}^{ik} P_s^k + \sum_{k=1}^N B_{nn}^{ik} P_n^k \end{cases} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (8)$$

в качестве граничных коэффициентов влияния напряжений A_{ss}^{ik}, \dots берутся коэффициенты влияния перемещений B_{ss}^{ik}, \dots , получаемые из (7).

Таким образом, для нахождения неизвестных фиктивных нагрузок $\mathbf{P}^k (P_s^k, P_n^k)$ решают совместно системы уравнений (3) и (8), число которых в общем случае разбиения граничной кривой на N элементов, должно быть $2N$.

Как видно из рисунка 3, нижний контур рельса представлен двумя граничными элементами с номерами 1 и 22, соответственно, граничные условия в перемещениях в (8) будут иметь вид

$$u_s^1 = u_s^{22} = 0 \quad \text{и} \quad u_n^1 = u_n^{22} = 0.$$

На рисунке 4 показаны результаты гранично-элементного моделирования распределения нормальных напряжений σ_{xx} и σ_{yy} (отнесенных к величине прикладываемой нагрузки p) вдоль оси y ($x = 0$) по высоте сечения рельса от 0 до 180 мм.

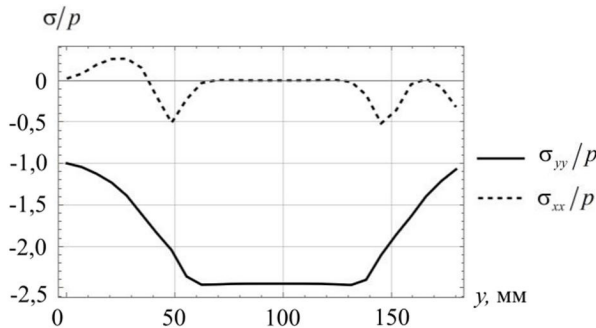


Рисунок 4 – Нормальные напряжения в сечении рельса

В процессе эксплуатации железнодорожного рельса крайне важным фактором, влияющим на напряженно-деформированное состояние пары «колесо – рельс», является трение между контактирующими телами. Для учета касательных нагрузок q , действующих на верхний контур сечения рельса, используем закон Кулона с коэффициентом трения $f = 0,3$ [9], поэтому

$$q = fp = 0,3p.$$

В данной работе коэффициент трения между рельсом и колесом принят постоянным, что является упрощением. В действительности коэффициент трения в системе зависит от характеристик материалов контактирующих тел и параметров нагружения. Соответствующие исследования можно найти, например, в работах [10, 11].

На рисунке 5 показаны результаты гранично-элементного моделирования относительных нормальных σ_{xx}/p и касательных σ_{xy}/p напряжений по высоте сечения рельса вдоль оси y ($x = 0$). Касательная нагрузка прикладывалась по верхнему контуру рельса в сторону положительного направления оси x . Действие касательного нагружения не влияет существенным образом на изменение нормального напряжения σ_{xx} вдоль оси y . В случае только нормального нагружения сечения рельса усилиями p ось y является осью симметрии, соответственно, нормальные напряжения σ_{xx} и σ_{yy} являются главными напряжениями вдоль оси y , а касательные напряжения $\sigma_{xy} = 0$. Отметим, однако, что равенство нулю касательных напряжений вдоль оси симметрии является теоретическим. При численном моделировании из-за аппроксимационных и вычислительных погрешностей касательные напряжения могут быть отличны от

нуля, тем не менее значения σ_{xy} должны быть значительно меньше величины прикладываемой нагрузки p .

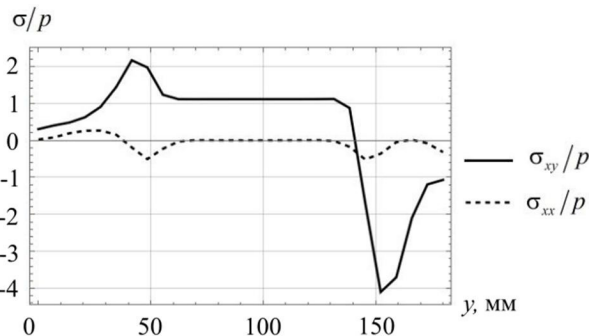


Рисунок 5 – Нормальное и касательное напряжения в сечении рельса при учете касательной составляющей нагружения

Из рисунка 5 видно, что при наличии трения в системе «железнодорожное колесо – рельс», касательные напряжения являются знакопеременными, причем в абсолютном выражении значения возрастают более чем в 10 раз по сравнению с величиной нормального внешнего давления p . Здесь также отметим, что использование аналитического граничного элемента с функциями влияния, которые не являются сингулярными, позволяет в точности соблюсти граничные на верхнем и нижнем контурах сечения рельса.

Заключение. При реализации гранично-элементного моделирования необходимо наличие фундаментального решения для рассматриваемой среды. В случае изотропной упругой среды фундаментальные решения хорошо известны, однако являются сингулярными. Предварительное интегрирование фундаментальных решений для распределенных нагрузок позволяет получить решения, не являющиеся сингулярными, то есть конечными в любой точке среды. Получаемые таким образом аналитические решения могут быть эффективно использованы для численного решения задач о напряженно-деформированном состоянии твердых деформируемых тел. Основываясь на фундаментальном решении Кельвина для плоского деформированного состояния, можно проводить гранично-элементное моделирование многосвязных тел и/или тел с неоднородной геометрией, в том числе для выпукло-вогнутой геометрии тела, как это показано для сечения рельса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Efficient BEM for thin-walled inhomogeneous potential problems: Theory and MATLAB code / X. Gao, Y. Gu, B. Yu [et al.] // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2025. – Vol. 176. – Article 106241.

2 **Щербаков, С. С.** Определение трехмерного напряженно-деформированного состояния полупространства при действии эллиптически распределенных нормальных и касательных усилий на основе точных решений для равномерной нагрузки / С. С. Щербаков // Весці НАНБ. Серыя фіз.-тэхн. навук. – 2012. – № 3. – С. 50–56.

3 **Журавков, М. А.** Гранично-элементное моделирование в механике: пособие / М. А. Журавков, А. В. Круподеров, С. С. Щербаков. – Минск : БГУ, 2014. – 174 с.

4 **Li, J.** A Boussinesq-Cerruti solution set for constant and linear distribution of normal and tangential load over a triangular area / J. Li, E. J. Berger // Journal of Elasticity. – 2001. – Vol. 63, is. 2. – P. 137–151.

5 **Крауч, С.** Методы граничных элементов в механике твердого тела / С. Крауч, А. Старфилд. – М. : Мир, 1987. – 328 с.

6 **Timoshenko, S. P.** Theory of Elasticity / S. P. Timoshenko, J. N. Goodier. – New York : McGraw-Hill, 1970. – 519 p.

7 **Демидов, С. П.** Теория упругости / С. П. Демидов. – М. : Высш. шк., 1979. – 432 с.

8 Рельсы железнодорожные. Общие технические условия : ГОСТ Р 51685-2013. – Введ. 14.10.2013. – М. : Стандартинформ, 2013. – 96 с.

9 **Щербаков, С. С.** Напряженно-деформированное состояние и объемная повреждаемость в окрестности контактного взаимодействия в трибофатической системе колесо / рельс с учетом неконтактного деформирования рельса / С. С. Щербаков, О. А. Насань // Вестник БелГУТа: Наука и транспорт. – 2016. – № 1 (32). – С. 234–247.

10 Исследование зависимости коэффициента трения в системе «рельс – колесо» как функции параметров материала и нагружения / В. Л. Попов, С. Г. Псахье, Е. В. Шилько [и др.] // Физическая мезомеханика. – 2002. – № 3. – С. 17–25.

11 Зависимость коэффициента трения в зоне контакта системы колесо – рельс от шероховатости взаимодействующих поверхностей / А. М. Керопян, П. М. Вержанский, В. А. Мостаков, Р. К. Басов // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2016. – № 11. – С. 80–89.

D. E. MARMYSH, A. S. SHELEG

Belarusian State University, Minsk, Belarus

BOUNDARY ELEMENT MODELING OF STRESSES IN BODIES WITH INHOMOGENEOUS GEOMETRY

The problems of analyzing the body state using an analytical boundary element obtained for the case of a distributed load complex action are solved by a fundamental solution, where the Kelvin solution for a complex force applied in a stable elastic space is adopted. The stressed state problem for the multiply connected domain (a plane with a circular hole) and a body with convex-concave geometry (a railroad rail cross-section) is solved numerically.

Keywords: boundary element method, fundamental solution of elasticity theory, stress state, numerical simulation, non-homogeneous geometry.

Получено 15.10.2025