

УДК 534.131:62-419

Д. В. ЛЕОНЕНКО

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СЭНДВИЧ-СТЕРЖНЯ С ЛЕГКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Рассмотрены вынужденные колебания сэндвич-стержня с защемленными торцами. С помощью вариационного принципа Гамильтона – Остроградского получена система дифференциальных уравнений движения для случая, при котором деформирование внешних слоев описывается моделью Бернулли, а внутреннего – моделью Тимошенко. Решение системы получено разложением в ряды. Проведен численный анализ для случая действия равномерно распределенной гармонической резонансной нагрузки.

Ключевые слова: сэндвич-стержень, резонанс, легкий наполнитель.

Введение. В последние годы было проведено множество исследований, посвященных анализу статике и динамике трехслойных конструкций с различными типами наполнителей. В работах [1, 2] рассмотрено статическое и динамическое деформирование трехслойных пластин при действии различных нагрузок. Публикация [3] посвящена статическому нагружению трехслойного стержня термосиловыми воздействиями. В статье [4] построена нелинейная модель сэндвич-балки с вязкоупругим наполнителем, демонстрирующая зависимость резонансной частоты от амплитуды возбуждения. Авторы показали, что при определенных условиях возможно снижение коэффициента затухания при росте энергии возбуждения, что приводит к проявлению нелинейных резонансных эффектов. Исследование, выполненное в [5], сосредоточено на экспериментальном и теоретическом анализе сэндвич-стержня с трехмерной решетчатой структурой внутреннего слоя. Авторы работы [6] рассмотрели конечно-элементную модель балки с вязкоупругим наполнителем, учитывающую частотно-зависимое поведение материала. Модель была верифицирована экспериментально и может быть использована для оценки низших собственных частот и форм колебаний.

Свободные колебания решетчатых сэндвич-стержней с произвольными упругими опорами изучались с помощью аналитической модели в [7]. В работе [8] предложены рекомендации по проектированию консольных трехслойных сэндвич-балок, обеспечивающие эффективное гашение вибраций за счет подбора свойств наполнителя. Статья [9] посвящена свободным и вынужденным колебаниям сэндвич-балок с локально-резонансными демпферами. В работе с применением численных методов анализировалось влияние резонаторов на динамическое поведение системы. В публикации [10] рассмотрены нелинейные вынужденные колебания сэндвич-стержня с вязко-

упругим слоем ядра, причем аналитическая модель учитывает нормальные, поперечные деформации и сдвиг в заполнителе, используя уточненную теорию ломаной линии высшего порядка. В статье [11] изучены колебания трехслойного стержня на упругом винклеровом основании.

В статье [12] было представлено решение задачи о собственных колебаниях стержня с несжимаемым заполнителем. В данной работе рассматриваются вынужденные резонансные колебания симметричного трехслойного стержня.

1 Постановка начально-краевой задачи. Рассматриваются колебания сэндвич-стержня под действием гармонической нагрузки. Перемещения в несущих внешних слоях соответствуют модели Бернулли, во внутреннем слое (заполнителе) – модели Тимошенко. Заполнитель считаем несжимаемым, легким.

Начало системы координат располагается на левом торце стержня, а горизонтальная ось x совпадает с центральной осью заполнителя. На внешнюю поверхность верхнего несущего слоя действует переменная нагрузка $q(x, t)$ (рисунок 1). В качестве искомым функций принимаем прогиб $w(x, t)$ и относительный угол сдвига нормали в заполнителе $\psi(x, t)$.

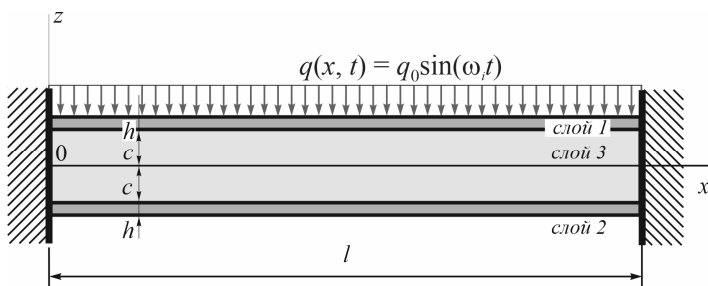


Рисунок 1 – Расчетная схема сэндвич-стержня

Уравнения движения получим, используя вариационный принцип Гамильтона – Остроградского [13],

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (K - W - A) dt = 0 ; \quad \int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta W - \delta A) dt = 0 , \quad (1)$$

где K – кинетическая энергия системы; W – потенциальная энергия деформации; $A = A_1 + A_2$ – суммарная потенциальная энергия, численно равная сумме работ внешних нагрузок и торцевых усилий.

Потенциальную энергию деформации W определяем, пренебрегая энергией касательных напряжений σ_{xz} :

$$W = b_0 \int_0^l \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} \epsilon_x^{(k)} dz dx , \quad (2)$$

где b_0 – ширина поперечного сечения; $\sigma_x^{(k)}, \varepsilon_x^{(k)}$ – компоненты тензоров напряжений и деформаций.

Кинетическая энергия сэндвич-стержня

$$K = b_0 \sum_{k=1}^3 \int_0^l \int_{h_k} \left[\frac{\rho_k}{2} \left((\dot{w}^{(k)})^2 + (\dot{u}^{(k)})^2 \right) \right] dz dx, \quad (3)$$

где ρ_k – плотность материала; $w^{(k)}, u^{(k)}$ – перемещения точек k -го слоя; точка над функцией обозначает производную по времени.

Потенциальная энергия, обусловленная действием внешней нагрузки и внешних сил и моментов на торцах,

$$A_1 = \iint_S q w dS = b_0 \int_0^l q w dx, \quad A_2 = (N_0 - N_l)u + (Q_0 - Q_l)w - (M_0 - M_l)w_{,x}, \quad (4)$$

где $N_0, Q_0, M_0, N_l, Q_l, M_l$ – заданные силы и моменты на торцах ($x = 0; l$), запятая в нижнем индексе обозначает производные по следующим за ней переменным.

Подставляя выражения для энергий (2)–(4) в (1) и приравнявая коэффициенты при вариациях, приходим к системе дифференциальных уравнений движения, выраженной через внутренние силовые факторы:

$$c(N^{(1)}_{,x} - N^{(2)}_{,x}) + M^{(3)}_{,x} = 0, \\ M_{,xx} = m_1 \ddot{w} - q, \quad (5)$$

где $N^{(k)}, M^{(k)}$ – продольные силы и изгибающие моменты в слоях стержня,

$$N^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} dz; \quad M^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} z dz;$$

M – обобщенный внутренний момент,

$$M = \sum_{k=1}^3 M^{(k)};$$

m_1 – инерционный член [12].

С помощью соотношений закона Гука, выражая обобщенные моменты в (5) через перемещения, получим систему дифференциальных уравнений движения в перемещениях:

$$b_1 \Psi_{,xx} - b_2 w_{,xxx} = 0, \\ b_2 \Psi_{,xxx} - b_3 w_{,xxxx} = m_1 \ddot{w} - q. \quad (6)$$

Выражения коэффициентов системы (6) представлены в [12].

Замыкание начально-краевой задачи осуществляется присоединением к (6) граничных и начальных условий закрепления торцов стержня.

Начальные условия движения принимаем в виде

$$\text{при } t = 0 \quad w(x, 0) = w_0(x); \quad \dot{w}(x, 0) = \dot{w}_0(x), \quad (7)$$

где $w_0(x)$, $\dot{w}_0(x)$ – заданные начальные перемещения и скорости точек срединной поверхности заполнителя.

2 Решение задачи. Рассмотрим действие на стержень гармонической нагрузки

$$q(x, t) = q_0 (D \cos(\omega_i t) + E \sin(\omega_i t)), \quad (8)$$

где q_0 – амплитуда интенсивности равномерно распределенной нагрузки; D , E – константы; ω_i – частота внешней возмущающей силы, которая совпадает с i -й собственной частотой колебаний стержня; t – время.

Для описания вынужденных колебаний рассматриваемого стержня искомые перемещения $\psi(r, t)$, $w(r, t)$ и внешнюю нагрузку $q(r, t)$ представим в виде следующих разложений в ряды:

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \frac{b_2}{b_1} \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(x) T_n(t); \quad w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(x) T_n(t); \\ q(x, t) &= m_1 \sum_{n=0}^{\infty} W_n(x) q_n(t). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь для жестко защемленного с двух торцов стержня координатные функции принимают вид

$$\Psi_n(x) = \frac{\lambda_n}{d_n} \left(-\frac{\text{sh}(\lambda_n l) - \sin(\lambda_n l)}{\cos(\lambda_n l) - \text{ch}(\lambda_n l)} (\sin(\lambda_n x) + \text{sh}(\lambda_n x)) - \text{ch}(\lambda_n x) + \cos(\lambda_n x) \right);$$

$$W_n(x) = \frac{1}{d_n} \left(\frac{\text{sh}(\lambda_n l) - \sin(\lambda_n l)}{\cos(\lambda_n l) - \text{ch}(\lambda_n l)} (\cos(\lambda_n x) - \text{ch}(\lambda_n x)) - \text{sh}(\lambda_n x) + \sin(\lambda_n x) \right);$$

$$q_n(t) = \frac{1}{m_1} \int_0^l q(x, t) W_n(x) dx;$$

$$d_n^2 = \int_0^l \left[\frac{\text{sh}(\lambda_n l) - \sin(\lambda_n l)}{\cos(\lambda_n l) - \text{ch}(\lambda_n l)} (\cos(\lambda_n x) - \text{ch}(\lambda_n x)) - \text{sh}(\lambda_n x) + \sin(\lambda_n x) \right]^2 dx, \quad (10)$$

где λ_n – собственные числа, определяемые условиями закрепления торцов стержня.

Из системы (6) с учетом выражения нагрузки (8) получаем дифференциальное уравнение относительно прогиба стержня

$$w_{,xxxx} + f_1 \ddot{w} = \frac{f_1 q_0}{m_1} (D \cos(\omega_i t) + E \sin(\omega_i t)), \quad (11)$$

где

$$f_1 = \frac{m_1 b_1}{b_1 b_3 - b_2^2}.$$

Функции $q_n(t)$ получим в виде

$$q_n(t) = \frac{1}{m_1} \int_0^l q(x, t) W_n(x) dx = D_n \cos(\omega_i t) + E_n \sin(\omega_i t), \quad (12)$$

где

$$D_n = \frac{2q_0 D}{m_1 \lambda_n d_n} \left(\frac{\text{sh}(\lambda_n l) \sin(\lambda_n l)}{\cos(\lambda_n l) - \text{ch}(\lambda_n l)} + 1 \right), \quad E_n = \frac{2q_0 E}{m_1 \lambda_n d_n} \left(\frac{\text{sh}(\lambda_n l) \sin(\lambda_n l)}{\cos(\lambda_n l) - \text{ch}(\lambda_n l)} + 1 \right).$$

Подстановка в (11) выражений (12), (9) совместно с использованием координатных функций (10) приводят к уравнению для определения функций времени $T_n(t)$:

$$\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = D_n \cos(\omega_k t) + E_n \sin(\omega_k t).$$

Его решение может быть записано в виде

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) + y_n(t), \quad (13)$$

где $y_n(t)$ – частное решение уравнения,

$$y_n(t) = \begin{cases} \frac{D_n}{\omega_n^2 - \omega_i^2} \cos(\omega_i t) + \frac{E_n}{\omega_n^2 - \omega_i^2} \sin(\omega_i t), & n \neq i; \\ -\frac{E_i}{2\omega_i} t \cos(\omega_i t) + \frac{D_i}{2\omega_i} t \sin(\omega_i t), & n = i. \end{cases}$$

Константы интегрирования A_n и B_n при использованных начальных условиях движения (7)

$$A_n = \int_0^l w_0(x) W_n dx - \begin{cases} \frac{D_n}{\omega_n^2 - \omega_i^2}, & n \neq i; \\ 0, & n = i; \end{cases}$$

$$B_n = \frac{1}{\omega_n} \left[\int_0^l \dot{w}_0(x) W_n dx - \begin{cases} \frac{\omega_i E_n}{\omega_n^2 - \omega_i^2}, & n \neq i \\ -\frac{E_i}{2\omega_i}, & n = i \end{cases} \right]. \quad (14)$$

Таким образом, под действием резонансной нагрузки (8) поперечные колебания трехслойного сэндвич-стержня описываются перемещениями (9), в которых функция времени $T_n(t)$ и константы интегрирования определяются выражениями (13), (14).

3 Численный анализ. Для численного исследования рассмотрим защемленную с обоих концов балку из материалов Д16Т – фторопласт – Д16Т с толщинами слоев $h = 0,02$; $c = 0,09$ [1], которая находится под действием равномерно-распределенной нагрузки с амплитудой интенсивности $q_0 = -500$ Па.

На рисунке 2 показано изменение прогиба в середине стержня ($x = 0,5 l$) при частотах собственных колебаний $\omega_0 = 398 \text{ c}^{-1}$ (а) и $\omega_1 = 1098 \text{ c}^{-1}$ (б). На графиках представлено весьма большое количество периодов, поэтому отдельные колебания неразличимы. Из рисунка 2, а видно, что при совпадении частоты внешней нагрузки с ω_0 происходит линейный рост амплитуды. В случае совпадения частоты внешней нагрузки с ω_1 увеличения максимального отклонения со временем не происходит, имеет место ложный резонанс. Данное явление для подобных трехслойных систем было исследовано в [14]. Аналогичные ситуации имеют место для всех четных и нечетных частот соответственно.

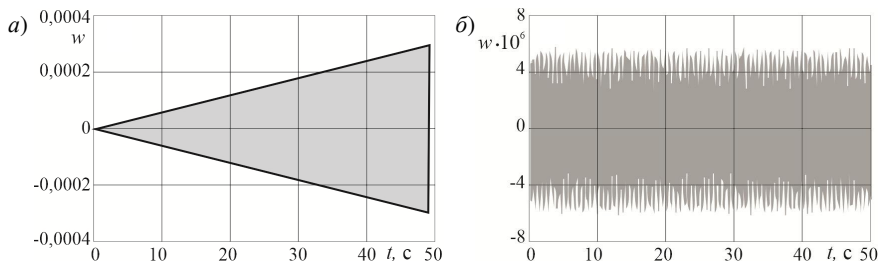


Рисунок 2 – Изменение прогиба во времени при резонансе по ω_0 (а) и ω_1 (б)

Выводы. В данной работе рассмотрена методика исследования колебаний сэндвич-стержней с несжимаемым легким наполнителем в области резонанса. Получены уравнения движения и их решение для случая действия гармонической нагрузки. Проведен численный анализ при действии переменной равномерно распределенной нагрузки, показавший, что при «резонансной» нечетной частоте наблюдается ложный резонанс и нарастания амплитуд колебаний не происходит.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Старовойтов, Э. И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2002. – 344 с.
- 2 Плескачевский, Ю. М. Динамика круговых металлополимерных пластин на упругом основании. Ч. 1: Свободные колебания / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2008. – № 4 (5). – С. 48–52.

3 **Starovoitov, E. I.** Bending of a sandwich beam by local loads in the temperature field / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2018. – Т. 18, вып. 1. – С. 69–83.

4 Nonlinear vibration model of sandwich beam with a shear thickening fluid core / W. Li, K. Lin, K. Wang, B. Wang // Journal of Vibration and Control. – 2022. – Vol. 29, is. 21–22. – P. 4959–4971.

5 Theoretical and experimental study of the vibration dynamics of a 3d-printed sandwich beam with an hourglass lattice truss core / Z. Guo, G. Hu, J. Jiang [et al.] // Frontiers in Materials. – 2021. – Vol. 7. – Article 651998. – 10 p.

6 Finite element model for the vibration analysis of sandwich beam with frequency-dependent viscoelastic material core / Z. Huang, X. Wang, N. Wu [et al.] // Materials. – 2019. – Vol. 12, is. 20. – Article 3390. – 15 p.

7 Unified solution for the vibration analysis of lattice sandwich beams with general elastic supports / Y. Jin, R. Yang, H. Liu [et al.] // Applied Sciences. – 2021. – Vol. 11, is. 19. – Article 9141. – 28 p.

8 **Hodaiei, M. A.** Design guidelines for vibration energy dissipation in three-layer sandwich cantilever beams / M. A. Hodaiei, H. R. Hamidzadeh // ASME Open Journal Engineering. – 2024. – Vol. 3. – Article 031032. – 7 p.

9 **Russillo, F.** Free and forced vibrations of damped locally-resonant sandwich beams / F. Russillo, G. Failla, F. Fraternali // European Journal of Mechanics. A/Solids. – 2021. – Vol. 86. – Article 104188. – 25 p.

10 Effect of the normal transverse stress on the superharmonic resonance problem of three layered sandwich beams with viscoelastic core / M. A. Al-Osta, H. Youzera, S. A. Meftah [et al.] // Journal of Vibration Engineering & Technologies. – 2024. – Vol. 12, is. 4. – P. 6185–6196.

11 **Леоненко, Д. В.** Вынужденные колебания трехслойного стержня на упругом безынерционном основании / Д. В. Леоненко // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2007. – № 3. – С. 70–74.

12 **Леоненко, Д. В.** Собственные колебания сэндвич-стержня с легким наполнителем / Д. В. Леоненко // Механика. Исследования и инновации. – 2024. – Вып. 17. – С. 100–105.

13 **Новацкий, В.** Теория упругости / В. Новацкий. – М. : Мир, 1975. – 872 с.

14 **Старовойтов, Э. И.** Локальные и импульсные нагрузки трехслойных элементов конструкций / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко. – Гомель : БелГУТ, 2003. – 367 с.

D. V. LEONENKO

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

RESONANT VIBRATIONS OF A SANDWICH ROD WITH A LIGHTWEIGHT CORE

Forced vibrations of a sandwich rod with clamped ends are considered. Using the Hamilton – Ostrogradsky variational principle, a system of differential equations of motion is derived for the case in which the deformation of the outer layers is described by the Bernoulli model, and that of the inner layer by the Timoshenko model. The solution to the system is obtained by series expansion. A numerical analysis is performed for the case of a uniformly distributed harmonic resonant load.

Keywords: sandwich rod, resonance, lightweight core.

Получено 01.09.2025