

УДК 62-419:534.131

*Е. А. ЛАЧУГИНА*

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

## **КОЛЕБАНИЯ ПЯТИСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ МГНОВЕННОМ ПРИЛОЖЕНИИ НАГРУЗКИ**

Рассматривается задача о вынужденных колебаниях пятислойной несимметричной по толщине круговой пластины. Построено аналитическое решение методом разложения перемещений в ряд по системе собственных ортонормированных функций. В качестве примера использования найденного решения проведен численный анализ колебаний пластины, возникающих вследствие мгновенного приложения равномерно распределенной нагрузки.

**Ключевые слова:** круглая пятислойная пластина, несимметричная по толщине пластина, вынужденные колебания, равномерно распределенная нагрузка.

В связи с расширением использования металлополимерных систем существует необходимость развития методов решения задач об их квазистатическом и динамическом нагружении. Современные подходы к построению расчетных моделей механики слоистых элементов конструкций изложены в монографиях [1–3].

Деформирование трехслойных и пятислойных пластин при статических нагрузках исследовано в статьях [4–6]. Сжимаемость заполнителя принималась линейной по толщине пластины, модель Пастернака позволила учесть наличие сдвиговых напряжений в основании. В пятислойных пластинах предполагалось наличие двух заполнителей.

Динамические процессы, происходящие в трехслойных цилиндрических оболочках и пластинах, изучались в работах [7, 8], где были получены аналитические решения с использованием метода разложения искомых перемещений в ряды по системам собственных функций. Анализ собственных колебаний пятислойного стержня проведен в [9, 10]. Работы [11–15] посвящены исследованию свободных колебаний пятислойных симметричных и несимметричных по толщине пластин с двумя заполнителями.

В данной статье исследуется динамика несимметричной по толщине пятислойной пластины с двумя легкими заполнителями при мгновенном приложении равномерно распределенной нагрузки на основе решения начально-краевой задачи о вынужденных колебаниях.

Аналогично работе [13] рассматривается упругая несимметричная по толщине пятислойная круговая пластина, включающая три несущих слоя и два заполнителя. На ее контуре предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. Используется цилиндрическая система координат  $r, \varphi, z$  (рисунок 1), которая связана со срединной плоскостью внутреннего несущего слоя. В качестве искомых функций в начально-краевой задаче

принимаются радиальное перемещение координатной поверхности  $u(r, t)$ , относительные сдвиги в обоих заполнителях  $\psi_1(r, t)$ ,  $\psi_2(r, t)$  и прогиб  $w(r, t)$ .

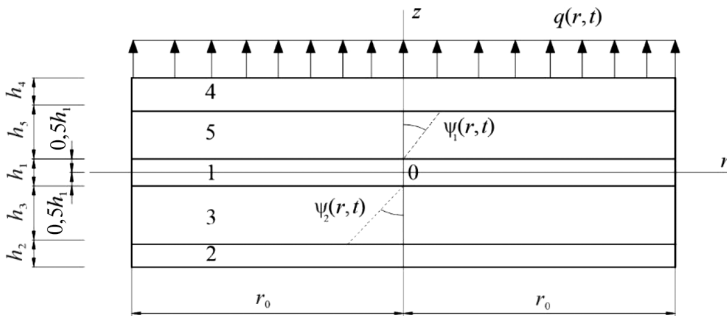


Рисунок 1 – Схема пятислойной пластины

Предполагается, что тонкие слои 1, 2, 4 обладают значительной жесткостью при сдвиге и их деформирование подчиняется классическим гипотезам Кирхгофа. Для относительно толстых заполнителей 3, 5 сдвиговые деформации существенны, и поэтому используется гипотеза Тимошенко. Сжимаемость слоев в поперечном направлении и относительное проскальзывание между слоями отсутствуют.

Напряжения и деформации в слоях связаны соотношениями линейной теории упругости:

$$s_{\alpha\alpha}^{(k)} = 2G_k \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = K_k \theta^{(k)} \quad (\alpha = r, \varphi);$$

$$s_{rz}^{(k)} = 2G_k \varepsilon_{rz}^{(k)} \quad (k = 3, 5), \quad (1)$$

где  $s_{\alpha\beta}^{(k)}$ ,  $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}$  – девиаторные,  $\sigma^{(k)}$ ,  $\theta^{(k)}$  – шаровые части тензоров напряжений и деформаций;  $G_k$ ,  $K_k$  – модули сдвига и объемной деформации материалов слоев;  $k = 1, \dots, 5$  – номер слоя.

Система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая вынужденные колебания пятислойной круговой пластины несимметричной по толщине с легкими заполнителями, получена с помощью вариационного принципа Лагранжа в [13] и имеет вид

$$L_2(a_1 u - a_2 w_{,r} + a_3 \psi_1 - a_4 \psi_2) = 0; \quad L_2(a_3 u - a_5 w_{,r} + a_6 \psi_1) = 0;$$

$$L_2(-a_4 u - a_7 w_{,r} + a_8 \psi_2) = 0; \quad L_3(a_2 u - a_9 w_{,r} + a_5 \psi_1 + a_7 \psi_2) - M_0 \ddot{w} = q, \quad (2)$$

где  $L_2$ ,  $L_3$  – дифференциальные операторы [14];  $a_1, \dots, a_9$  – коэффициенты, выражения которых приведены в [13];  $M_0 \ddot{w}$  – поперечные силы инерции;

$$M_0 = r_0^2 \sum_{k=1}^5 \rho_k h_k;$$

$q(r, t)$  – внешняя осесимметричная поверхностная нагрузка;  $\rho_k$  – плотность материала слоя.

Краевая задача замыкается добавлением к уравнениям (2) граничных условий на контуре и условий ограниченности решения в центре пластины. Например, в случае заделки контура

$$u = \psi_1 = \psi_2 = w = w_{,r} = 0 \quad \text{при } r = r_0. \quad (3)$$

Решение уравнений (2) проводится с помощью разложения искомого перемещения  $u(r, t)$ ,  $\psi_1(r, t)$ ,  $\psi_2(r, t)$ ,  $w(r, t)$  и внешней нагрузки  $q(r, t)$  в ряды по системам собственных ортонормированных функций  $v_n$ :

$$u(r, t) = b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t), \quad \psi_1(r, t) = b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t), \quad \psi_2(r, t) = b_3 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t),$$

$$w(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t), \quad q(r, t) = M_0 \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t), \quad (4)$$

где  $v_n \equiv \frac{1}{d_n} \left[ J_0(\beta_n r) - \frac{J_0(\beta_n r_0)}{I_0(\beta_n r_0)} I_0(\beta_n r) \right]$ ;  $\varphi_n = v_{n,r}$ ;  $T_n(t)$  – подлежащая определению функция времени;  $d_n$  – константы, которые определяются из требования нормировки;  $J_0, I_0$  – функции Бесселя.

Используемая система собственных фундаментальных функций обладает полнотой, поэтому ряды в (4) сходятся равномерно. Следовательно, искомые функции могут считаться непрерывными и дифференцируемыми.

Чтобы найти коэффициенты разложения нагрузки в ряд по системе собственных функций,  $q_n(t)$  умножим на функцию  $v_n(\beta_n r)$  в последнем из соотношений в (10) и проинтегрируем по радиусу пластины:

$$\int_0^{r_0} q(r, t) v_n r dr = M_0 \int_0^{r_0} \sum_{m=0}^{\infty} v_m q_m(t) v_n r dr = M_0 \sum_{m=0}^{\infty} q_m(t) \int_0^{r_0} v_m v_n r dr. \quad (5)$$

В силу ортонормированности системы собственных функций правая часть уравнения (5) будет отличной от нуля только при  $m = n$ . Отсюда

$$q_n(t) = \frac{1}{M_0} \int_0^{r_0} q(r, t) v_n r dr. \quad (6)$$

После линейных преобразований и двукратного интегрирования первых трех уравнений система дифференциальных уравнений (2) приводится к виду

$$u = b_1 w_{,r} + C_1 r + \frac{C_2}{r}; \quad \psi_1 = b_2 w_{,r} + C_3 r + \frac{C_4}{r};$$

$$\psi_2 = b_3 w_{,r} + C_5 r + \frac{C_6}{r}; \quad L_3(w_{,r}) + M^4 \ddot{w} = -Dq \quad (M^4 = M_0 D), \quad (7)$$

где  $b_1$ – $b_3$ ,  $D$  – коэффициенты, которые выражаются через  $a_i$  по формулам, приведенным в [13];  $C_1, \dots, C_6$  – константы интегрирования. Учитывая ограниченность искомого решения в начале координат, имеем  $C_2 = C_4 = C_6 = 0$ .

Подстановка прогиба и нагрузки из (4), (6) в четвертое уравнение системы (7) дает

$$\sum_{n=0}^{\infty} (L_3(v_n, r) T_n(t) + M^4 v_n \ddot{T}_n(t)) = -M_0 D \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t). \quad (8)$$

Собственные функции  $v_n(\beta_n r)$  удовлетворяют уравнению [14]:

$$L_3(v_n, r) - \beta_n^4 v_n = 0. \quad (9)$$

Подставим (9) в (8) и, учитывая, что собственные числа оператора  $L_3 \beta^4 = M^4 \omega^2$  ( $\omega$  – частота собственных колебаний), получим

$$M^4 \sum_{n=0}^{\infty} v_n (T_n \omega_n^2 + \ddot{T}_n) = -M^4 \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n. \quad (10)$$

Приравнявая коэффициенты перед собственными ортонормированными функциями в (10), получим уравнение для определения входящей в (4) искомой функции времени  $T_n(t)$

$$\ddot{T}_n + \omega_n^2 T_n = q_n. \quad (11)$$

Общее решение уравнения (11) можно записать в виде [3]

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \sin(\omega_n(t-\tau)) q_n(\tau) d\tau. \quad (12)$$

Коэффициенты  $A_n, B_n$  определяются из начальных условий. Полагая, что в начальный момент времени прогиб и скорость составляют соответственно

$$w_0(r) = 10^{-3} \left(1 - (r/r_0)^2\right); \quad \dot{w}_0(r) = 0, \quad (13)$$

получаем

$$A_n = 10^{-3} \int_0^{r_0} \left(1 - (r/r_0)^2\right) v_n r dr, \quad B_n = 0. \quad (14)$$

Если осесимметричная круговая распределенная нагрузка воздействует на внешнюю поверхность верхнего несущего слоя, то имеем

$$q_n(t) = \frac{q_0 r_0}{M_0 d_n \beta_n} \left( J_1(\beta_n r_0) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_1(\beta_n r_0) \right). \quad (15)$$

Функция времени  $T_n(t)$  вычисляется по формуле (12) с учетом (14), (15). При постоянной во времени интенсивности приложенной нагрузки  $q_0$  и нулевых начальных условиях получаем

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + \frac{q_0 r_0 (1 - \cos(\omega_n t))}{M_0 d_n \beta_n \omega_n^2} \left( J_1(\beta_n r_0) - \frac{J_0(\beta_n r_0)}{I_0(\beta_n r_0)} I_1(\beta_n r_0) \right). \quad (16)$$

Прогиб  $w(r, t)$ , относительные сдвиги  $\psi_1(r, t)$ ,  $\psi_2(r, t)$  и радиальное перемещение  $u(r, t)$  при воздействии осесимметричной приложенной нагрузки,

определяются соотношениями (4), при собственных функциях  $v_n(\beta_n r)$ ,  $\varphi_n(\beta_n r)$  и функции времени (16).

Численный анализ выполнен для пятислойной пластины единичного радиуса ( $r_0 = 1$  м). Толщины слоев приняты следующие:  $h_2 = 0,01$ ,  $h_4 = 0,03$ ,  $h_1 = 0,02$ ,  $h_3 = 0,2$ ,  $h_5 = 0,2$ ; момент времени  $t_0 = \pi / \omega_0$ . Вычисления проведены с использованием математического пакета Maple.

В несимметричной пластине с базовой геометрией изменение прогиба  $w(r, t_0)$  без начального прогиба показано на рисунке 2, а, с начальным прогибом (19) – на рисунке 2, б в зависимости от радиуса пластины при различных материалах верхнего несущего слоя  $h_4$ : 1 – Д16Т, 2 – титан, 3 – кордиерит. При отсутствии начального прогиба замена на титан приводит к снижению максимального прогиба на 21 %, а на кордиерит – на 83 %. В условиях наличия начального прогиба наблюдается более значительное уменьшение данного параметра: на 30 % для титана и на 115 % для кордиерита.

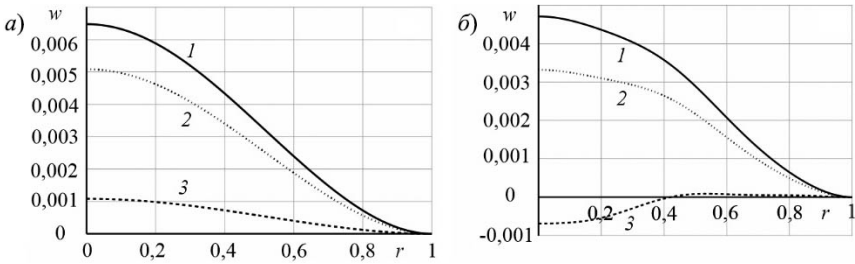


Рисунок 2 – Прогиб пятислойной пластины:

а – при отсутствии начального прогиба; б – при наличии начального прогиба (13)

Рисунки 3 и 4 иллюстрируют влияние начального прогиба (13) на изменение во времени максимального прогиба  $w(0, t)$  и относительного сдвига  $\psi_1(0,5, t)$  при нагрузке, распределенной по всей верхней поверхности пластины для случаев: 1 – без начального прогиба; 2 – при заданном начальном прогибе.

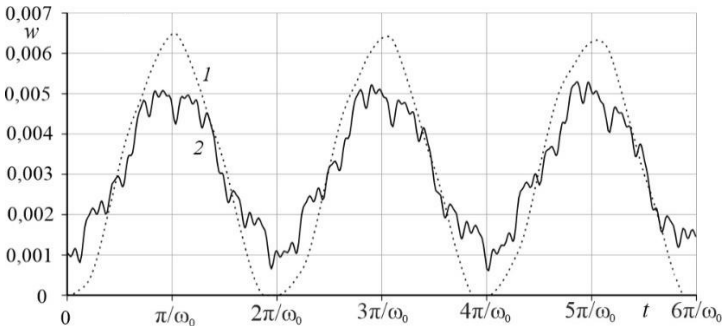


Рисунок 3 – Изменение прогиба во времени при мгновенном приложении нагрузки, распределенной по всей верхней поверхности пластины:

1 – без начального прогиба; 2 – при наличии начального прогиба

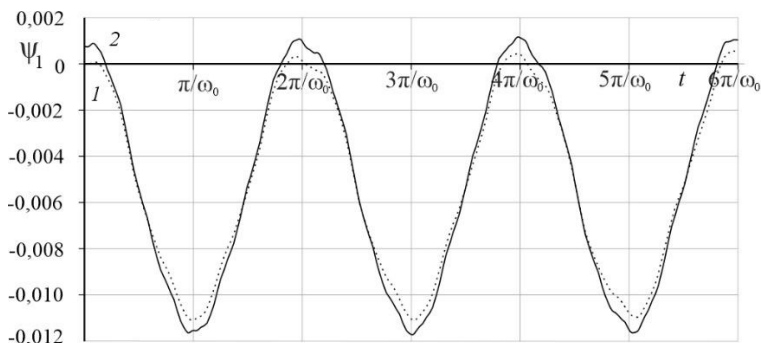


Рисунок 4 – Зависимость относительного сдвига от времени при мгновенном приложении нагрузки, распределенной по всей верхней поверхности пластины  
1 – без начального прогиба; 2 – при наличии начального прогиба

В случае отсутствия начального прогиба наблюдается отнулевой синусоидальный цикл колебаний. При наличии начального прогиба цикл перестает быть отнулевым (см. рисунок 3), график сжимается по вертикали, максимум уменьшается примерно на 21,5 %. График относительного сдвига верхнего заполнителя  $\psi_1$  при наличии начального прогиба растягивается по вертикали (см. рисунок 4), его максимальное по модулю значение увеличивается приблизительно на 9 %.

Таким образом, предложенное аналитическое решение позволяет проводить численный анализ вынужденных колебаний несимметричных по толщине круговых пятислойных пластин.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № T24M-004).*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Zhuravkov, M.** Mechanics of Solid Deformable Body / M. Zhuravkov, Y. Lyu, E. Starovoitov. – Singapore : Springer Verlag, 2023. – 317 p.
- 2 **Абдусаттаров, А.** Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / А. Абдусаттаров, Э. И. Старовойтов, Н. Б. Рузиева. – Ташкент : Ideal Press, 2023. – 381 с.
- 3 Деформирование трехслойных пластин при термосиловых нагрузках / Э. И. Старовойтов, Ю. В. Шафиева, А. В. Нестерович, А. Г. Козел. – Гомель : БелГУТ, 2024. – 395 с.
- 4 **Захарчук, Ю. В.** Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – Вып. 10. – С. 55–66.
- 5 **Старовойтов, Э. И.** Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака / Э. И. Старовойтов, А. Г. Козел // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т. 2, № 3. – С. 392–406.

6 Салицкий, В. С. Изгиб локальной нагрузкой круглой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 27–31.

7 Леоненко, Д. В. Радиальные собственные колебания упругих трехслойных цилиндрических оболочек / Д. В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2010. – № 3 (12). – С. 53–56.

8 Starovoitov, E. I. Vibrations of round three-layer plates under the action of distributed local loads / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // Strength of materials. – 2002. – Vol. 34, is. 5. – P. 474–481.

9 Будникова, Д. А. Анализ собственных колебаний пятислойного стержня / Д. А. Будникова // Механика. Исследования и инновации. – 2024. – Вып. 17. – С. 33–39.

10 Старовойтов, Э. И. Собственные колебания пятислойного стержня, вызванные начальным прогибом / Э. И. Старовойтов, Д. А. Будникова // Механика машин, механизмов и материалов. – 2025. – № 2 (71). – С. 70–77.

11 Лачугина, Е. А. Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жестким наполнителем / Е. А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 116–122.

12 Лачугина, Е. А. Свободные колебания пятислойной круговой пластины с легкими наполнителями / Е. А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2023. – Вып. 16. – С. 111–116.

13 Лачугина, Е. А. Собственные частоты колебаний круговой пятислойной несимметричной по толщине пластины / Е. А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2024. – Вып. 17. – С. 92–99.

14 Лачугина, Е. А. Собственные колебания пятислойной круговой пластины при различных закреплениях контура / Е. А. Лачугина // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 25–30.

15 Lachugina, E. Natural fluctuations of a five-layer thickness unsymmetrical plate / E. Lachugina // AIP Conference Proceedings. – 2025. – Vol. 3265. – Article 050005.

*E. A. LACHUGINA*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## **OSCILLATIONS OF A FIVE-LAYER CIRCULAR PLATE UNDER INSTANTANEOUS LOAD APPLICATION**

The problem of forced oscillations of a five-layer circular plate, asymmetric in thickness, is considered. An analytical solution is obtained by expanding the displacements in the series of orthonormal eigenfunctions. As an example of the resulting solution application a numerical analysis of the plate vibrations arising from the instantaneous application of a uniformly distributed load is performed.

**Keywords:** five-layer circular plate, thickness-asymmetric plate, forced vibrations, uniformly distributed load.

Получено 31.10.2025