

УДК 534.131:62-419

*Д. А. БУДНИКОВА**Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь***КОЛЕБАНИЯ ПЯТИСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ
ПОД ДЕЙСТВИЕМ МГНОВЕННО ПРИЛОЖЕННОЙ
РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ**

Рассматривается задача о колебаниях пятислойного симметричного по толщине стержня, который включает три несущих слоя (центральный и два внешних) и два относительно толстых легких заполнителя. Получено аналитическое решение для случая мгновенного приложения равномерно распределенной нагрузки. Использован метод разложения искомым перемещений в ряд по построенной системе собственных ортонормированных функций. Приведены графики изменения прогиба и относительного сдвига по длине стержня для различных материалов слоев.

Ключевые слова: пятислойный симметричный стержень, равномерно распределенная нагрузка, колебания, прогиб, относительный сдвиг.

Введение. Разработке методов расчета слоистых конструкций при различных видах и типах нагрузок посвящено значительное число публикаций. В монографии [1] систематически исследуется деформирование трехслойных конструкций при квазистатических и динамических нагрузках. Особое внимание уделяется учету нелинейных и реономных свойств материалов слоев. Термомеханическому и радиационно-силовому нагружению трехслойных стержней и пластин посвящены монографии [2, 3]. Циклическая повреждаемость в процессе эксплуатации трехслойных конструкций, исследована в [4].

В статье [5] рассмотрено квазистатическое деформирование упругой круговой пятислойной пластины под действием локальной кольцевой нагрузки. Собственные колебания пятислойной круговой пластины при различных закреплениях контура исследованы в [6, 7].

Колебания сэндвич-стержня с легким заполнителем изучены в статье [8]. Анализ свободных колебаний пятислойных симметричных по толщине стержней представлен в работах [9–13]. Определены собственные частоты и формы колебаний, построены системы собственных ортонормированных функций. Исследование вынужденных колебаний пятислойных стержней, судя по публикациям, до настоящего времени не проводилось.

Представленная работа посвящена анализу динамического поведения пятислойного стержня при действии мгновенно приложенной равномерно распределенной нагрузки.

Постановка задачи. Дифференциальные уравнения, описывающие изменение прогиба w и относительного сдвига ψ при вынужденных колебаниях симметричного по толщине пятислойного стержня (рисунок 1), получаются из соответствующих уравнений свободных колебаний [9–13] добавлением распределенной нагрузки q_0 :

$$\begin{aligned}
 a_1 \Psi_{,xx} - a_2 w_{,xxxx} &= 0; \\
 a_2 \Psi_{,xxx} - a_4 w_{,xxxx} - M_0 \ddot{w} &= -q_0,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где коэффициенты

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 2c^2 \left(\frac{1}{3} K_2^+ c + K_3^+ h_2 \right); \quad a_2 = K_2^+ h_2 c (h_2 + 2h_1 + 2c) + \frac{1}{3} K_3^+ c^2 (3h + 2c); \\
 a_4 &= \frac{2}{3} \left[K_1^+ h_1^3 + K_2^+ h_2 (h_2^2 + 3(h_2 + h_1 + c)(h_1 + c) + K_3^+ c (c^2 + 3h_1 c + 3h_1^2)) \right]; \\
 K_k + \frac{4}{3} G_k &\equiv K_k^+;
 \end{aligned}$$

$2h_1$ – толщина центрального слоя; h_2 – толщина внешних слоев; c – толщина заполнителей, G_k, K_k – параметры упругости материалов слоев.

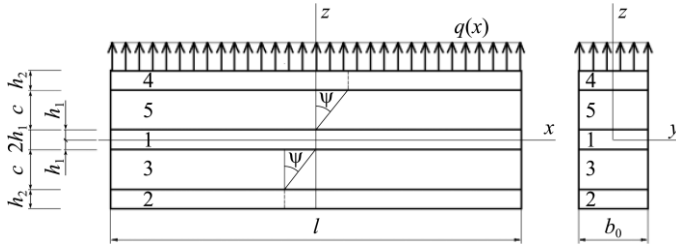


Рисунок 1 – Расчетная схема пятислойного стержня

Для замыкания начально-краевой задачи необходимо к уравнениям движения (1) добавить начальные и граничные условия.

В качестве начальных принимаем однородные условия

$$w(x, 0) = 0; \quad \dot{w}(x, 0) = 0. \tag{2}$$

При заделке торцов стержня $x = 0; l$ должны выполняться требования

$$\Psi(0, t) = w(0, t) = w_{,x}(0, t) = 0; \quad \Psi(l, t) = w(l, t) = w_{,x}(l, t) = 0. \tag{3}$$

В случае шарнирного опирания граничные условия следующие:

$$\Psi(0, t) = w(0, t) = M(0, t) = 0; \quad \Psi(l, t) = w(l, t) = M(l, t) = 0. \tag{4}$$

После преобразований из системы (1) выделено отдельное уравнение для прогиба, а через его производную выражен относительный сдвиг:

$$\begin{aligned}
 w_{,xxxx} - \frac{a_1 M_0}{a_2^2 - a_1 a_4} \ddot{w} &= -\frac{a_1}{a_2^2 - a_1 a_4} q; \\
 \Psi &= \frac{a_2}{a_1} w_{,x} + C_5 x + C_6.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Далее прогиб, относительный сдвиг и нагрузку раскладываем в ряды по системе собственных функций v_n , φ_n , полученных для граничных условий (3), (4) в [11]:

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t), \quad \psi(x, t) = \frac{a_2}{a_1} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t), \quad q(x, t) = M_0 \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t), \quad (6)$$

где $T_n(t)$ – искомая функция времени.

$$\text{Здесь} \quad v_n = \frac{1}{d_n} (\operatorname{sh}(\beta_n x) - \sin(\beta_n x) - S_n (\operatorname{ch}(\beta_n x) - \cos(\beta_n x)));$$

$$\varphi_n = \frac{\beta_n}{d_n} (\operatorname{ch}(\beta_n x) - \cos(\beta_n x) - S_n (\operatorname{sh}(\beta_n x) + \sin(\beta_n x))); \quad S_n = \frac{\operatorname{sh}(\beta_n l) - \sin(\beta_n l)}{\operatorname{ch}(\beta_n l) - \cos(\beta_n l)};$$

d_n – ортонормирующий множитель; β_n – собственные числа, которые связаны с частотами колебаний ω_n формулой $\beta_n^4 = a_1 M_0 \omega_n^2 / (a_4 a_1 - a_2^2)$.

Выражения для $q_n(t)$ получим, умножив третье из соотношений в (6) на v_n и выполняя интегрирование по длине стержня:

$$\int_0^l q(x, t) v_n dx = M_0 \int_0^l \sum_{m=0}^{\infty} v_m q_m(t) v_n dx = M_0 \sum_{m=0}^{\infty} q_m(t) \int_0^l v_m v_n dx.$$

В силу ортонормированности системы собственных функций

$$\int_0^l v_m v_n dx = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

имеем

$$q_n(t) = \frac{1}{M_0} \int_0^l q(x, t) v_n dx. \quad (7)$$

Подстановка в уравнение (5) выражений для прогиба и нагрузки (6) дает

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n v_{,xxxx} T_n(t) - \frac{a_1 M_0}{a_2^2 - a_1 a_4} \sum_{n=0}^{\infty} v_n \ddot{T}_n(t) = -\frac{a_1 M_0}{a_2^2 - a_1 a_4} \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t). \quad (8)$$

Учитывая уравнение собственных колебаний $v_{n,xxxx} = \beta_n^4 v_n$, получаем

$$-\frac{a_1 M_0}{a_2^2 - a_1 a_4} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n^2 v_n T_n(t) - \frac{a_1 M_0}{a_2^2 - a_1 a_4} \sum_{n=0}^{\infty} v_n \ddot{T}_n(t) = -\frac{a_1 M_0}{a_2^2 - a_1 a_4} \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t),$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n (\omega_n^2 T_n(t) + \ddot{T}_n(t) - q_n(t)) = 0.$$

Чтобы полученное уравнение выполнялось в любой момент времени, функция времени должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\ddot{T}_n + \omega_n^2 T_n = q_n.$$

Его общее решение [1] при однородных начальных условиях –

$$\ddot{T}_n + T_n = \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \sin(\omega_n(t - \tau)) q_n(\tau) d\tau. \quad (9)$$

Следует отметить, что наличие интегрального слагаемого в (9) не влияет на значения коэффициентов A_n, B_n , т. к. оно при $t = 0$ обращается в ноль.

Решение для случая равномерно распределенной нагрузки. Предположим, что нагрузка $q_0 = \text{const}$ распределена по всей длине стержня. Подстановка в формулу (7) дает параметры разложения в ряд по системе собственных функций:

$$q_n = -\frac{q_0}{M_0 d_n \beta_n} \int_0^l (\text{sh}(\beta_n x) - \sin(\beta_n x) - S_n (\text{ch}(\beta_n x) - \cos(\beta_n x))) dx.$$

Отсюда

$$q_n = \frac{q_0}{M_0 d_n \beta_n} (\text{ch}(\beta_n b) + \cos(\beta_n b) - S_n (\text{sh}(\beta_n b) - \sin(\beta_n b)) - 2). \quad (10)$$

Подставив коэффициенты (10) в (9), получим функцию времени при равномерно распределенной нагрузке:

$$T_n(t) = \frac{q_n}{\omega_n^2} (1 - \cos(\omega_n t)).$$

Численные результаты. Собственные частоты колебаний ω_n и собственные числа β_n найдены ранее в [12] для случая заземленного стержня единичной длины, в котором $h_1 = h_2 = 0,01l$; $c = 0,1l$.

На рисунке 2 представлены графики изменения прогиба (a) и сдвига (b) по длине стержня, соответствующие равномерно распределенной нагрузке $q_0 = 1,5$ МПа для трех комбинаций материалов пакетов слоев. Графики, полученные при замене внешних несущих слоев на титановый сплав, визуально не отличаются от кривых для базового пакета. Использование в качестве заполнителей пенополиуретана увеличивает прогиб на 12 %, сдвиг – на 11 %.

Рисунок 3 иллюстрирует изменения прогиба (a) и сдвига (b) во времени при рассматриваемой нагрузке для базового пакета 1 и при использовании заполнителей из пенополиуретана 2. Применение более легкого заполнителя ведет к увеличению амплитуды колебаний до 10 % и росту частоты колебаний примерно в 2 раза.

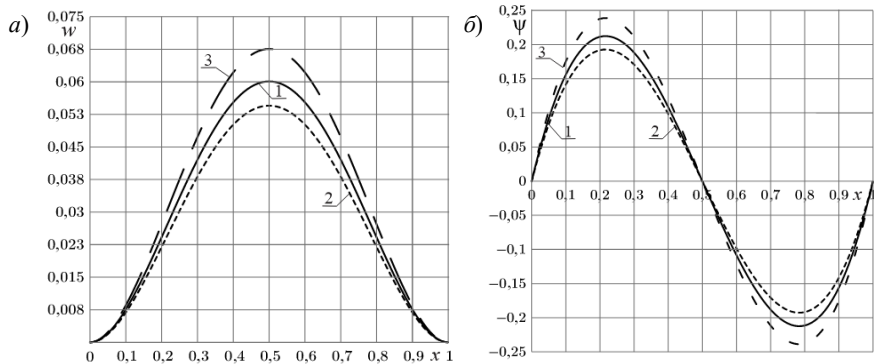


Рисунок 2 – Зависимость прогиба w (а) и сдвига ψ (б) вдоль оси стержня:
 1 – Д16Т – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – Д16Т;
 2 – титан – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – титан;
 3 – Д16Т – пенополиуретан – Д16-Т – пенополиуретан – Д16Т

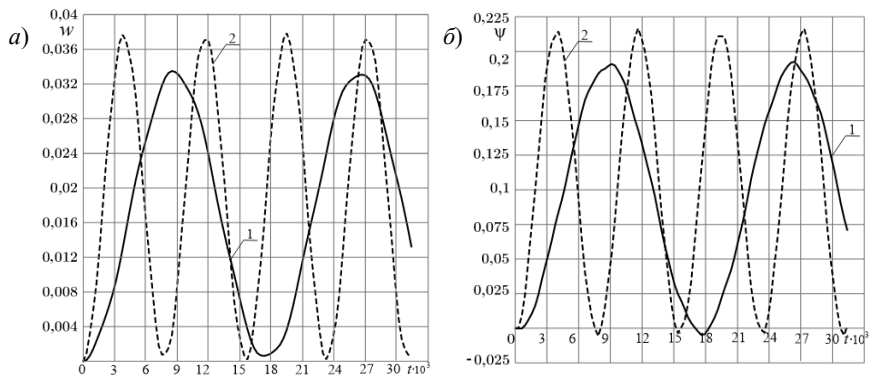


Рисунок 3 – Зависимость прогиба w (а) и сдвига ψ (б) от времени
 1 – Д16Т – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – Д16Т;
 2 – Д16Т – пенополиуретан – Д16-Т – пенополиуретан – Д16Т

Выводы. Полученные в работе выражения позволяют численно исследовать перемещения и частоты колебаний пятислойного симметричного по толщине стержня при свободных и вынужденных колебаниях, что может быть использовано в расчетной практике предприятий машиностроительно-го и строительного комплексов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : Физматлит, 2005. – 576 с.

2 Deformation of Three-layer Structural Elements in Thermal Radiation Fields / E. Starovoirov, M. Zhuravkov, D. Leonenko, Y. Lyu. – Singapore : Springer, 2024. – 386 p.

3 Деформирование трехслойных пластин при термосиловых нагрузках / Э. И. Старовойтов, Ю. В. Шафиева, А. В. Нестерович, А. Г. Козел. – Гомель : БелГУТ, 2024. – 395 с.

4 **Абдусаттаров, А.** Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / А. Абдусаттаров, Э. И. Старовойтов, Н. Б. Рузиева. – Ташкент : Ideal Press, 2023. – 381 с.

5 **Салицкий, В. С.** Круглая пятислойная пластина под действием осесимметричной кольцевой нагрузки / В. С. Салицкий // Механика. Исследования и инновации. – 2024. – Вып. 17. – С. 114–119.

6 **Лачугина, Е. А.** Собственные частоты колебаний круговой пятислойной несимметричной по толщине пластины / Е. А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2024. – Вып. 17. – С. 92–99.

7 **Лачугина, Е. А.** Собственные колебания пятислойной круговой пластины при различных закреплениях контура / Е. А. Лачугина // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 25–30.

8 **Леоненко, Д. В.** Свободные колебания сэндвич-стержня с легким наполнителем / Д. В. Леоненко // Механика. Исследования и инновации. – 2024. – Вып. 17. – С. 100–105.

9 **Будникова, Д. А.** Анализ собственных колебаний пятислойного стержня / Д. А. Будникова // Механика. Исследования и инновации. – 2024. – Вып. 17. – С. 33–39.

10 **Старовойтов, Э. И.** Собственные колебания пятислойного стержня, вызванные начальным прогибом / Э. И. Старовойтов, Д. А. Будникова // Механика машин, механизмов и материалов. – 2025. – № 2 (71). – С. 70–77.

11 **Старовойтов, Э. И.** Собственные колебания симметричного по толщине пятислойного стержня / Э. И. Старовойтов, Д. А. Будникова // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2025. – Т. 31, № 1. – С. 25–39.

12 **Будникова, Д. А.** Собственные частоты колебаний пятислойного стержня / Д. А. Будникова // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 11–15.

13 **Будникова, Д. А.** Влияние условий закрепления пятислойного стержня на частоты собственных колебаний / Д. А. Будникова // Актуальные вопросы машиноведения. – 2025. – Т. 14. – С. 66–69.

D. A. BUDNIKOVA

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

OSCILLATIONS OF A FIVE-LAYER ROD UNDER AN INSTANTLY APPLIED UNIFORMLY DISTRIBUTED LOAD

This paper considers the vibrations of a five-layer rod symmetrical by thickness and consisting of three load-bearing layers (a central layer and two outer layers) and two relatively thick lightweight cores. An analytical solution is obtained for the case of instantaneous application of a uniformly distributed load. A method for expanding the sought-for displacements into a series of orthonormal eigenfunctions is used. Graphs of the change in deflection and relative shear along the rod length are presented for the different layer materials.

Keywords: five-layer symmetrical rod, uniformly distributed load, vibrations, deflection, relative shear.

Получено 13.10.2025