

УДК 539.31:531.45

Е. В. КОДНЯНКО

ЗАО «Солигорский институт проблем ресурсосбережения с Опытным производством», Солигорск, Беларусь

АНАЛИЗ УСТАНОВИВШЕГОСЯ КАЧЕНИЯ ЖЕСТКОГО КОЛЕСА С ГИПЕРУПРУГИМ ОБОДОМ

Разработана методика расчетного определения параметров контактного взаимодействия жесткого цилиндра, имеющего тонкий гиперупругий обод, с опорной поверхностью в процессе установившегося качения цилиндра. Методика основана на использовании упрощенной модели винклера основания. Результаты использования разработанной методики сопоставлены с расчетными оценками, полученными для качения цилиндра с линейно вязкоупругим ободом.

Ключевые слова: установившееся качение, контактные напряжения, модель Винклера основания, упругий потенциал.

Введение. Полимерные материалы в настоящее время широко используются при изготовлении покрытий, обкладок и поверхностных слоев, предназначенных для снижения износа металлических деталей при контактном взаимодействии. Выбор оптимального состава и толщины подобных покрытий требует наличия методики расчетного прогнозирования их силовой нагрузки в процессе эксплуатации. Решению контактных задач для тел с покрытиями посвящено множество известных научных работ [1–3].

Широко распространенное в настоящее время численное, в частности, конечно-элементное моделирование [4] позволяет производить расчеты без существенного упрощения геометрии контактирующих тел с учетом особенностей деформационного поведения используемых материалов. Однако реализация в рамках данного подхода многопараметрического анализа рассматриваемой контактной пары связана со значительными временными затратами. Кроме того, для тонких покрытий, толщина которых намного меньше характерных размеров основной детали и не превышает характерного размера области контакта, возникает дополнительная задача обеспечения сходимости численного решения контактной задачи путем оптимизации распределения конечных элементов по размерам и формам [5].

Классический вариант методики аналитического решения контактных задач для тел с покрытиями [2] подразумевает использование интегрального преобразования Фурье и решение систем интегральных уравнений. Указанная сложность математического аппарата кратно возрастает при необходимости учета частичного проскальзывания в области контакта. Кроме того, при использовании указанной методики затруднен учет нелинейности процесса деформирования полимерного материала.

Вследствие отмеченных недостатков классического варианта при аналитическом решении рассматриваемых контактных задач часто используются упрощенные модели деформируемого основания [6]. В частности, применение модели винклера основания для относительно тонких поверхностных слоев позволяет без существенного усложнения используемых математических соотношений учесть вязкость материала слоя [7], а также наличие в области контакта зон сцепления и проскальзывания [8]. Получаемые при этом расчетные оценки параметров контакта с приемлемой точностью согласуются с результатами использования математически более строгой и сложной методики, основанной на асимптотическом приближении точного решения задачи теории упругости для тонкой полосы [9]. Также модель винклера основания позволяет описать пластическое деформирование [10] и частичный износ [11, 12] покрытия под действием контактных напряжений.

Однако до настоящего времени аналитические методы решения контактных задач не были использованы для описания качения колес с учетом характерной для большинства полимерных материалов геометрической нелинейности процесса деформирования [13]. Кроме того, при анализе силовой нагруженности конструкций, содержащих полимерные элементы, возникает необходимость учета не только больших деформаций этих элементов, но и вязкости образующего их материала. Наиболее значимо влияние данного свойства при циклическом деформировании полимерного материала.

В связи с вышесказанным, целью настоящего исследования является разработка упрощенной основанной на модели основания Винклера методики расчетного определения параметров установившегося качения колеса, которая позволила бы учесть большие деформации и вязкость материала тонкого деформируемого обода.

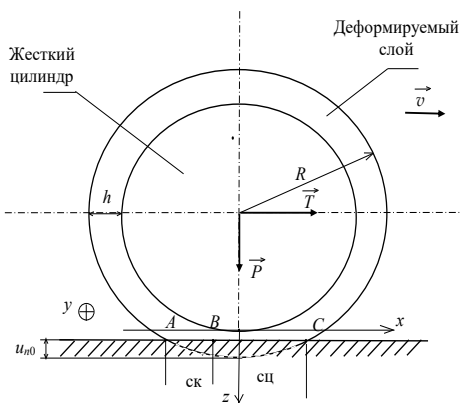


Рисунок 1 – Структурная модель опоры качения

Решение контактной задачи.

Упрощенная структурная модель роликовой опоры, содержащей полимерный промежуточный слой, представлена на рисунке 1. Она включает абсолютно жесткий цилиндр с образующей длиной L , по боковой грани которого с ним адгезионно связан деформируемый слой толщины h . Общий радиус составного цилиндра R . Деформируемый слой находится в контактом взаимодействии с горизонтальной недеформируемой шероховатой поверхностью. Коэффициент трения с данной по-

верхностью – f . Слой образован изотропным гиперупругим сжимаемым материалом. На составной цилиндр действуют вертикальная сила P , направленная к опорной поверхности, и горизонтальная сила T (см. рисунок 1).

Для деформируемого слоя будем использовать модель винклера основания, в которой слой представляет собой систему независимо деформируемых элементарных стержней высотой h , ориентированных вдоль оси z (см. рисунок 1). Для каждого из этих стержней компоненты F_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) тензора градиента деформации \mathbf{F} не зависят от координат (допущение модели Винклера) и задаются выражениями вида [14]

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial (X_i + u_i)}{\partial X_j}.$$

Здесь x_i, X_i – декартовы координаты точки стержня в актуальной (текущей) и отсчетной (исходной) конфигурации соответственно; u_i – компоненты вектора упругого смещения данной точки.

Условия однородности градиента деформации и адгезионной связи стержня с недеформируемым цилиндром позволяют представить тензор \mathbf{F} в виде

$$\mathbf{F} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{u_\tau}{h} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{u_n}{h} \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Здесь u_n, u_τ – вертикальные и горизонтальные смещения точек деформируемого слоя, находящихся в области контакта, относительно соответствующих (с той же координатой x) точек внутренней поверхности слоя соответственно.

В выражении (1) учтено, что при контакте составного цилиндра с основанием элементарные стержни модели винклера основания сжимаются (смещение u_n положительно). В рамках настоящей работы в качестве меры деформации гиперупругого материала будем использовать правый тензор деформаций Коши – Грина [14]. Данный тензор задается соотношением

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}. \quad (2)$$

Упругий потенциал (запасенная энергия деформации) изотропного гиперупругого материала – функция инварианта тензора деформаций I_1, I_2, I_3

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{C}), \quad I_2 = \frac{1}{2} [(\text{tr}(\mathbf{C}))^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)], \quad I_3 = |\mathbf{C}|. \quad (3)$$

Здесь функция $\text{tr}(\mathbf{C})$ – след матрицы \mathbf{C} (сумма диагональных элементов); $|\mathbf{C}|$ – определитель матрицы \mathbf{C} .

В большинстве случаев [15] вместо третьего инварианта используют относительное изменение объема J :

$$J = \sqrt{I_3} = |\mathbf{F}|. \quad (4)$$

В качестве меры напряжения используем второй тензор напряжений Пиола – Кирхгофа

$$\mathbf{S}^y = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial w}{\partial I_1} \mathbf{I} + 4 \frac{\partial w}{\partial I_2} \mathbf{C} + J \frac{\partial w}{\partial J} \mathbf{C}^{-1}. \quad (5)$$

Верхний индекс «у» означает, что соответствующая величина определена без учета вязкости материала. Классический вариант учета данного явления для гиперупругих материалов [16] подразумевает использование одного ядра $R(t)$ релаксации для всех компонент тензора напряжений. При этом второй тензор напряжений Пиола – Кирхгофа, определенный для вязкоупругого материала, будет связан с тензором \mathbf{S}^0 соотношением

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^y - \int_0^t \mathbf{S}^y(\zeta) R(t - \zeta) d\zeta. \quad (6)$$

Не снижая общности дальнейших выкладок в качестве функции $w(I_1, I_2, J)$ будем использовать неогуковский потенциал в форме [14]

$$w = \frac{1}{2} G (J^{-2/3} I_1 - 3) + \frac{1}{2} K (J - 1)^2. \quad (7)$$

Здесь G, K – модуль сдвига и объемный модуль материала обода, характеризующие упругость материала при малых деформациях без учета вязкости:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)},$$

где E, ν – мгновенные значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона материала.

Используя соотношения (1)–(7), получим выражения для нормального и сдвигового контактных давлений, определенных без учета вязкости материала как функции смещений u_n, u_τ :

$$\begin{aligned} p^y(u_n, u_\tau) &= -G \left(1 - \frac{u_n}{h}\right)^{-8/3} \frac{2u_n^2 - u_\tau^2 - 4u_n h}{3h^2} + K \frac{u_n}{h - u_n}; \\ \tau^y(u_n, u_\tau) &= G \left(1 - \frac{u_n}{h}\right)^{-8/3} \frac{u_\tau}{h} \left(1 + \frac{u_n^2 + u_\tau^2 - 2u_n h}{3h^2}\right) + K \frac{u_n u_\tau}{h(h - u_n)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Решение контактной задачи аналогично изложенному в работе [9]. Нормальное относительное смещение u_n точек внешней поверхности деформируемого обода, находящихся в области контакта, зависит от координаты x :

$$u_n = u_{n0} - \frac{x^2}{2R}, \quad (9)$$

где u_{n0} – максимальное нормальное относительное смещение, совпадающее с вертикальным смещением центра составного цилиндра.

При стационарном качении составного цилиндра в области контакта выделяются зоны сцепления (сц) и проскальзывания (ск), показанные на рисунке 1. В зоне сцепления должно выполняться условие [9]

$$\frac{du_{\tau}^{\text{сц}}}{dx} = \text{const}.$$

Следовательно, для сдвигового относительного смещения можно записать

$$u_{\tau}^{\text{сц}} = u_{\tau 0} + \gamma x, \quad (10)$$

где $u_{\tau 0}$ – предварительное смещение; γ – коэффициент проскальзывания.

Нормальное и сдвиговое контактные напряжения в зоне сцепления можно представить как функции четырех переменных:

$$\begin{aligned} p^{\text{сц}y}(u_{n0}, u_{\tau 0}, \gamma, x) &= p^y(u_{n0} - x^2 / 2R, u_{\tau 0} + \gamma x), \\ \tau^{\text{сц}y}(u_{n0}, u_{\tau 0}, \gamma, x) &= \tau^y(u_{n0} - x^2 / 2R, u_{\tau 0} + \gamma x). \end{aligned} \quad (11)$$

В зоне проскальзывания нормальное и сдвиговое контактные напряжения связаны соотношением $\tau^{\text{ск}y} = -fp^{\text{ск}y}$.

Данное равенство будем рассматривать как нелинейное уравнение для определения сдвигового относительного смещения в зоне проскальзывания, которое будет зависеть от смещения u_{n0} и координаты x :

$$\tau^y(u_{n0} - x^2 / 2R, u_{\tau}^{\text{ск}}) = -fp^y(u_{n0} - x^2 / 2R, u_{\tau}^{\text{ск}}). \quad (12)$$

Следовательно, для зоны проскальзывания контактные напряжения являются функциями двух переменных:

$$\begin{aligned} p^{\text{ск}y}(u_{n0}, u_{\tau 0}, \gamma, x) &= p^y(u_{n0} - x^2 / 2R, u_{\tau}^{\text{ск}}(u_{n0}, x)); \\ \tau^{\text{ск}y}(u_{n0}, u_{\tau 0}, \gamma, x) &= \tau^y(u_{n0} - x^2 / 2R, u_{\tau}^{\text{ск}}(u_{n0}, x)). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь функция $u_{\tau}^{\text{ск}}(u_{n0}, x)$ определяется путем решения уравнения (12).

Для учета вязкости материала обода при определении контактных напряжений будем использовать соотношение (6), где при условии установившегося качения интегрирование по времени можно заменить интегрированием по координате [9]:

$$d\zeta = \frac{-d\xi}{v}, \quad t - \zeta = \frac{\xi - x}{v}. \quad (14)$$

Здесь ζ, ξ – переменные интегрирования по времени и координате соответственно; v – скорость движения центра масс составного цилиндра.

С учетом замены (14), полагая, что моменту начала нагружения ($t = 0$) внешней поверхности обода соответствует точка C , для контактных напряжений в зонах сцепления и проскальзывания можно записать

$$\begin{aligned}
p^{\text{сш}}(x) &= p^{\text{сш}}(x) - \int_x^{x_C} p^{\text{сш}}(\xi) R \left(\frac{\xi - x}{v} \right) \frac{d\xi}{v}, \\
\tau^{\text{сш}}(x) &= \tau^{\text{сш}}(x) - \int_x^{x_C} \tau^{\text{сш}}(\xi) R \left(\frac{\xi - x}{v} \right) \frac{d\xi}{v}, \\
p^{\text{ск}}(x) &= p^{\text{ск}}(x) - \int_x^{x_C} p^{\text{ск}}(\xi) R \left(\frac{\xi - x}{v} \right) \frac{d\xi}{v}, \\
\tau^{\text{ск}}(x) &= \tau^{\text{ск}}(x) - \int_x^{x_C} \tau^{\text{ск}}(\xi) R \left(\frac{\xi - x}{v} \right) \frac{d\xi}{v}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Для решения контактной задачи требуется определить максимальное нормальное смещение u_{n0} , предварительное смещение $u_{\tau 0}$ и коэффициент проскальзывания γ . Также необходимо знать координаты точек A , B и C (см. рисунок 1), которые определяют границы зон проскальзывания и сцепления. Кроме того, надо найти значение силы T , требуемое для обеспечения установившегося качения при заданной скорости движения центра составного цилиндра v . Для определения этих неизвестных используем следующие условия.

1 На внешних границах области контакта (точки A и C) нормальные и сдвиговые контактные напряжения отсутствуют:

$$p^{\text{сш}}(x_C) = 0; \quad \tau^{\text{сш}}(x_C) = 0; \quad p^{\text{ск}}(x_A) = 0. \tag{16}$$

2 В рамках модели винклера основания напряжения p и τ являются однозначными функциями смещений u_n и u_τ . Следовательно, для обеспечения неразрывности смещений и напряжений на границе раздела зон сцепления и проскальзывания достаточно обеспечить неразрывность сдвигового смещения

$$u_\tau^{\text{ск}}(x_B) = u_{\tau 0} + \gamma x_B. \tag{17}$$

3 При стационарном качении выполняются условия равновесия составного цилиндра в проекциях на оси x и z

$$\begin{aligned}
\int_{x_A}^{x_B} p^{\text{ск}}(x) dx + \int_{x_B}^{x_C} p^{\text{сш}}(x) dx &= \frac{P}{L}; \quad \int_{x_A}^{x_B} \tau^{\text{ск}}(x) dx + \int_{x_B}^{x_C} \tau^{\text{сш}}(x) dx = -\frac{T}{L}; \\
\int_{x_A}^{x_B} p^{\text{ск}}(x) x dx + \int_{x_B}^{x_C} p^{\text{сш}}(x) x dx &= \frac{TR}{L}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Таким образом, получена система семи уравнений для определения u_{n0} , $u_{\tau 0}$, γ , x_A , x_B , x_C , T .

Пример реализации математической модели. Рассмотрим качение стального ролика с полиуретановым ободом. Геометрические параметры ролика и характеристики материала обода выберем те же, что и в работе [9]: $L = 0,08$ м; $R = 0,125$ м; $P = 562$ кН; $v = 14,7$ м/с; $f = 0,4$; $E = 1,123$ МПа; $\nu = 0,4$. Ядро релаксации выбираем в виде экспоненциальной функции

$$R(t) = \frac{\delta}{\lambda} \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right),$$

где $\delta = 0,8$; $\lambda = 1$ мс.

На рисунках 2 и 3 представлены расчетные эпюры нормального и сдвигового контактных напряжений. Можно отметить, что при учете больших деформаций полимерного обода ширина области контакта ролика с опорной поверхностью значительно меньше, чем при решении задачи в линейной постановке. Для гиперупругого материала обода максимальное значение нормального контактного напряжения существенно выше, а максимум сдвигового контактного напряжения несколько ниже (по модулю), чем для линейно вязкоупругого материала.

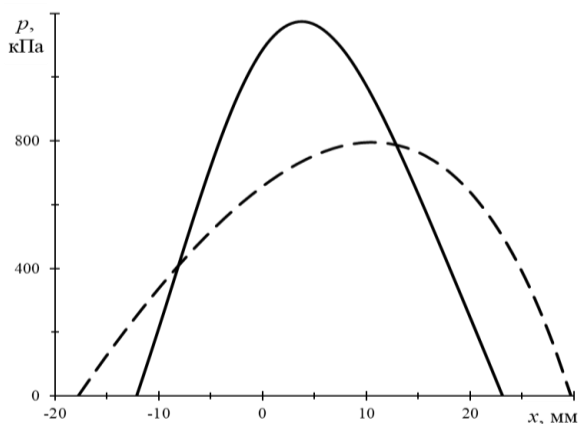


Рисунок 2 – Эпюры нормальных контактных напряжений: сплошные кривые – при использовании неогуковского потенциала; пунктирные – в линейно упругой постановке

Наибольший практический интерес представляет прогнозирование значения силы T , обеспечивающей установившееся качение при заданной скорости v . Эта сила представляет собой силу сопротивления движению ролика. Для оценки износа опорной поверхности требуется оценить максимальное значение интенсивности контактных напряжений [12]

$$s_u = \sqrt{p^2 + 3\tau^2}.$$

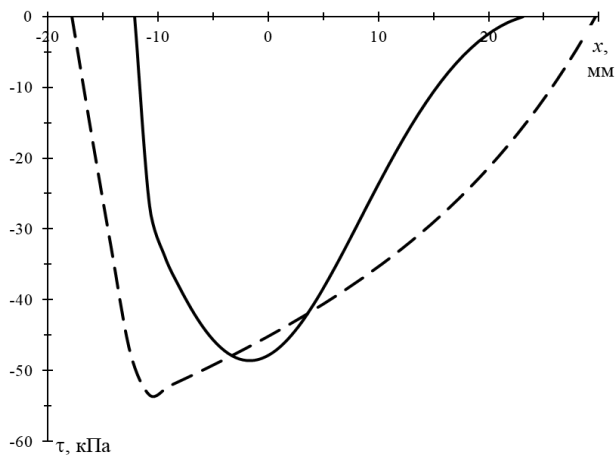


Рисунок 3 – Эпюры сдвиговых контактных напряжений:
сплошные кривые – при использовании неогукковского потенциала;
пунктирные – в линейно упругой постановке

Зависимости силы T от скорости v (рисунок 4) характеризуются наличием максимума в области значений v между 5 и 10 м/с. При этом расчетное значение силы сопротивления качению при учете больших деформаций обода будет ниже, чем для линейно упругого материала.

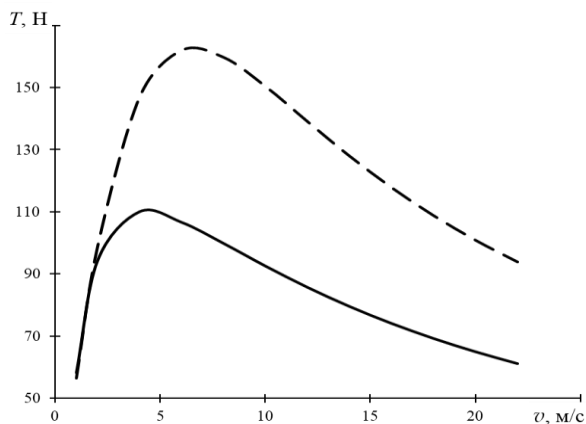


Рисунок 4 – Зависимости сдвиговой силы от скорости центра составного цилиндра:
сплошные кривые – при использовании неогукковского потенциала;
пунктирные – в линейно упругой постановке

Также для гиперупругого материала обода несколько снижается значение скорости v^{\max} , соответствующее максимуму силы T . Максимальное значение интенсивности σ_u^{\max} в диапазоне значений скоростей выше v^{\max} практически не зависит от значения скорости (рисунок 5).

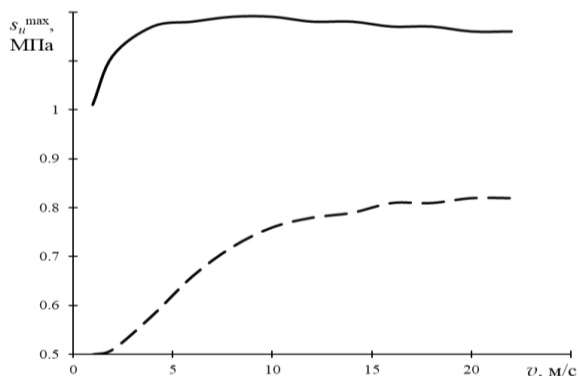


Рисунок 5 – Зависимости максимального значения интенсивности контактных напряжений от скорости центра составного цилиндра:
сплошные кривые – при использовании неогукковского потенциала;
пунктирные – в линейно упругой постановке

На рисунках 6 и 7 представлены расчетные зависимости величин T и σ_u^{\max} от толщины деформируемой обкладки. С увеличением h значение силы сопротивления качению практически линейно возрастает, а максимальная интенсивность контактных напряжений убывает.

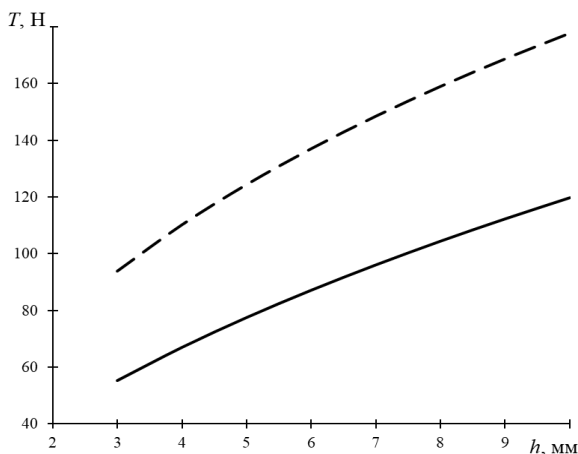


Рисунок 6 – Зависимости сдвиговой силы от толщины деформируемого обода:
сплошные кривые – при использовании неогукковского потенциала;
пунктирные – в линейно упругой постановке

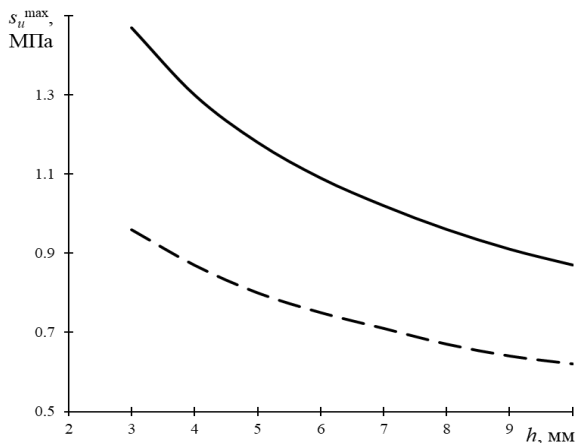


Рисунок 7 – Зависимости максимального значения интенсивности контактных напряжений от толщины деформируемого обода:
 сплошные кривые – при использовании неогукковского потенциала;
 пунктирные – в линейно упругой постановке

При использовании в качестве материала обода полимера с более выраженными реологическими свойствами (большим значением параметра ядра релаксации δ) значение силы сопротивления качению возрастает, а интенсивность контактных напряжений практически не изменяется (рисунки 8, 9).

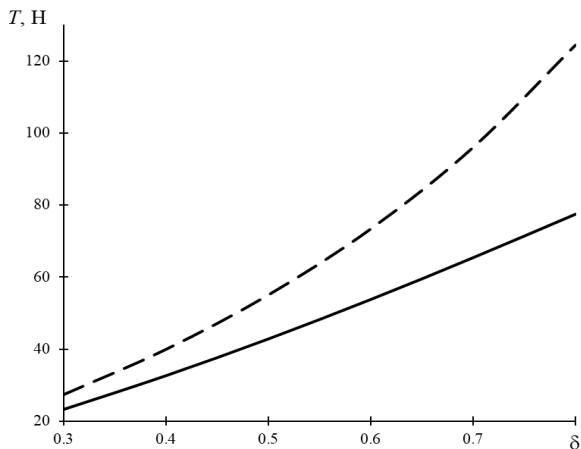


Рисунок 8 – Зависимости сдвиговой силы от безразмерной константы ядра релаксации:
 сплошные кривые – при использовании неогукковского потенциала;
 пунктирные – в линейно упругой постановке

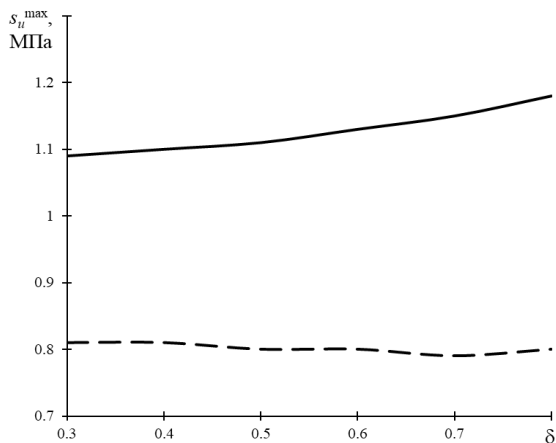


Рисунок 9 – Зависимости максимального значения интенсивности контактных напряжений от безразмерной константы ядра релаксации материала деформируемого обода: сплошные кривые – при использовании неогукковского потенциала; пунктирные – в линейно упругой постановке

Заключение. Показана возможность учета больших деформаций при описании установившегося качения жесткого колеса, имеющего тонкий вязкоупругий обод. В результате использования разработанной расчетной методики установлено, что пренебрежение гиперупругостью материала обода приводит к существенному завышению значений силы сопротивления качению и к заниженным оценкам максимальной интенсивности контактных напряжений. Характер зависимостей этих параметров контакта от скорости качения, толщины и вязкоупругих характеристик материала обода при учете больших деформаций не изменяется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Александров, В. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками / В. М. Александров, С. М. Мхитарян. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 285 с.
- 2 Fabrikant, V. I. Solution of contact problems for a transversely isotropic elastic layer bounded to an elastic half-space / V. I. Fabrikant // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. – 2009. – Vol. 223, is. 11. – P. 2487–2499.
- 3 Можаровский, В. В. Прикладная механика слоистых тел из композитов: Плоские контактные задачи / В. В. Можаровский, В. Е. Старжинский. – Минск : Наука и техника, 1988. – 245 с.
- 4 Bahrami, M. R. ANSYS Tutorial: An Introduction to Elasticity and Contact Problems in Mechanical APDL 15.0 / M. R. Bahrami. – St. Petersburg : Peter the Great St. Petersburg Polytechnic university, 2018. – 69 p.

5 Numerical analysis of temperature distribution in sliding contacts of pin on disc model / A. K. Singh, V. Ranjan, R. Tyagi, B. N. Singh // *Vibroengineering Procedia*. – 2019. – Vol. 29. – P. 274–278.

6 **Кравчук, А. С.** Прикладные контактные задачи для обобщенной стерневой модели покрытия / А. С. Кравчук, А. И. Кравчук. – СПб. : Научное издание, 2019. – 324 с.

7 **Горячева, И. Г.** Контактное взаимодействие упругих тел с тонкими вязкоупругими покрытиями в условиях трения качения и скольжения / И. Г. Горячева, А. П. Горячев, Ф. Садеги // *Прикладная математика и механика*. – 1995. – Т. 59, № 4. – С. 634–641.

8 **Коднянко, Е. В.** Использование модели Винклера для анализа качения колеса с деформируемым ободом / Е. В. Коднянко, Д. А. Черноус // *Механика. Исследования и инновации*. – 2022. – Вып. 15. – С. 92–99.

9 **Коднянко, Е. В.** Асимптотическое решение контактной задачи о стационарном качении жесткого цилиндра с вязкоупругим ободом / Е. В. Коднянко, С. В. Шилько, Д. А. Черноус // *Трение и износ*. – 2024. – Т. 45, № 5. – С. 375–383.

10 **Christoforou, A. P.** On the contact of a spherical indenter and a thin composite laminate / A. P. Christoforou // *Composite Structures*. – 1993. – Vol. 26, is. 1–2. – P. 77–82

11 Computational modelling based wear resistance analysis of thick composite coatings / K. Holmberg, A. Laukkanen, A. Ghabchi [et al.] // *Tribology International*. – 2014. – Vol. 72. – P. 13–30.

12 **Солдатенков, И. А.** Нелинейная износостойкая задача для основания Винклера (постоянная область контакта) / И. А. Солдатенков // *Трение и износ*. – 2006. – Т. 27, № 3. – С. 245–256.

13 **Райт, П.** Полиуретановые эластомеры / П. Райт, А. Камминг. – М. : Химия, 1973. – 304 с.

14 **Лурье, А. И.** Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1980. – 512 с.

15 **Шилько, С. В.** Особенности деформирования и описание упругих свойств наполненных эластомеров при растяжении / С. В. Шилько, Д. А. Черноус, С. Б. Анфиногенов // *Каучук и резина*. – 2008. – № 4. – С. 34–38.

16 Методы прикладной вязкоупругости / А. А. Адамов, В. П. Матвеев, Н. А. Труфанов, И. Н. Шардаков. – Екатеринбург : УрО РАН, 2003. – 246 с.

E. V. KADNIANKA

JSC "Soligorsk Institute of Resources Saving Problems with Pilot Production", Soligorsk, Belarus

STEADY-STATE ROLLING ANALYSIS FOR A RIGID WHEEL WITH A HYPERELASTIC RIM

There is developed a method for calculating the parameters of the contact interaction of a rigid cylinder with a thin hyperelastic rim with a supporting surface at a steady-state rolling of the cylinder. The technique is based on the use of a simplified Winkler foundation model. The results the developed technique application are compared with the calculated estimates obtained for the rolling of the cylinder with a linearly viscoelastic rim.

Keywords: steady rolling, contact stresses, Winkler foundation model, elastic potential.

Получено 23.10.2025