МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра высшей математики

Е. А. ЗАДОРОЖНЮК, Е. Е. ГРИБОВСКАЯ,
И. П. ШАБАЛИНА

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Пособие

Гомель 2026

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра высшей математики

Е. А. ЗАДОРОЖНЮК, Е. Е. ГРИБОВСКАЯ,
И. П. ШАБАЛИНА

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
по образованию в области транспорта и транспортной деятельности
для студентов специальности 6-05-0715-08
«Подвижной состав железнодорожного транспорта»
в качестве пособия по учебной дисциплине «Математика»*

Гомель 2026

УДК 519.644.3(075.8)
ББК 22.161.1
З-15

Р е ц е н з е н т ы : кафедра фундаментальной и прикладной математики (зав. кафедрой – канд. техн. наук, доцент *Л. Н. Марченко*) ГГУ им. Ф. Скорины;
зам. директора по научной работе ИММС НАН Беларуси канд. физ.-мат. наук, доцент *В. В. Подгорная*

Задорожнюк, Е. А.

З-15 Неопределенный интеграл : пособие / Е. А. Задорожнюк, Е. Е. Грибовская, И. П. Шабалина ; М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2026. – 127 с.

ISBN 978-985-891-246-8

Рассмотрены основные типы неопределенных интегралов и методы их вычисления. Излагаемый теоретический материал сопровождается большим количеством примеров с подробными пояснениями. Приведены самостоятельные работы по всем темам, контрольная работа и тест.

Предназначено для студентов технических специальностей.

УДК 519.644.3(075.8)
ББК 22.161.1

ISBN 978-985-891-246-8

ВВЕДЕНИЕ

Методика изложения дисциплины «Математика» состоит в изучении теоретического материала, полученного студентами на лекции, и дальнейшего его закрепления и применения для решения задач на практических занятиях.

Практические занятия проводятся в двух формах. Групповая форма предполагает обсуждение и коллективное решение задач. Практические занятия в индивидуальной форме проводятся в виде самостоятельных и тестовых работ студентов.

Целью настоящего пособия является выработка у студентов прочных навыков нахождения неопределённых интегралов и использования их в дальнейшем при решении различных прикладных задач. Пособие состоит из двух разделов. В первом рассмотрены определение, свойства и методы вычисления неопределённых интегралов. Каждая тема раздела содержит необходимый справочный материал, большое количество типовых задач с подробными объяснениями. В конце каждой темы приведены задачи для самостоятельного решения в аудитории и дома, ответы на которые даны в конце пособия. Второй раздел посвящён инструментам текущего контроля знаний по теме «Неопределенный интеграл». По каждой теме имеется большое количество вариантов контрольных и самостоятельных работ, содержатся задания в виде тестов. Задания можно использовать как для текущего контроля знаний во время аудиторных занятий, так и для индивидуальных домашних заданий.

1 ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1 Определения первообразной и неопределенного интеграла

Функция называется *первообразной* для функции $f(x)$, если $F'(x)=f\left(x\right)$ или $dF(x)=f\left(x\right)dx.$ Например, если $f\left(x\right)=2x,$ то первообразная $F(x)=x^2$.

Всякая непрерывная функция $f(x)$ имеет бесконечное множество различных первообразных функций, которые отличаются друг от друга на постоянное слагаемое. Все они содержатся в выражении $F(x)+C,$ где C – произвольная постоянная.

Совокупность всех первообразных называется *неопределенным интегралом* функции $f(x)$:

$$\int f\left(x\right)dx = F\left(x\right) + C, \tag{1.1}$$

где $f(x)$ – подынтегральная функция; $f\left(x\right)dx$ – подынтегральное выражение.

Отыскание неопределенного интеграла некоторой функции называется *интегрированием*. Интегрирование представляет собой операцию, обратную дифференцированию. Для того чтобы проверить, правильно ли выполнено интегрирование, достаточно продифференцировать результат и получить при этом подынтегральную функцию. Например, $\int e^{-2x}dx = -\dfrac{1}{2}e^{-2x} + C,$ так как $\left(-\dfrac{1}{2}e^{-2x} + C\right)' = e^{-2x}.$

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f\left(x\right)dx\right)' = f\left(x\right).$$

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\int f\left(x\right)dx = f\left(x\right)dx.$$

3. Интеграл от дифференциала функции равен этой функции, сложенной с произвольной постоянной:

$$\int df\left(x\right) = f\left(x\right) + C.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$$

5. Интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен такой же алгебраической сумме интегралов от слагаемых:

$$\int\left(f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)\right)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx.$$

6. Если $\int f(x)\,dx = F(x)+C,$ то $\int f(u)\,du = F(u)+C,$ где $u=\varphi(x)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Таблица основных интегралов

($a \neq 0$ – постоянная, u – независимая переменная или любая дифференцируемая функция от независимой переменной)

1. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}+C,\ (n \neq -1).$

1а. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}+C.$

2. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u|+C.$

3. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a}+C,\ (a>0).$

3а. $\int e^u du = e^u + C.$

4. $\int \sin u\,du = -\cos u + C.$

5. $\int \cos u\,du = \sin u + C.$

6. $\int \mathrm{tg}\,u\,du = -\ln|\cos u| + C.$

7. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln|\sin u| + C.$

8. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$

9. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$

10. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C.$

11. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

12. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C.$

13. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C.$

14. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C.$

14а. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C.$

15. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + b}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + b}\right| + C.$

В дальнейшем, ссылаясь на эти интегралы, для сокращения записи будем писать Т1–Т15.

1.2 Непосредственное интегрирование

Непосредственным интегрированием будем называть интегрирование с помощью свойств неопределенного интеграла, тождественных преобразований подынтегральной функции и использования таблицы основных интегралов. Во всех последующих примерах требуется найти неопределенный интеграл:

1. $\int\left(x^4-4x^3+x^2-4x+5\right)dx.$

Применив свойства 5 и 4 и формулу Т1, получим

$$\int x^4dx-4\int x^3dx+\int x^2dx-4\int xdx+5\int dx=\frac{1}{5}x^5-x^4+\frac{1}{3}x^3-2x^2+5x+C.$$

Заметим, что произвольные постоянные, получающиеся при интегрировании каждого слагаемого, объединены в одну произвольную постоянную C.

2. $\int\frac{4-5x\sqrt[3]{x}+3\sqrt{x}+x^2}{\sqrt{x^3}}dx.$

Перейдем к дробным показателям степеней и разделим почленно числитель на знаменатель. В результате подынтегральная функция будет представлена в виде суммы слагаемых, каждое из которых проинтегрируем:

$$\int\frac{4-5x\sqrt[3]{x}+3\sqrt{x}+x^2}{\sqrt{x^3}}dx=\int\left(4x^{-\frac{3}{2}}-5x^{-\frac{1}{6}}-3x^{-1}+x^{\frac{1}{2}}\right)dx=$$

$$=4\int x^{-\frac{3}{2}}dx-5\int x^{-\frac{1}{6}}dx-3\int x^{-1}dx+\int x^{\frac{1}{2}}dx=4\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}-5\frac{x^{-\frac{1}{6}+1}}{-\frac{1}{6}+1}-3\ln|x|+\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=$$

$$=-8x^{-\frac{1}{2}}-6x^{\frac{5}{6}}-3\ln|x|+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{8}{\sqrt{x}}-6\sqrt[6]{x^5}-3\ln|x|+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C.$$

3. $\int\left(2+5^x\right)^2dx=\int\left(4+4\cdot5^x+25^x\right)dx=4x+4\frac{5^x}{\ln5}+\frac{25^x}{\ln25}+C.$

Здесь использовались свойства 4, 5 и формулы Т1 и Т3.

4. $\int\frac{x^2}{4+x^2}dx.$

Прибавляя и вычитая в числителе подынтегральной функции число 4, получим

$$\int \frac{x^2+4-4}{4+x^2}dx = \int\left(1-\frac{4}{x^2+4}\right)dx = \int dx - 4\int\frac{dx}{x^2+4} = x-4\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

5. $\int \frac{dx}{x^4-x^2} = \int \frac{1}{x^2\left(x^2-1\right)}dx.$

Прибавляя и вычитая в числителе подынтегральной функции x^2, получим

$$\int\frac{x^2-x^2+1}{x^2\left(x^2-1\right)}dx=\int\frac{x^2dx}{x^2\left(x^2-1\right)}-\int\frac{x^2-1}{x^2\left(x^2-1\right)}dx=\int\frac{dx}{x^2-1}-\int\frac{dx}{x^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{1}{x}+C.$$

Здесь были использованы формулы Т14 и Т1.

6. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}.$

Заменим единицу в числителе подынтегральной функции выражением $\sin^2 x+\cos^2 x$ и применим формулы Т8 и Т9:

$$\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C.$$

Свойство 6 позволяет значительно расширить таблицу основных интегралов с помощью приема подведения функции под знак дифференциала. По определению дифференциала функции

$$\varphi'(x)dx=d\varphi(x).$$

Переход в этом равенстве слева направо будем называть подведением функции $\varphi'(x)$ под знак дифференциала.

Рассмотрим примеры на применение формулы Т1. Если u есть некоторая дифференцируемая функция переменной x, то эту формулу можно переписать так:

$$\int u^n du=\int u^n u'dx=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C,\ (n\neq-1).$$

7. $\int \sqrt[3]{2+x^2}\,xdx.$

В этом примере можно принять, что $u=2+x^2$; $n=\frac{1}{3}$. Множитель $du=2xdx$ отсутствует под знаком интеграла, но его легко получить из множителя $xdx=\frac{1}{2}\cdot 2xdx=\frac{1}{2}d\left(2+x^2\right)$, т. е. умножив и разделив на 2.

При интегрировании постоянный множитель вынесем за знак интеграла

$$\int \sqrt[3]{2+x^2}\,xdx=\int \left(2+x^2\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2xdx=\frac{1}{2}\int \left(2+x^2\right)^{\frac{1}{3}}d\left(2+x^2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(2+x^2\right)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+C=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\left(2+x^2\right)^{\frac{4}{3}}+C=\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(2+x^2\right)^4}+C.$$

8. $\int \left(x^2-4x+3\right)^7\left(2x-4\right)dx.$

Подведем выражение $2x-4$ под знак дифференциала. Так как

$$d\left(x^2-4x+3\right)=\left(2x-4\right)dx,$$

то

$$\int \left(x^2-4x+3\right)^7 d\left(x^2-4x+3\right)=\frac{1}{8}\left(x^2-4x+3\right)^8+C.$$

9. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,dx.$

Так как $d\left(\arcsin x\right)=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, то получим

$$\int \arcsin^{\frac{1}{2}}x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int \arcsin^{\frac{1}{2}}x\,d\left(\arcsin x\right)=\frac{2}{3}\arcsin^{\frac{3}{2}}x+C.$$

10. $\int \frac{\ln^3 t}{t}dt=\int \ln^3 t\,d\left(\ln t\right)=\frac{1}{4}\ln^4 t+C.$

11. $\int \frac{\operatorname{tg}^{\frac{3}{2}}z}{\cos^2 z}dz=\int \operatorname{tg}^{\frac{3}{2}}z\,d\left(\operatorname{tg}z\right)=\frac{2}{5}\operatorname{tg}^{\frac{5}{2}}z+C.$

12. $\int \frac{\cos x dx}{(2+\sin x)^3} = \int (2+\sin x)^{-3} d(2+\sin x) = -\frac{1}{2}(2+\sin x)^{-2} + C.$

13. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}} = \int (x^2+4)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \cdot 2xdx = \frac{1}{2}\int (x^2+4)^{-\frac{1}{2}} d(x^2+4) = (x^2+4)^{\frac{1}{2}} + C.$

14. $\int \sqrt[3]{1-3t}dt = -\frac{1}{3}\int (1-3t)^{\frac{1}{3}} d(1-3t) = -\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}(1-3t)^{\frac{4}{3}} + C = -\frac{1}{4}\sqrt[3]{(1-3t)^4} + C.$

15. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x} dx = \int \operatorname{ctg}^3 x \frac{dx}{\sin^2 x} = -\int \operatorname{ctg}^3 x d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x + C.$

В примерах 7–15 все интегралы вычислялись по формуле Т1, так как в этих интегралах нам удавалось путем преобразования подынтегрального выражения представить его в виде произведения степени некоторой функции и дифференциала этой функции, т. е. в виде $u^n du$. Если в таком виде подынтегральное выражение представить нельзя, то и интеграл не будет вычисляться по формуле Т1. Рассмотрим два примера.

16. $\int (3x^2-5)^2 dx = \int (9x^4 - 30x^2 + 25) dx = \frac{9}{5}x^5 - 10x^3 + 25x + C.$

17. $\int (3x^2-5)^2 xdx = \frac{1}{6}\int (3x^2-5)^2 d(3x^2-5) = \frac{1}{18}(3x^2-5)^3 + C.$

Так как в подынтегральном выражении примера 16 нельзя выделить дифференциал функции $3x^2-5$, то приходится вычислять интеграл, возводя эту функцию в квадрат. В примере 17, благодаря наличию множителя xdx в подынтегральном выражении, интеграл вычисляется по формуле Т1.

Рассмотрим теперь примеры, сводящиеся к формуле Т2. К этой формуле можно свести те интегралы, в которых подынтегральное выражение можно представить в виде дроби, числитель которой есть дифференциал знаменателя.

18. $\int \frac{x^2 dx}{2x^3+5} = \frac{1}{6}\int \frac{6x^2 dx}{2x^3+5} = \frac{1}{6}\int \frac{d(2x^3+5)}{2x^3+5} = \frac{1}{6}\ln\left|2x^3+5\right| + C.$

19. $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{1+\sin^2 x} dx = \int \frac{d(1+\sin^2 x)}{1+\sin^2 x} = \ln(1+\sin^2 x) + C.$

20. $\int \frac{e^x dx}{4-3e^x} = -\frac{1}{3}\int \frac{d\left(4-3e^x\right)}{4-3e^x} = -\frac{1}{3}\ln\left|4-3e^x\right| + C.$

21. $\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{d\left(\ln x\right)}{\ln x} = \ln\left|\ln x\right| + C.$

22. $\int \frac{xdx}{x^2+3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+3\right)}{x^2+3} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+3\right) + C.$

23. $\int \frac{\cos x dx}{2-3\sin x} = -\frac{1}{3}\int \frac{d\left(2-3\sin x\right)}{2-3\sin x} = -\frac{1}{3}\ln\left(2-3\sin x\right) + C.$

Рассмотрим вычисление интегралов других типов способом подведения под знак дифференциала.

24. $\int \frac{dx}{4x^2+9} = \int \frac{dx}{\left(2x\right)^2+9} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(2x\right)}{\left(2x\right)^2+9} = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x}{3} + C$,

согласно формуле Т13 при $u = 2x,\ a = 3$.

25. $\int \frac{dx}{3x^2-8} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{3}x\right)^2-8} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d\left(\sqrt{3}x\right)}{\left(\sqrt{3}x\right)^2-8} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{8}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-\sqrt{8}}{\sqrt{3}x+\sqrt{8}}\right| + C =$

$$= \frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}x+2\sqrt{2}}\right| + C,$$

согласно формуле Т14 при $u = \sqrt{3}x,\ a = \sqrt{8}$.

26. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(3x\right)^2-4}} = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(3x\right)}{\sqrt{\left(3x\right)^2-4}} = \frac{1}{3}\ln\left|3x+\sqrt{9x^2-4}\right| + C,$

согласно формуле Т15 при $u = 3x,\ b = -4$.

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{2}x\right)^2+5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(\sqrt{2}x\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{2}x\right)^2+5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+5}\right| + C,$

согласно формуле Т15 при $u = \sqrt{2}x,\ b = 5$.

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-5x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-\left(\sqrt{5}x\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{d\left(\sqrt{5}x\right)}{\sqrt{9-\left(\sqrt{5}x\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{\sqrt{5}x}{3} + C,$

согласно формуле Т12 при $u = \sqrt{5}x,\ a = 3$.

29. $\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}\int e^{2x}d\left(2x\right)=\frac{1}{2}e^{2x}+C$, (Т3а; $u=2x$).

30. $\int e^{1-5x}dx=-\frac{1}{5}\int e^{1-5x}d\left(1-5x\right)=-\frac{1}{5}e^{1-5x}+C$, (Т3а; $u=1-5x$).

31. $\int \sin 3xdx=\frac{1}{3}\int \sin 3xd\left(3x\right)=-\frac{1}{3}\cos 3x+C$, (Т4; $u=3x$).

32. $\int \cos\frac{2}{5}xdx=\frac{5}{2}\int \cos\frac{5}{2}xd\left(\frac{2}{5}x\right)=\frac{5}{2}\sin\frac{2}{5}x+C$, $\left(\text{Т5}; u=\frac{2}{5}x\right)$.

33. $\int \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)dx=-\frac{1}{2}\int \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)d\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=\frac{1}{2}\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)\right|+C$,

$\left(\text{Т6}; u=\frac{\pi}{3}-2x\right)$.

34. $\int \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}+1\right)dx=2\int \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}+1\right)d\left(\frac{x}{2}+1\right)=2\ln\left|\sin\left(\frac{x}{2}+1\right)\right|+C$,

$\left(\text{Т7}; u=\frac{x}{2}+1\right)$.

35. $\int 5^{1-x^2}xdx=-\frac{1}{2}\int 5^{1-x^2}xd\left(1-x^2\right)=-\frac{1}{2\ln 5}5^{1-x^2}+C$, (Т3; $u=1-x^2$).

36. $\int 3^{2x-1}xdx=\frac{1}{2}\int 3^{2x-1}xd\left(2x-1\right)=-\frac{1}{2\ln 3}3^{2x-1}+C$, (Т3; $u=2x-1$).

37. $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}=\frac{1}{3}\int \frac{d\left(3x\right)}{\sin^2 3x}=-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}3x+C$, (Т9; $u=3x$).

38. $\int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{4}}=4\int \frac{d\left(\frac{x}{4}\right)}{\cos^2\frac{x}{4}}=4\operatorname{tg}\frac{x}{4}+C$, $\left(\text{Т8}; u=\frac{x}{4}\right)$.

39. $\int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}=-2\int \frac{d\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}=-2\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{4}\right)\right|+C$, $\left(\text{Т10}; u=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$.

40. $\int \frac{dx}{\cos\frac{2x}{3}} = \frac{3}{2}\int \frac{d\left(\frac{2x}{3}\right)}{\sin\frac{2x}{3}} = \frac{3}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$, $\left(\text{Т11; } u=\frac{2x}{3}\right)$.

Следует обратить особое внимание на вычисление следующих шести интегралов, внешне похожих один на другой.

41. $\int \frac{xdx}{x^2-4} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2-4\right)}{x^2-4} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-4\right| + C$, (Т2; $u = x^2-4$).

42. $\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$, (Т14; $u = x$, $a = 2$).

43. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \arcsin\frac{x}{3} + C$, (Т12; $u = x$, $a = 3$).

44. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+3} = \int \frac{d\left(e^x\right)}{\left(e^x\right)^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{e^x}{\sqrt{3}} + C$, (Т12; $u = e^x$, $a = \sqrt{3}$).

45. $\int \frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+3} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(e^{2x}+3\right)}{e^{2x}+3} = \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+3\right) + C$, (Т2; $u = e^{2x}+3$).

В простейших случаях (подобных рассмотренным выше) подведение под знак дифференциала можно выполнять в уме, не делая соответствующих записей.

46. $\int \frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int e^{\arccos x} d\left(e^{\arccos x}\right) = -e^{\arccos x} + C.$

47. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{5-e^{2x}}} = \int \frac{d\left(e^x\right)}{\sqrt{5-e^{2x}}} = \arcsin\frac{e^x}{\sqrt{5}} + C.$

48. $\int \sin^4 3x \cos 3x dx = \frac{1}{3}\int \sin^4 3x d\left(\sin 3x\right) = \frac{1}{15}\sin^5 3x + C.$

49. $\int \sqrt[5]{\cos^2\frac{x}{2}}\sin\frac{x}{2}dx = -2\int \cos^{\frac{2}{5}x}\frac{x}{2} d\left(\cos\frac{x}{2}\right) = -\frac{10}{7}\cos^{\frac{7}{5}}\frac{x}{2} + C.$

50. $\int \frac{x^2\ln\left(x^3+1\right)}{x^3+1} = \frac{1}{3}\int \ln\left(x^3+1\right)\frac{3x^2dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\int \ln\left(x^3+1\right)d\left(\ln\left(x^3+1\right)\right) =$

$$= \frac{1}{6}\ln^2\left(x^3+1\right) + C.$$

51. $\int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2\right)}{\sqrt{4-\left(x^2\right)^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{2} + C.$

При решении некоторых примеров можно использовать формулу Т1а

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C\ ,$$

которая получается из формулы Т1 при $n = -\frac{1}{2}$.

52. $\int \frac{xdx}{\sqrt{9-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(9-x^2\right)}{\sqrt{9-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \left(9-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(9-x^2\right) = -\sqrt{9-x^2} + C\ .$

53. $\int \frac{\sin 2xdx}{\sqrt{2+\cos 2x}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(2+\cos 2x\right)}{\sqrt{2+\cos 2x}} = -\sqrt{2+\cos 2x} + C.$

54. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-2x^3}} = -\frac{1}{6}\int \frac{d\left(4-2x^3\right)}{\sqrt{4-2x^3}} = -\frac{1}{3}\sqrt{4-2x^3} + C.$

55. $\int \frac{5^x dx}{\sqrt{25^x-1}} = \frac{1}{\ln 5}\int \frac{d\left(5^x\right)}{\sqrt{5^{2x}-1}} = \frac{1}{\ln 5}\ln\left|5^x + \sqrt{25^x-1}\right| + C.$

56. $\int \frac{\cos\sqrt{2x}}{\sqrt{x}}dx = \sqrt{2}\int \cos\sqrt{2x}d\left(\sqrt{2x}\right) = \sqrt{2}\sin\sqrt{2x} + C.$

Задачи для аудиторной работы

Найти интегралы:

1.2.1. $\int\left(2x^3+4x+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}+2\right)dx.$

1.2.2. $\int \frac{x^2-\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$

1.2.3. $\int\left(1-2x^2\right)^2 xdx.$

1.2.4. $\int\left(1-2x^2\right)^2 dx.$

1.2.5. $\int x\sqrt[4]{3-2x^2}dx.$

1.2.6. $\int\left(x^2-2x+2\right)^5\left(x-1\right)dx.$

1.2.7. $\int \frac{\sin 2xdx}{\left(1-\cos 2x\right)^4}.$

1.2.8. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

1.2.9. $\int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}.$

1.2.10. $\int \sqrt{1+5t}dt.$

1.2.11. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}}.$

1.2.12. $\int \frac{dx}{x^2+5}.$

1.2.13. $\int \frac{xdx}{x^2+5}.$

1.2.14. $\int \frac{dx}{2x^2-5}.$

1.2.15. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-3}}.$

1.2.16. $\int \frac{xdx}{\sqrt{4x^2-3}}.$

1.2.17. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}.$

1.2.18. $\int \frac{xdx}{\sqrt{4-3x^2}}.$

1.2.19. $\int 5^{1-2x}dx.$

1.2.20. $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{3}}.$

1.2.21. $\int \cos 3xdx.$

1.2.22. $\int \sin(1-2x)dx.$

1.2.23. $\int \frac{\sin xdx}{2-\cos x}.$

1.2.24. $\int x3^{2+3x^2}dx.$

1.2.25. $\int (x^6-4x^3+3x-5)dx.$

1.2.26. $\int \frac{x^2-2\sqrt{x}+x-1}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$

1.2.27. $\int \frac{x^2+2\sqrt{2}x+2}{x+\sqrt{2}}dx.$

1.2.28. $\int \frac{dx}{x^2+4}.$

1.2.29. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}.$

1.2.30. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}.$

1.2.31. $\int \frac{dx}{x^2-1}.$

1.2.32. $\int \frac{dx}{3-x^2}.$

1.2.33. $\int \frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}dx.$

1.2.34. $\int \frac{dx}{3-5x}.$

1.2.35. $\int \frac{x^2+8}{x^2(x^2+4)}dx.$

1.2.36. $\int \frac{2^x+3^x}{5^x}dx.$

1.2.37. $\int \frac{dx}{5^x}.$

1.2.38. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}dx.$

1.2.39. $\int \frac{\sin 2x}{4-\cos 2x}dx.$

1.2.40. $\int \frac{dx}{x(2+\ln x)}.$

1.2.41. $\int \frac{dx}{\cos^2(3x+1)}.$

1.2.42. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x^2}.$

1.2.43. $\int \cos(1-2x)dx.$

1.2.44. $\int \frac{dx}{(2+5x)^3}.$

1.2.45. $\int \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)dx.$

1.2.46. $\int (4+3x)^7 dx.$

1.2.47. $\int \sin^3 2x\cos 2xdx.$

1.2.48. $\int \sqrt{1-\frac{x}{3}}dx.$

1.2.49. $\int \sqrt[3]{5x-2}dx.$

1.2.50. $\int \sin 4xdx.$

1.2.51. $\int 5^{1-2x}dx.$

1.2.52. $\int \frac{dx}{e^{2x}}.$

1.2.53. $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx.$

1.2.54. $\int \frac{dx}{5+x}.$

1.2.55. $\int \frac{x^2}{x^2+1}dx.$

1.2.56. $\int \frac{x^2+1}{x^2+2}dx.$

1.2.57. $\int e^{3x}dx.$

1.2.58. $\int x\sqrt[3]{2-x^2}dx.$

1.2.59. $\int \frac{x+2}{x^2+4x+1}dx.$

1.2.60. $\int x5^{1-x^2}dx.$

1.2.61. $\int \frac{x^2}{x+2}dx.$

1.2.62. $\int \frac{\sqrt[3]{\mathrm{arc\,tg}\, x}}{1+x^2}dx.$

1.2.63. $\int \frac{2-3\mathrm{ctg}^2 x}{\sin^2 x}dx.$

1.2.64. $\int e^{\sin 2x}\cos 2xdx.$

1.2.65. $\int \frac{dx}{9-4x^2}.$

1.2.66. $\int \frac{dx}{4+5x^2}.$

1.2.67. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}.$

1.2.68. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-4}}.$

1.2.69. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+4}}.$

1.2.70. $\int \sqrt{\frac{\arcsin 3x}{1-9x^2}}dx.$

1.2.71. $\int \frac{\operatorname{tg}^3 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx.$

1.2.72. $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{2x}{5}}.$

1.2.73. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-5x}}.$

1.2.74. $\int \operatorname{tg}\left(7-\frac{2x}{5}\right)dx.$

Задачи для самостоятельной работы

Найти интегралы:

1.2.75. $\int \left(x^3 - 4x + 2\sqrt[3]{x} - 1\right)dx.$

1.2.76. $\int \frac{4 + x\sqrt[3]{x} - x + x^2}{\sqrt{x}} dx.$

1.2.77. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx.$

1.2.78. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 5}}.$

1.2.79. $\int \frac{dx}{x^2 - 5}.$

1.2.80. $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}.$

1.2.81. $\int \frac{dx}{4 - x^2}.$

1.2.82. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx.$

1.2.83. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx.$

1.2.84. $\int \sin(3-5x)dx.$

1.2.85. $\int \cos \frac{2}{5} x dx.$

1.2.86. $\int \operatorname{ctg} 4x dx.$

1.2.87. $\int \frac{xdx}{x^2 + 4}.$

1.2.88. $\int \frac{e^x}{2 + e^x} dx.$

1.2.89. $\int \sqrt{2x+5} dx.$

1.2.90. $\int \sqrt[3]{1-3x} dx.$

1.2.91. $\int \frac{\ln x}{x} dx.$

1.2.92. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}.$

1.2.93. $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2} dx.$

1.2.94. $\int \frac{\cos 3x}{3 - \sin 3x} dx.$

1.2.95. $\int \frac{x}{x-2} dx.$

1.2.96. $\int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}.$

1.2.97. $\int \frac{dx}{2+3x}$.

1.2.98. $\int \frac{dx}{(2+3x)^4}$.

1.2.99. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x} dx.$

1.2.100. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{3+2x}}$.

1.2.101. $\int \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)dx.$

1.2.102. $\int x(x^2-3)^5 dx.$

1.2.103. $\int \cos^2 3x \sin 3x dx.$

1.2.104. $\int 3^{1+2x} dx.$

1.2.105. $\int e^x 3^{2x} dx.$

1.2.106. $\int 10^{2-5x} dx.$

1.2.107. $\int x5^{1+x^2} dx.$

1.2.108. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$.

1.2.109. $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{3}}$.

1.2.110. $\int \frac{dx}{x \ln x}$.

1.2.111. $\int \frac{x^2 dx}{x-1}$.

1.2.112. $\int \frac{x dx}{x+3}$.

1.2.113. $\int 5^{\cos 3x} \sin 3x dx.$

1.2.114. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx.$

1.2.115. $\int \frac{dx}{3+4x^2}$.

1.2.116. $\int \frac{dx}{4-9x^2}$.

1.2.117. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$.

1.2.118. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-25}}$.

1.2.119. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+25}}$.

1.2.120. $\int \frac{\operatorname{ctg}^4 3x}{\sin^2 3x} dx.$

1.2.121. $\int \frac{\arccos^3 \frac{5x}{3}}{\sqrt{9-25x^2}} dx.$

1.2.122. $\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{4x}{5}}$.

1.2.123. $\int \operatorname{ctg}(2-5x)dx.$

1.2.124. $\int \sqrt[5]{4-\frac{x}{3}} dx.$

1.3 Простейшие приложения неопределенного интеграла

Рассмотрим следующие задачи.

Задача 1. Найти уравнение линии, проходящей через точку (2; 4), если в каждой точке этой линии угловой коэффициент касательной равен $3x-1$.

Решение. Так как угловой коэффициент касательной к графику функции равен производной функции, то $f'(x)=3x-1$. Используя определение интеграла, получаем

$f(x)=\int(3x-1)dx=3\frac{x^2}{2}-x+C$. Так как линия проходит через точку (2; 4), то $4=3\frac{2^2}{2}-2+C$. Отсюда $C=0$. Искомая линия имеет вид $f(x)=3\frac{x^2}{2}-x$.

Ответ: $y=3\frac{x^2}{2}-x$.

Задача 2. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью 30 м/с. Найти высоту, на которую поднимется тело, и время подъёма. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Из курса физики известно, что скорость тела, брошенного вертикально вверх, находится по формуле: $v(t)=v_0-gt$, где g – ускорение свободного падения. Найдем время, за которое тело достигнет наивысшей точки. Так как скорость станет равна 0 (тело остановится), получаем: $0=30-gt$. Отсюда $t=\frac{30}{g}\approx\frac{30}{10}=3(t)$. Используя физический смысл производной ($v=S'$) и определение неопределенного интеграла, находим закон движения тела:

$S=\int v(t)dt=\int\left(v_0-gt\right)dt=v_0t-g\frac{t^2}{2}+C$. Так как $S(0)=0$, найдем C: $0=30\cdot 0-g\frac{0^2}{2}+C$, отсюда $C=0$. Подставив в формулу

$S(t) = 30 \cdot t - g\dfrac{t^2}{2}$ время $t = 3$, получим максимальную высоту подъема $S(3) = 30 \cdot 3 - g\dfrac{3^2}{2} \approx 90 - 45 = 45$ (м).

Ответ: 45 м, 3 с.

Задачи для аудиторной работы

1.3.1. Найти функцию, производная которой $y' = 4x^3 - 6x^2 + 5$.

1.3.2. Найти функцию, которая обращается в нуль при $x = 1$, если производная этой функции $y' = 6x^2 - 6x + 7$.

1.3.3. Найти функцию, производная которой $y' = 2\sin x - \cos x$, если при $x = \pi$ функция принимает значение, равное 5.

1.3.4. Составить уравнение кривой, проходящей через начало координат, если в каждой точке этой кривой угловой коэффициент касательной равен $2x - 3$.

1.3.5. Найти закон прямолинейного движения тела, если скорость его задана формулой $v = (3t^2 - 2t)$, причем в момент времени $t = 1$ с тело находится на расстоянии $S = 12$ м от начала координат.

1.3.6. Скорость прямолинейного движения задана формулой $v = \sqrt{t}$. Какой путь пройдет тело за первые 9 с после начала движения?

1.3.7. Ускорение прямолинейного движения тела определяется формулой $a = (6t - 30)$. Найти закон движения тела, если в начальный момент (при $t = 0$) скорость его $v = 4$ м/с и путь $S = 5$ м.

1.3.8. В предыдущей задаче определить, через сколько секунд после начального момента скорость будет наименьшей.

1.3.9. Брошенное вертикально вверх тело имеет начальную скорость $v = 35$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти:

1) закон движения тела;
2) максимальную высоту подъема.

1.3.10. Точка оси OX совершает гармоническое колебание вокруг начала координат, причем скорость ее задается формулой

$v = v_0 \cos \omega t,$ где t – время, v_0 и ω – постоянные. Найти закон колебания точки, если при $t = 0$ ее абсцисса $x = 0.$

Задачи для самостоятельной работы

1.3.11. Найти функцию, производная которой $y' = 8x^3 + 6x - 3.$

1.3.12. Найти функцию, производная которой $y' = 3x^2 - 2x + 4,$ если при $x = 2$ функция принимает значение, равное 10.

1.3.13. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $A(3; -1),$ если угловой коэффициент касательной в каждой точке кривой равен квадрату абсциссы точки касания.

1.3.14. Найти уравнение прямолинейного движения тела, если скорость его задана формулой: $v = (2t + 1),$ причем в момент времени $t = 2$ с тело находится на расстоянии $S = 8$ м от начала отсчета.

1.3.15. Скорость прямолинейного движения точки задана формулой $v = t^2 + 4.$ Найти закон движения точки, если в начальный момент времени она находилась в начале координат.

1.3.16. Точка движется прямолинейно с ускорением $a = 12t - 24.$ В момент времени $t = 1$с ее скорость $v = 10$ м/с, а путь $S = 6$ м. Найти: закон движения точки; момент, когда скорость является наименьшей.

1.4 Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен

Рассмотрим следующие типы интегралов.

1. $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ находится вынесением множителя $\frac{1}{a}$ за знак интеграла и путем выделения полного квадрата из квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе подынтегрального выражения. В результате получается интеграл типа Т13 или Т14.

2. $\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx$ берется путем выделения в числителе дроби производной знаменателя и разложения полученного интеграла на

сумму двух интегралов. Первый из них сводится к формуле Т2, а второй – это интеграл, рассмотренный в п.1.

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ вычисляется с помощью вынесения множителя $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$ за знак интеграла и выделения полного квадрата в подкоренном выражении и сводится к формуле Т12 или Т15.

4. $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ находится выделением в числителе производной подкоренного выражения и разложением полученного интеграла на сумму двух интегралов. Первый из них сводится к формуле Т1а, а второй – это интеграл, рассмотренный в п. 3.

Рассмотрим следующие примеры.

1. $\int \frac{dx}{x^2-4x+8}.$

Выделим полный квадрат $\left(x^2-2\cdot 2\cdot x+2^2\right)-2^2+8=\left(x-2\right)^2+4.$ Отсюда находим

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+8}=\int \frac{dx}{\left(x-2\right)^2+4}=\int \frac{d\left(x-2\right)}{\left(x-2\right)^2+2^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2}+C.$$

2. $\int \frac{dx}{2x^2-4x-6}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-2x-3}=\frac{1}{2}\int \frac{d\left(x-1\right)}{\left(x-1\right)^2-4}=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|+C.$

3. $\int \frac{x+3}{3-x^2-2x}dx.$

Так как производная знаменателя равна $\left(3-x^2-2x\right)'=-2x-2,$ то для выделения производной знаменателя преобразуем числитель

$$x+3=-\frac{1}{2}\left(-2x-2\right)-1+3=-\frac{1}{2}\left(-2x-2\right)+2.$$

Получаем

$$\int\frac{x+3}{3-x^2-2x}\,dx=\int\frac{-\frac{1}{2}(-2x-2)+2}{3-x^2-2x}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{(-2x-2)\,dx}{3-x^2-2x}+2\int\frac{dx}{3-x^2-2x}.$$

Выделим во втором интеграле полный квадрат

$$3-x^2-2x=-\left(x^2+2x-3\right)=-\left(x^2+2x+1-4\right)=4-\left(x+1\right)^2.$$

Тогда

$$-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(3-x^2-2x\right)}{3-x^2-2x}+2\int\frac{d\left(x+1\right)}{2^2-\left(x+1\right)^2}=-\frac{1}{2}\ln\left|3-x^2-2x\right|+2\cdot\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1+2}{x+1-2}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|3-x^2-2x\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+3}{x-1}\right|+C.$$

4. $$\int\frac{xdx}{x^2-6x+13}=\int\frac{\frac{1}{2}(2x-6)+3}{x^2-6x+13}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-6}{x^2-6x+13}dx+3\int\frac{dx}{x^2-6x+13}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2-6x+13\right)}{x^2-6x+13}+3\int\frac{d\left(x-3\right)}{\left(x-3\right)^2+2^2}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-6x+13\right|+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}+C.$$

5. $$\int\frac{dx}{\sqrt{16-2x^2+4x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{8-x^2+2x}}.$$

Выделим полный квадрат

$$8-x^2+2x=-\left(x^2-2x+1-9\right)=9-\left(x-1\right)^2.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{9-\left(x-1\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x-1}{3}+3.$$

6. $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+3}}=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+3}}=\int\frac{d\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}=$$

$$=\ln\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+3}\right|+C.$$

7. $$\int\frac{1-x}{\sqrt{x^2-8x+25}}dx.$$

Выделим в числителе производную подкоренного выражения

$$1-x=-\frac{1}{2}(2x-8)-3.$$

Имеем

$$\int\frac{1-x}{\sqrt{x^2-8x+25}}dx=\int\frac{-\frac{1}{2}(2x-8)-3}{\sqrt{x^2-8x+25}}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{2x-8}{\sqrt{x^2-8x+25}}dx-3\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+25}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2-8x+25\right)}{\sqrt{x^2-8x+25}}-3\int\frac{d(x-4)}{\sqrt{(x-4)^2+9}}=-\sqrt{x^2-8x+25}-3\ln\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+25}\right|+C.$$

8. $$\int\frac{x-2}{\sqrt{1-4x^2-8x}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{x-2}{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2-2x}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{-\frac{1}{2}(-2x-2)-3}{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2-2x}}dx=$$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{-2x-2}{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2-2x}}dx-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2-2x}}=-\frac{1}{4}\int\frac{d\left(\frac{1}{4}-x^2-2x\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2-2x}}-$$

$$-\frac{3}{2}\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{\frac{5}{4}-(x+1)^2}}=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2-2x}-\frac{3}{2}\arcsin\frac{2(x+1)}{\sqrt{5}}+C.$$

Задачи для аудиторной работы

Найти интегралы:

1.4.1. $\int\frac{dx}{x^2+4x+1}$.

1.4.2. $\int\frac{dx}{2x^2-12x+26}$.

1.4.3. $\int\frac{x+4}{x^2+2x+5}dx$.

1.4.4. $\int\frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-7}}$.

1.4.5. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x-1}}$.

1.4.6. $\int\frac{xdx}{3-2x-x^2}$.

1.4.7. $\int\frac{dx}{x^2-4x+1}$.

1.4.8. $\int\frac{x-3}{x^2+6x-3}dx$.

1.4.9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-5}}$. 1.4.10. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2+5}}$.

1.4.11. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+2x-5}}$. 1.4.12. $\int \frac{3-2x}{\sqrt{6x-x^2-8}}dx.$

1.4.13. $\int \frac{xdx}{x^2+6x-1}$. 1.4.14. $\int \frac{1-3x}{\sqrt{x^2+10x+29}}dx.$

1.4.15. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2-6x+5}}$. 1.4.16. $\int \frac{dx}{3x^2-12x+6}$.

Задачи для самостоятельной работы

Найти интегралы:

1.4.17. $\int \frac{3x+3}{x^2+4x+1}dx.$ 1.4.18. $\int \frac{dx}{x^2-8x+15}$.

1.4.19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+2}}$. 1.4.20. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2-2x}}$.

1.4.21. $\int \frac{(3x-6)dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$. 1.4.22. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$.

1.4.23. $\int \frac{xdx}{x^2-4x+1}$. 1.4.24. $\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$.

1.5 Интегрирование методом замены переменной

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок двух видов:

1) $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – монотонная непрерывно дифференцируемая функция новой переменной t. Тогда $dx=\varphi'(t)dt$. Формула замены переменной в этом случае

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\int \Phi(t)dt. \qquad (1.2)$$

Функцию $\varphi(t)$ выбирают таким образом, чтобы интеграл, полученный после подстановки в формулу (1.2), вычислялся проще, чем исходный;

2) $u=\psi(x)$, где u – новая переменная, причем $\psi(x)$ – монотонная непрерывно дифференцируемая функция. Эта подстановка отличается от первой тем, что в формуле (1.2) независимая переменная x заменялась новой функцией $\varphi(t)$, а здесь уже функция $\psi(x)$ независимой переменной заменяется новой переменной u. В этом случае формула замены переменной имеет вид

$$\int f(\psi(x))\psi'(x)dx=\int f(u)du. \tag{1.3}$$

Подстановка достигает цели, если полученный интеграл находится проще, чем исходный.

После интегрирования в обоих случаях необходимо возвратиться к переменной x, выразив ее из соответствующего уравнения подстановки.

Общего правила по выбору подстановки не существует. Мы рассмотрим некоторые частные случаи для важнейших типов интегралов. Заметим, что фактически мы уже пользовались заменой переменной, когда применяли прием подведения функции под знак дифференциала.

Рассмотрим примеры:

1. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+4}dx.$

Здесь применяется подстановка первого вида $x=t^2$, с помощью которой избавляемся от радикала. Сразу находим $dx=2tdt$ и преобразуем подынтегральное выражение

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+4}dx=\int \frac{t2tdt}{t^2+4}=2\int \frac{t^2+4-4}{t^2+4}dt=2\int dt-8\int \frac{dt}{t^2+4}=2t-4\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C.$$

Возвращаясь к старой переменной x, окончательно получим

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+4}dx=2\sqrt{x}-4\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{2}+C.$$

2. $\displaystyle\int\frac{x^2}{3+x^3}dx=\begin{bmatrix}u=3+x^3,\\ du=3x^2dx\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{3}\ln|u|+C=\frac{1}{3}\left|3+x^3\right|+C.$

3. $\displaystyle\int x\sqrt{x+2}dx=\begin{bmatrix}\sqrt{x+2}=t,\\ x=t^2-2,\\ dx=2tdt\end{bmatrix}=\int\left(t^2-2\right)t2tdt=2\int\left(t^4-2t^2\right)dt=$

$$=\frac{2}{5}t^5-\frac{4}{3}t^3+C=\frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}+C.$$

4. $\displaystyle\int\frac{\cos 3xdx}{4+\sin^3 3x}=\begin{bmatrix}u=\sin 3x,\\ du=3\cos 3xdx,\\ \frac{1}{3}du=\cos 3xdx\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\int\frac{du}{4+u^2}=\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{\sin 3x}{2}+C.$

5. $\displaystyle\int\frac{e^{5x}dx}{4-e^{10x}}=\begin{bmatrix}u=e^{5x},\\ du=5e^{5x}dx,\\ \frac{1}{5}du=e^{5x}dx\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\int\frac{du}{4-u^2}=\frac{1}{20}\ln\left|\frac{u+2}{u-2}\right|+C=\frac{1}{20}\ln\left|\frac{e^{5x}+2}{e^{5x}-2}\right|+C$

6. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}dx=\begin{bmatrix}\sqrt{x}=t,\\ x=t^2,\\ dx=2tdt\end{bmatrix}=\int\frac{t2tdt}{t+5}=2\int\frac{t^2-25+25}{t+5}dt=$

$$=2\int(t-5)dt+50\int\frac{dt}{t+5}=t^2-10t+50\ln|t+5|+C=x-10\sqrt{x}+50\ln\left|\sqrt{x}+5\right|+C.$$

7. $\displaystyle\int\frac{dx}{1+e^x}=\begin{bmatrix}e^x+1=t,\ e^x=t-1,\\ x=\ln(t-1),\ dx=\frac{dt}{t-1}\end{bmatrix}=\int\frac{dt}{t(t-1)}=\int\frac{dt}{t^2-t}=\int\frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}=$

$$=\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|+C=\ln\frac{e^x}{1+e^x}+C=x-\ln\left(1+e^x\right)+C.$$

8. $\int\sqrt{e^x+1}e^x dx=\begin{bmatrix} e^x+1=u, \\ de^x=du \end{bmatrix}=\int\sqrt{u}du=\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\left(e^x+1\right)^{\frac{3}{2}}+C.$

9. $\int\sqrt[3]{2\sin x-1}\cos xdx=\begin{bmatrix} u=2\sin x-1, \\ du=2\cos xdx, \\ \frac{1}{2}du=\cos xdx \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\int\sqrt[3]{u}du=\frac{3}{8}u^{\frac{4}{3}}+C=$

$$=\frac{3}{8}(2\sin x-1)^{\frac{4}{3}}+C.$$

10. $\int\left(2x^3-5\right)^5 x^2dx=\begin{bmatrix} u=2x^3-5, \\ du=6x^2dx, \\ \frac{1}{6}du=x^2dx \end{bmatrix}=\frac{1}{6}\int u^5du=\frac{1}{36}u^6+C=\frac{1}{36}\left(2x^3-5\right)^6+C.$

11. $\int\sqrt[3]{\left(1-3x^2\right)^4}xdx=\begin{bmatrix} u=1-3x^2 \\ du=-6xdx, \\ -\frac{1}{6}du=xdx \end{bmatrix}=-\frac{1}{6}\int u^{\frac{4}{3}}du=-\frac{1}{14}u^{\frac{7}{3}}+C=$

$$=-\frac{1}{14}\left(1-3x^2\right)^{\frac{7}{3}}+C.$$

12. $\int\frac{\cos xdx}{\sqrt{1-\sin x}}=\begin{bmatrix} u=1-\sin x, \\ du=-\cos xdx, \\ -du=\cos xdx \end{bmatrix}=-\int\frac{du}{\sqrt{u}}=-2\sqrt{u}+C=-2\sqrt{1-\sin x}+C.$

13. $\int\frac{\sqrt[4]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx=\begin{bmatrix} u=\operatorname{arctg} x, \\ du=\frac{dx}{1+x^2} \end{bmatrix}=\int u^{\frac{1}{4}}du=\frac{4}{5}u^{\frac{5}{4}}+C=\frac{4}{5}\operatorname{arctg}^{\frac{5}{4}}x+C.$

14. $\int\frac{x^3dx}{\sin^2 x^4}=\begin{bmatrix} u=x^4, \\ du=4x^3dx, \\ \frac{1}{4}du=x^3dx \end{bmatrix}=\frac{1}{4}\int\frac{du}{\sin^2 u}=-\frac{1}{4}\operatorname{ctg} u+C=-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\left(\sin x^4\right)+C.$

15. $$\int \frac{\cos\frac{2}{x^3}}{x^4}dx = \begin{bmatrix} u=\frac{2}{x^3}, \\ du=-\frac{6}{x^4}dx, \\ -\frac{1}{6}du=\frac{dx}{x^4} \end{bmatrix} = -\frac{1}{6}\int \cos u\,du = -\frac{1}{6}\sin u + C = -\frac{1}{6}\sin\frac{2}{x^3}+C.$$

Заметим, что интегралы вида $\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ берутся с помощью подстановки $u=\frac{1}{mx+n}$.

16. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \begin{bmatrix} x=\frac{1}{u},\ u=\frac{1}{x} \\ dx=-\frac{du}{u^2} \end{bmatrix} = \int \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u^2}+1}} = -\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} =$$

$$= -\ln\left|u+\sqrt{u^2+1}\right| + C = -\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right| + C = C - \ln\left|\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right| + C.$$

17. $$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}} = \begin{bmatrix} u=\frac{1}{x+1}, \\ x=\frac{1}{u}-1, \\ dx=-\frac{du}{u^2} \end{bmatrix} = \int \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\sqrt{\left(\frac{1}{u}-1\right)^2+2\left(\frac{1}{u}-1\right)}} =$$

$$= -\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\arcsin u + C = C - \arcsin\frac{1}{x+1}.$$

Задачи для аудиторной работы

Найти интегралы:

1.5.1. $\int \frac{xdx}{4-x^2}$.

1.5.2. $\int x\sqrt[3]{3+x}\,dx$.

1.5.3. $\int \frac{xdx}{\sqrt{3+2x^2}}$.

1.5.4. $\int \frac{2^x dx}{4-4^x}$.

1.5.5. $\int x^2\sqrt[5]{1-2x^3}\,dx$.

1.5.6. $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-1}dx$.

1.5.7. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}}$.

1.5.8. $\int \frac{e^x dx}{3+2e^x}$.

1.5.9. $\int \frac{e^x dx}{3+2e^{2x}}$.

1.5.10. $\int \frac{e^{\frac{5}{x}}}{x^2} dx$.

1.5.11. $\int \frac{2x-5}{1+5x-x^2} dx$.

1.5.12. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

1.5.13. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$.

1.5.14. $\int \cos^3 2x \sin 2x dx$.

1.5.15. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} 3x}}{\cos^2 3x} dx$.

1.5.16. $\int \frac{\cos\frac{x}{2} dx}{\sqrt[3]{4-\sin\frac{x}{2}}}$.

1.5.17. $\int \frac{1-4\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

1.5.18. $\int \sqrt[3]{\sin^2 x} \cos x dx$.

1.5.19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

1.5.20. $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+4x}}$.

1.5.21. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x+4}$.

1.5.22. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x+1}}$.

1.5.23. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$.

1.5.24. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^4+5}}$.

1.5.25. $\int \frac{a^x dx}{\sqrt{a^{2x}-1}}$.

1.5.26. $\int \frac{x-1}{(x+2)^2} dx$.

1.5.27. $\int \frac{\sin ax}{\cos^3 ax} dx$.

1.5.28. $\int \frac{\sin \ln x}{x} dx$.

1.5.29. $\int \frac{2^x dx}{1+2^x}$.

1.5.30. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

1.5.31. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^4+5}}$.

1.5.32. $\int \frac{e^x\sqrt{\operatorname{arctg} e^x}}{1+e^{2x}} dx$.

1.5.33. $\int \frac{dx}{e^x+1}$.

1.5.34. $\int e^{x^2+4x-1}(x+2)dx$.

1.5.35. $\int \sqrt{2-4x}dx$.

1.5.36. $\int \frac{xdx}{4-x^2}$.

1.5.37. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$.

1.5.38. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^6+4}}$.

1.5.39. $\int \frac{x^2dx}{x^3+2}$.

1.5.40. $\int \frac{e^{\frac{1}{1+x}}dx}{(1+x)^2}$.

1.5.41. $\int \frac{2x+\cos x}{\sqrt{x^2+\sin x}}dx$.

1.5.42. $\int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$.

1.5.43. $\int \frac{e^x dx}{3+4e^x}$.

1.5.44. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}\arcsin^3 2x}$.

1.5.45. $\int \frac{dx}{x\sin^2(\ln x)}$.

1.5.46. $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{4-4^x}}$.

1.5.47. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$.

1.5.48. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+9}}$.

1.5.49. $\int e^{4\sin 2x-1}\cos 2xdx$.

1.5.50. $\int \frac{dx}{\left(6+\sqrt[3]{x}\right)^4\sqrt[3]{x^2}}$.

Задачи для самостоятельной работы

Найти интегралы:

1.5.51. $\int \frac{\cos\ln x}{x}dx$.

1.5.52. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2-x}}$.

1.5.53. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}$.

1.5.54. $\int \frac{xdx}{\cos^2(x^2+4)}$.

1.5.55. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\left(3-4\mathrm{tg}^2 x\right)}$.

1.5.56. $\int \frac{\ln x-3}{x\sqrt{\ln x}}dx$.

1.5.57. $\int x\sqrt{x-1}dx$.

1.5.58. $\int \frac{dx}{e^x+1}$.

1.5.59. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$.

1.5.60. $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$.

1.5.61. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$.

1.5.62. $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

1.5.63. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-4}}$.

1.5.64. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^8+3}}$.

1.5.65. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^4+3}}$.

1.5.66. $\int \frac{(x-1)dx}{(x+2)^2}$.

1.5.67. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln x}}$.

1.5.68. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

1.5.69. $\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}dx$.

1.5.70. $\int \frac{\ln 2xdx}{x\left(1-\ln^2 2x\right)}$.

1.5.71. $\int e^{2x^2+\ln x}dx$.

1.5.72. $\int \frac{e^x(1+e^x)dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

1.5.73. $\int \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}}dx$.

1.5.74. $\int \frac{\sqrt{x+1}dx}{\sqrt[3]{x+1}}$.

1.5.75. $\int x\sqrt[3]{x-1}dx$.

1.5.76. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

1.6 Интегрирование по частям

Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

где *u* и *v* – непрерывно дифференцируемые функции от переменной *x*.

Для применения этой формулы подынтегральное выражение следует представить в виде произведения функции *u* на дифференциал другой функции *dv*. Затем по установленному выражению *u* дифференцированием находится *du*, а по известному *dv* интегрированием находится функция *v*. Формула интегрирования по частям сводит отыскание интеграла $\int udv$ к нахождению другого интеграла $\int vdu$. Применение ее целесообразно, когда последний интеграл либо проще исходного, либо ему подобен. При этом в качестве *u* берется функция, которая при дифференцировании упрощается, а в качестве *dv* – та часть подынтегрального выражения, интеграл которой известен или может быть найден. Так, при нахождении интегралов видов

$$\int P(x)e^{kx}dx,\ \int P(x)a^{kx}dx,\ \int P(x)\sin kxdx,\ \int P(x)\cos kxdx$$

за *u* следует принять многочлен $P(x)$, а за *dv* – соответственно выражения e^{kx}, a^{kx}, $\sin kx$, $\cos kx$.

При отыскании интегралов видов $\int P(x)\ln\left|Q(x)\right|dx$, $\int P(x)\arcsin kxdx$, $\int P(x)\arccos kxdx$, $\int P(x)\mathrm{arctg}\,kxdx$, $\int P(x)\mathrm{arcctg}\,kxdx$ за *u* принимаются соответственно функции $\ln\left|Q(x)\right|$, $\arcsin kx$, $\arccos kx$, $\mathrm{arctg}\,kx$, $\mathrm{arcctg}\,kx$, а за *dv* – выражение $P(x)dx$.

Заметим, что для получения окончательного результата иногда приходится пользоваться методом интегрирования по частям последовательно несколько раз.

Рассмотрим следующие примеры.

1. $$\int xe^x dx = \begin{bmatrix} u = x,\ dv = e^x dx \\ du = dx, v = e^x \end{bmatrix} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

2. $$\int x\sin 2xdx = \begin{bmatrix} u = x,\ dv = \sin 2xdx \\ du = dx, v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2xdx =$$

$$= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

3. $$\int \ln 3xdx = \begin{bmatrix} u = \ln 3x, dv = dx \\ du = \frac{dx}{x}, v = x \end{bmatrix} = x\ln 3x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln 3x - \int dx = x\ln 3x - x + C.$$

4. $$\int x \operatorname{arctg} x dx = \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x,\ dv = xdx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2},\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right] = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2 dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

5. $$\int \arccos x dx = \left[\begin{array}{l} u = \arccos x,\ dv = dx \\ du = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\ v = x \end{array} \right] = x \arccos x + \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x \arccos x - \frac{1}{2}\int \frac{-2xdx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

6. $$\int x^2 \cos 2x dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2,\ dv = \cos 2x dx \\ du = 2xdx,\ v = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right] = \frac{1}{2}x^2 \sin 2x - \int x \sin 2x dx.$$

Полученный интеграл снова нужно брать по частям:

$$\int x \sin 2x dx = \left[\begin{array}{l} u = x,\ dv = \sin 2x dx \\ du = dx,\ v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{array} \right] = -\frac{1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx =$$

$$= -\frac{1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Окончательно имеем

$$\int x^2 \cos 2x dx = \frac{1}{2}x^2 \sin 2x + \frac{1}{2}x \cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Нахождение интегралов вида $\int e^{kx} \cos ax dx$, $\int e^{kx} \sin ax dx$, $\int a^{kx} \sin ax dx$, $\int a^{kx} \cos ax dx$ методом интегрирования по частям сводится к решению алгебраического уравнения, в котором неизвестным является искомый интеграл.

7. $\int e^x \cos 2x dx = \begin{bmatrix} u = e^x, dv = \cos 2x dx \\ du = e^x dx, v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{bmatrix} = \frac{1}{2} e^x \sin 2x - \frac{1}{2}\int e^x \sin 2x dx =$

$$= \begin{bmatrix} u = e^x,\ dv = \sin 2x dx \\ du = e^x dx,\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{bmatrix} = \frac{1}{2} e^x \sin 2x + \frac{1}{4} e^x \cos 2x - \frac{1}{4}\int e^x \cos 2x dx.$$

Мы дважды пользовались формулой интегрирования по частям, в результате получился искомый интеграл. Перенесем его в левую часть и приведем подобные

$$\frac{5}{4}\int e^x \cos 2x dx = \frac{1}{2} e^x \sin 2x + \frac{1}{4} e^x \cos 2x + C_1.$$

Отсюда

$$\int e^x \cos 2x dx = \frac{2}{5} e^x \sin 2^x + \frac{1}{5} e^x \cos 2x + C.$$

Задачи для аудиторной работы

Найти интегралы:

1.6.1. $\int x \cos x dx.$

1.6.2. $\int \arcsin x dx.$

1.6 3. $\int x e^{3x} dx.$

1.6.4. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx.$

1.6.5. $\int (1 - x) \sin x dx.$

1.6.6. $\int e^x \sin x dx.$

1.6.7. $\int e^{2x} \cos x dx.$

1.6.8. $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx.$

1.6.9. $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}.$

1.6.10. $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$

1.6.11. $\int (\ln x)^3 dx.$

1.6.12. $\int x \sin^2 \frac{x}{2} dx.$

1.6.13. $\int x^2 e^{3x} dx.$

1.6.14. $\int 4^x \sin x dx.$

1.6.15. $\int x e^x dx.$

1.6.16. $\int \ln(2x + 3) dx.$

1.6.17. $\int x^3 \ln x dx.$

1.6.18. $\int x \sin 2x dx.$

1.6.19. $\int x\,\mathrm{arctg}\,x dx$.

1.6.20. $\int \arcsin x dx$.

1.6.21. $\int x^2 \sin x dx$.

1.6.22. $\int e^x \sin x dx$.

1.6.23. $\int x 5^x dx$.

1.6.24. $\int \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

1.6.25. $\int \sin \ln x dx$.

1.6.26. $\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1+x}}$.

Задачи для самостоятельной работы

Найти интегралы:

1.6.27. $\int \ln x dx$.

1.6.28. $\int x \ln x dx$.

1.6.29. $\int x \cos x dx$.

1.6.30. $\int e^x \cos x dx$.

1.6.31. $\int x^2 \cos x dx$.

1.6.32. $\int \frac{x \arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

1.6.33. $\int e^{2x} \sin 3x dx$.

1.6.34. $\int \arccos x dx$.

1.6.35. $\int x^2 e^{-x} dx$.

1.6.36. $\int \cos \ln x dx$.

1.6.37. $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) dx$.

1.6.38. $\int x \arcsin x dx$.

1.7 Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью называют дробь вида $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены соответственно n-й и m-й степени. Рациональная дробь называется правильной, если $n<m$, и неправильной, если $n \geq m$. Всякую неправильную дробь с помощью деления числителя на знаменатель можно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби. Поэтому интегрирование рациональных дробей сводится к интегрированию правильных рациональных дробей.

Всякая правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы конечного числа простейших дробей следующих четырех типов:

$$1)\ \frac{A}{x-a};\ \ 2)\ \frac{A}{(x-a)^m};\ \ 3)\ \frac{Ax+B}{x^2+px+q};\ \ 4)\ \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n},$$

где m и n – целые положительные числа, большие единицы; A, B, a, p, q – постоянные; квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, т. е. $\frac{p^2}{4}-q<0$.

Интегрирование простейших дробей 1, 2, 3-го типов мы уже рассмотрели. Для интегрирования простейшей дроби 4-го типа в числителе дроби нужно выделить производную квадратного трехчлена $2x+p$ и разложить полученный интеграл на сумму двух интегралов. Первый из них подстановкой $x^2+px+q=t$ приведется к виду $\int\frac{dt}{t^n}$, а второй имеет вид $\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^n}$. С помощью подстановки $x+\frac{p}{2}=u$ он преобразуется к интегралу вида $\int\frac{du}{\left(u^2+a^2\right)^n}$, который интегрированием по частям сводится к интегралу того же типа $\int\frac{du}{\left(u^2+a^2\right)^{n-1}}$, но с меньшим показателем степени в знаменателе. При этом можно использовать следующую рекуррентную формулу:

$$\int\frac{du}{\left(u^2+a^2\right)^n}=\frac{1}{2a^2(n-1)}\frac{u}{\left(u^2+a^2\right)^{n-1}}+\frac{1}{a^2}\frac{2n-3}{2n-2}\int\frac{du}{\left(u^2+a^2\right)^{n-1}}.$$

Повторяя этот процесс, мы, в конце концов, придем к табличному интегралу $\int\frac{du}{u^2+a^2}$.

Чтобы представить правильную рациональную дробь в виде суммы простейших дробей, нужно знаменатель этой дроби разложить на множители, каждый из которых является либо степенью линейной функции $x-a$, либо степенью квадратичной функции x^2+px+q, не имеющей действительных корней. После этого приступают к нахождению простейших дробей, составляющих в сумме данную дробь. Каждому сомножителю $\left(x-a\right)^k$ разложения знаменателя правильной дроби соответствует сумма *k* простейших дробей вида

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{\left(x-a\right)^2}+\frac{A_3}{\left(x-a\right)^3}+\ldots+\frac{A_k}{\left(x-a\right)^k}, \tag{1.4}$$

а каждому сомножителю $\left(x^2+px+q\right)^n$ разложения соответствует сумма *n* дробей вида

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{B_nx+C_n}{\left(x^2+px+q\right)^n}, \tag{1.5}$$

где $A_1,A_2,\ldots,A_k;B_1,B_2,\ldots,B_n;C_1,C_2,\ldots,C_n$ – неопределенные (неизвестные) коэффициенты (некоторые из них могут равняться нулю).

Отсюда получаем правило интегрирования рациональной дроби:

1) если рассматриваемая дробь неправильная, то нужно выделить из нее целую часть и представить ее в виде суммы целой части и правильной дроби;

2) разложить знаменатель правильной дроби на линейные и квадратичные множители, не имеющие действительных корней;

3) правильную рациональную дробь представить в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами, используя выражения вида (1.4) и (1.5);

4) полученное равенство умножить на общий знаменатель;

5) составить систему линейных уравнений для нахождения неопределенных коэффициентов. Для этого можно воспользоваться следующими двумя способами.

Способ *сравнения коэффициентов*. Раскрыть скобки, привести подобные члены и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях *x* в правой и левой частях полученного равенства.

Способ *частных значений*. Не раскрывая скобок, дать аргументу *x* столько различных значений, сколько имеется неопределенных коэффициентов (используя в качестве значений *x* прежде всего корни знаменателя).

В некоторых случаях целесообразно комбинировать оба способа.

6) решить полученную систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов;

7) представить интеграл от данной дроби в виде суммы интегралов от целой части и от соответствующих простейших дробей и вычислить эти интегралы.

Примеры:

1. $\displaystyle\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}dx.$

Подынтегральная рациональная дробь является неправильной, поэтому выделяем целую часть

$$
\begin{array}{r|l}
x^4-6x^3+12x^2+6 & x^3-6x^2+12x-8 \\
\underline{-\;x^4-6x^3+12x^2-8x} & \overline{x\qquad\qquad\qquad} \\
8x+6 &
\end{array}
$$

Таким образом,

$$\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}dx=\int\left(x+\frac{8x+6}{x^3-6x^2+12x-8}\right)dx.$$

Знаменатель дроби разлагается на множители следующим образом:

$$x^3-6x^2+12x-8=(x-2)^3.$$

По формуле (1.4) получаем:

$$\frac{8x+6}{(x-2)^3}=\frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{(x-2)^2}+\frac{A_3}{(x-2)^3}.$$

Умножим обе части равенства на общий знаменатель:

$$8x+6=A_1(x-2)^2+A_2(x-2)+A_3=A_1x^2+(A_2-4A_1)x+(4A_1-2A_2+A_3).$$

Неопределенные коэффициенты A_1, A_2, A_3 проще найти способом сравнения коэффициентов.

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях:

$$x^2 : A_1 = 0;$$
$$x \ : A_2 - 4A_1 = 8;$$
$$x^0 : 4A_1 - 2A_2 + A_3 = 6.$$

Отсюда находим $A_1 = 0, A_2 = 8, A_3 = 22$. Следовательно,

$$\frac{8x+6}{(x-2)^3} = \frac{8}{(x-2)^2} + \frac{22}{(x-2)^3}.$$

Таким образом, искомый интеграл равен

$$\int \frac{x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 6}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} dx = \int x dx + \int \frac{8}{(x-2)^2} dx + \int \frac{22}{(x-2)^3} dx =$$
$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{8}{x-2} - \frac{11}{(x-2)^2} + C.$$

2. $\displaystyle\int \frac{3x^2 + 3x + 12}{x^3 + x^2 - 2x} dx$.

Подынтегральная дробь правильная. Разложим знаменатель на множители $x^3 + x^2 - 2x = x\left(x^2 + x - 2\right) = x(x-1)(x-2)$.

Согласно формуле (1.4) множителю x знаменателя будет соответствовать дробь $\frac{A}{x}$, множителю $x-1$ – дробь $\frac{B}{x-1}$, множителю $x-2$ – дробь $\frac{C}{x+2}$. Поэтому разложение подынтегральной функции на простейшие дроби будет иметь вид

$$\frac{3x^2 + 3x + 12}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{3x^2 + 3x + 12}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}.$$

Отсюда получаем

$$3x^2 + 3x + 12 = A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1).$$

Неопределенные коэффициенты можно найти любым из двух способов. Несколько проще здесь применить способ частных значений. Полагая в последнем тождестве $x = 0$, получим

$$12 = A(-1)\cdot 2\,,\ -2A = 12\,,\ A = -6.$$

Полагая $x = 1$, получим

$$3+3+12 = 3B,\quad B = 6.$$

Пусть теперь $x = -2$:

$$12-16+12 = C(-2)\cdot(-3);\ \ 6C = 18;\ \ C = 3.$$

Поэтому

$$\int\frac{3x^2+3x+12}{x^3+x^2-2x}dx = \int\frac{-6}{x}dx + \int\frac{6}{x-1}dx + \int\frac{3}{x+2}dx =$$
$$= -6\ln|x| + 6\ln|x-1| + 3\ln|x+2| + C.$$

3. $\displaystyle\int\frac{x^6+x^4+3x^3+4x^2+10x+4}{x^4+2x^3+3x^2+4x+2}dx.$

Дробь неправильная, поэтому выделяем целую часть:

$$\begin{array}{l|l}
\;\; x^6 + 0 + x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 10x + 4 & x^4+2x^3+3x^2+4x+2 \\ \cline{2-2}
- \underline{x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 2x^2} & x^2-2x+2 \\
\qquad -2x^5 - 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 10x & \\
\quad - \underline{-2x^5 - 4x^4 - 6x^3 - 8x^2 - 4x} & \\
\qquad\qquad 2x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 14x + 4 & \\
\qquad\quad - \underline{2x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 8x + 4} & \\
\qquad\qquad\qquad x^3 + 4x^2 + 6x &
\end{array}$$

Таким образом,

$$\int\frac{x^6+x^4+3x^3+4x^2+10x+4}{x^4+2x^3+3x^2+4x+2}dx = \int\left(x^2-2x+2+\frac{x^3+4x^2+6x}{x^4+2x^3+3x^2+4x+2}\right)dx.$$

Разложим знаменатель на множители

$$x^4+2x^3+3x^2+4x+2 = (x+1)\left(x^3+x^2+2x+2\right) = (x+1)^2\left(x^2+2\right).$$

Согласно формуле (1.4) множителю знаменателя $(x+1)^2$ соответствует сумма простейших дробей $\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}$, а множителю x^2+2, согласно формуле (1.5), будет соответствовать дробь $\frac{Bx+C}{x^2+2}$. Разложение правильной дроби на простейшие будет иметь вид

$$\frac{x^3+4x^2+6x}{(x+1)^2(x^2+2)}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}+\frac{Bx+C}{x^2+2}.$$

Отсюда получаем

$$x^3+4x^2+6x=A_1(x+1)(x^2+2)+A_2(x^2+2)+(Bx+C)(x+1)^2.$$

Будем комбинировать оба способа нахождения неопределенных коэффициентов.

При $x=-1$ получаем $3A_2=-1+4-6$. Отсюда $A_2=-1$. Подставим $A_2=-1$ и перегруппируем:

$$x^3+4x^2+6x=(A_1+B)x^3+(A_1-1+2B+C)x^2+(2A_1+B+2C)x+(2A_1-2+C).$$

Далее сравним коэффициенты при одинаковых степенях x:

x^3: $1=A_1+B,$

x^2: $4=A_1-1+2B+C,$

x^1: $6=2A_1+B+2C,$

x^0: $0=2A_1-2+C$.

Решив систему, получим: $B=\frac{4}{3},\ A_1=-\frac{1}{3},\ C=\frac{8}{3}$.

Поэтому

$$\int\frac{x^6+x^4+3x^3+4x^2+10x+4}{x^4+2x^3+3x^2+4x+2}dx=\int(x^2-2x+2)dx+\int\frac{-\frac{1}{3}}{x+1}dx+\int\frac{-dx}{(x+1)^2}+$$

$$+\int\frac{\frac{4}{3}x+\frac{8}{3}}{x^2+2}dx=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+\frac{2}{3}\int\frac{2xdx}{x^2+2}+\frac{8}{3}\int\frac{dx}{x^2+2}=$$

$$=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x--\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+\frac{2}{3}\ln(x^2+2)+\frac{4\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

4. $\int \frac{dx}{x^5 - x^2}$.

Подынтегральная дробь правильная. Разложим знаменатель на множители

$$x^5 - x^2 = x^2\left(x^3 - 1\right) = x^2\left(x - 1\right)\left(x^2 + x + 1\right).$$

По формулам (6.1) и (6.2) разложение дроби на простейшие будет иметь вид

$$\frac{1}{x^2\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1},$$

откуда

$$1 = A_1\left(x-1\right)x\left(x^2+x+1\right) + A_2\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right) + Bx^2\left(x^2+x+1\right) + \left(Cx+D\right)\left(x-1\right)x^2.$$

Комбинируя способы нахождения коэффициентов, получим:

$$1 = \left(A_1 + B + C\right)x^4 + \left(A_2 + B + D - C\right)x^3 + \left(B - D\right)x^2 - A_1 x - A_2 .$$

При $x = 0$ получаем $1 = -A_2$, $A_2 = -1$;

при $x = 1$ имеем $1 = 3B$, $B = \frac{1}{3}$.

Приравниваем коэффициенты слева и справа при одинаковых степенях x:

$x^4 : A_1 + B + C = 0,$

$x^3 : A_2 + B + D - C = 0,$

$x^2 : B - D = 0,$

$x^1 : -A_1 = 0,$

$x^0 : -A_2 = 1.$

Отсюда: $C = -\frac{1}{3}$, $D = \frac{1}{3}$.

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{x^5 - x^2} = -\int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| -$$

$$-\frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{2}(2x+1) - \frac{3}{2}}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{x} + \ln|x-1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln\left|x^2+x+1\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

5. $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx.$

Подынтегральная дробь правильная. Знаменатель уже разложен на множители. Представим подынтегральную дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{x^2+2x+1}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Освобождаясь от знаменателей, имеем

$$x^2+2x+1 = (Ax+B)\left(x^2+1\right) + Cx + D;$$

$$x^2+2x+1 = Ax^3 + Bx^2 + (A+C)x + B + D.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$x^3 : A = 0;$$

$$x^2 : B = 1;$$

$$x^1 : A + C = 2,\ C = 2 - A = 2;$$

$$x^0 : B + D = 1,\ D = 1 - B = 0.$$

Получаем

$$\int \frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{2xdx}{(x^2+1)^2} = \operatorname{arctg} x + \int (x^2+1)^{-2}\, d(x^2+1) =$$

$$= \operatorname{arctg} x - \frac{1}{x^2+1} + C.$$

Задачи для аудиторной работы

Найти интегралы:

1.7.1. $\int \frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}dx.$

1.7.2. $\int \frac{(x-1)}{x^2(x-2)(x+1)^2}dx.$

1.7.3. $\int \frac{x^4}{(x+2)(x^2-1)}dx.$

1.7.4. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}.$

1.7.5. $\int \frac{x^2-2}{x^3(x+2)^2}dx.$

1.7.6. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}.$

1.7.7. $\int \frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)}dx.$

1.7.8. $\int \frac{xdx}{x^3+1}.$

1.7 9. $\int \frac{dx}{x^2+x-2}.$

1.7.10. $\int \frac{2x+3}{(x-2)^3}dx.$

1.7.11. $\int \frac{x^4+3x^3-1}{(x+1)^2}dx.$

1.7.12. $\int \frac{x^5dx}{x^3+1}.$

1.7.13. $\int \frac{x^5+x^4-2}{x^4-2x^2+1}dx.$

1.7.14. $\int \frac{(5x^2-1)dx}{(x^2+3)(x^2-2x+5)}.$

1.7.15. $\int \frac{dx}{x^2(x-2)(x+1)^2}.$

1.7.16. $\int \frac{dx}{x^4-1}.$

1.7.17. $\int \frac{x^3+x+1}{x^3+x}dx.$

1.7.18. $\int \frac{(5x-13)dx}{(x^2-5x+6)^2}.$

Задачи для самостоятельной работы

Найти интегралы:

1.7.19. $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}$.

1.7.20. $\int \frac{dx}{x^4+x^2}$.

1.7.21. $\int \frac{x^3dx}{x^2+2x+3}$.

1.7.22. $\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}dx.$

1.7.23. $\int \frac{x^2+5x+9}{(x-2)^3}dx.$

1.7.24. $\int \frac{x^3-10x+25}{x^2(x-5)^2}dx.$

1.7.25. $\int \frac{xdx}{x^4+x^2+1}$.

1.7.26. $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

1.8 Интегрирование тригонометрических выражений

1.8.1. Интегралы видов

$$\int \sin mx \cos nx dx, \quad \int \sin mx \sin nx dx, \quad \int \cos mx \cos nx dx$$

берутся с помощью следующих тригонометрических формул:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right),$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right).$$

Рассмотрим примеры:

1. $\int \sin 3x \cos 5x dx = \frac{1}{2}\int (-\sin 2x + \sin 8x)dx = \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + C.$

2. $\int \cos 2x \cos 6x dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos 4x + \cos 8x\right)dx = \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{16}\sin 8x + C.$

1.8.2. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$. Рассмотрим следующие случаи.

Случай 1. Один из показателей m или n – нечетное положительное целое число, другой – произвольное число. В этом случае от нечетной степени нужно отделить первую степень $\sin x$ или $\cos x$, выразить оставшуюся четную степень функции через кофункцию с помощью тождества $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и применить подстановку $\cos x = t$, если m – нечетное, и $\sin x = t$, если n – нечетное. В результате получается степенной интеграл.

3. $\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cos x dx = \int (1-\sin^2 x)\cos x dx = \begin{bmatrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{bmatrix} =$

$$= \int (1-t^2)dt = t - \frac{1}{3}t^2 + C = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$$

4. $\int \sin^5 x \cos^{\frac{2}{3}} x dx = \int \sin^4 x \cos^{\frac{2}{3}} x \sin x dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \cos^{\frac{2}{3}} x \sin x dx =$

$$= \begin{bmatrix} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{bmatrix} = -\int (1-t^2)^2 t^{\frac{2}{3}} dt = -\int (t^{\frac{14}{3}} - 2t^{\frac{8}{3}} + t^{\frac{2}{3}})dt =$$

$$= -\frac{3}{17}t^{\frac{17}{3}} + \frac{6}{11}t^{\frac{11}{3}} - \frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}} + C = -\frac{3}{17}\cos^{\frac{17}{3}} x + \frac{6}{11}\cos^{\frac{11}{3}} x - \frac{3}{5}\cos^{\frac{5}{3}} x + C.$$

Случай 2. Оба показателя m и n – четные неотрицательные числа (в частности, одно из них может равняться нулю). Здесь нужно воспользоваться формулами понижения степени:

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha), \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha), \quad \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha.$$

5. $\int \sin^4 x dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x + \cos^2 2x)dx =$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C =$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

6. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$

Случай 3. Показатели m и n – целые числа одинаковой четности, хотя бы один из показателей отрицателен. В этом случае применяется подстановка $\mathrm{tg} x = t,$ откуда

$$\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}};\quad \cos x = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}};\quad x = \operatorname{arctg} t;\quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Можно воспользоваться и подстановкой $\operatorname{ctg} x = t,$ тогда

$$\sin x = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}};\quad \cos x = \frac{\operatorname{ctg} x}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}};\quad x = \operatorname{arcctg} t;\quad dx = \frac{-dt}{1+t^2}.$$

7. $$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx = \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}dx = \begin{bmatrix} \operatorname{tg} x = t \\ \dfrac{1}{\cos^2 x}dx = dt \end{bmatrix} = \int t^2 dt = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C.$$

8. $$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = \begin{bmatrix} \operatorname{tg} x = t,\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{\dfrac{t^3}{\sqrt{(1+t^2)^3}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}} =$$

$$= \int \frac{1+t^2}{t^3}dt = -\frac{1}{2t^2} + \ln|t| + C = \ln|\operatorname{tg}\ x| - \frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x} + C.$$

Случай 4. Показатели m и n – целые числа различной четности, причем нечетный показатель является отрицательным. При нахождении интегралов этого типа полезно бывает введение «тригонометрической единицы» $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ или некоторой ее степени.

Случай 5. Сумма показателей $m+n$ есть четное отрицательное целое число, а m и n – любые числа. В этом случае можно применить подстановку $\operatorname{tg} x = t.$

9. $$\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^7 x}}.$$

Здесь $m+n = -\frac{7}{2} - \frac{1}{2} = -4$, поэтому можно воспользоваться подставкой $\operatorname{tg} x = t.$ Тогда

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos^7 x}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{tg}x\cos^8 x}}=\int\frac{dx}{\cos^4 x\sqrt{\mathrm{tg}x}}=\int\frac{d(\mathrm{tg}x)}{\cos^2 x\sqrt{\mathrm{tg}x}}=\begin{bmatrix}\mathrm{tg}x=t\\ \dfrac{1}{\cos^2 x}=t^2+1\end{bmatrix}=$$

$$=\int\frac{(1+t^2)dt}{\sqrt{t}}=\int t^{-\frac{1}{2}}dt+\int t^{\frac{3}{2}}dt=2t^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+C=2\sqrt{\mathrm{tg}x}+\frac{2}{5}\sqrt{\mathrm{tg}^5 x}+C.$$

При вычислении интеграла была использована формула

$$\frac{1}{\cos^2 x}=1+\mathrm{tg}^2 x.$$

1.8.3. Интегралы вида $\int \mathrm{tg}^m x dx;$ $\int \mathrm{ctg}^m x dx,$ где m – целое положительное число, не равное единице (при $m=1$ интеграл будет табличным).

Первый интеграл берется подстановкой $\mathrm{tg}x=t,$ второй – подстановкой $\mathrm{ctg}\,x=t.$

10. $$\int \mathrm{tg}^4 x dx=\begin{bmatrix}\mathrm{tg}x=t\\ x=\mathrm{arctg}t\\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{bmatrix}=\int\frac{t^4}{1+t^2}dt=\int\left(t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)dt=\frac{t^3}{3}-t+\mathrm{arctg}\,t+C=$$

$$=\frac{\mathrm{tg}^3 x}{3}-\mathrm{tg}x+\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}x)+C=\frac{\mathrm{tg}^3 x}{3}-\mathrm{tg}x+x+C.$$

1.8.4. Интегралы вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$, где R – рациональная функция.

С помощью универсальной тригонометрической подстановки $\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}=t$ интегралы этого вида приводятся к интегралам от рациональной алгебраической функции новой переменной t:

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t\ ;$$

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x=2\operatorname{arctg}t;\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Универсальная тригонометрическая подстановка часто ведет к громоздким выкладкам. Применяя эту подстановку, мы могли бы вычислить и все четыре вида рассмотренных выше интегралов, однако это привело бы к значительному усложнению вычислений. Укажем еще три случая, в которых можно избежать универсальной тригонометрической подстановки:

а) если $R(\sin x,\cos x)$ – нечетная функция относительно $\sin x$, т. е. если $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x),$ то целесообразно применить подстановку $\cos x=t$;

б) если $R(\sin x,\cos x)$ – нечетная функция относительно $\cos x$, т. е. если $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то целесообразно применить подстановку $\sin x=t$;

в) если $R(\sin x,\cos x)$ – четная функция относительно $\sin x$ и $\cos x$, т. е. если $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, то целесообразно применить подстановку $\operatorname{tg}x=t$.

11. $$\int\frac{dx}{9+8\cos x+\sin x}=\left[\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\right]=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{9+\frac{8(1-t^2)}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}}=$$

$$=2\int\frac{dt}{t^2+2t+17}=2\int\frac{dt}{(t+1)^2+16}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t+1}{4}+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{4}+C.$$

12. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^3 x}=\left[\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\right]=\int\frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{\dfrac{8t^3}{(1+t^2)^3}}=\frac{1}{4}\int\frac{(1+t^2)^2}{t^3}\,dt=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^3}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}+\frac{1}{4}\int t\,dt=$

$$=-\frac{1}{8}t^{-2}+\frac{1}{2}\ln|t|+\frac{1}{8}t^2+C=-\frac{1}{8\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}+\frac{1}{2}\ln\left|\lg\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+C.$$

13. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos x}$.

Подынтегральная функция нечетна относительно $\cos x$, поэтому можно применить подстановку $\sin x=t$, тогда

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos x}=\begin{bmatrix}\sin x=t\\ x=\arcsin t\\ dx=\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\\ \cos x=\sqrt{1-t^2}\end{bmatrix}=\int\frac{dt}{t^2\sqrt{1-t^2}\;\;\sqrt{1-t^2}}=\int\frac{dt}{t^2(1-t^2)}=$$

$$=\int\frac{1-t^2+t^2}{t^2(1-t^2)}\,dt=\int\frac{dt}{t^2}+\int\frac{dt}{1-t^2}=-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=-\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|+C.$$

14. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 x-5\sin x\cos x}$.

Так как при изменении знаков у $\sin x$ и $\cos x$ подынтегральное выражение не меняет знака, применяем подстановку $\operatorname{tg}x=t$. Разделив числитель и знаменатель на $\cos^2 x$, получим

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x-5\sin x\cos x}=\int\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x-5\operatorname{tg}x}\;\frac{dx}{\cos^2 x}=[\operatorname{tg}x=t]=\int\frac{dt}{t^2-5t}=$$

$$=\int\frac{dt}{\left(t-\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{25}{4}}=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{t-\dfrac{5}{2}-\dfrac{5}{2}}{t-\dfrac{5}{2}+\dfrac{5}{2}}\right|+C=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}x-5}{\operatorname{tg}x}\right|+C.$$

15. $\int \frac{\sin^3 xdx}{4+\cos^2 x}$.

Подынтегральная функция нечетна относительно синуса, поэтому сделаем подстановку $\cos x = t$.

$$\int \frac{\sin^2 x}{4+\cos^2 x}\sin xdx = \left[\begin{array}{l}\cos x = t\\ -\sin xdx = dt\end{array}\right] = -\int \frac{1-t^2}{4+t^2}dt = \int \frac{t^2+4-5}{4+t^2}dt =$$

$$= \int dt - 5\int \frac{dt}{4+t^2} = t - \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} = \cos x - \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{2} + C.$$

16. $\int \frac{dx}{5\cos^2 x - 9\sin^2 x}$.

Подынтегральная функция четна относительно $\sin x$ и $\cos x$, поэтому можно применить подстановку $\operatorname{tg} x = t$.

$$\int \frac{dx}{5\cos^2 x - 9\sin^2 x} = \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x = t\\ x = \operatorname{arctg} t\\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2}\end{array}\right] = \int \frac{1}{5\dfrac{1}{1+t^2} - 9\dfrac{t^2}{1+t^2}}\,\frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{dt}{1-9t^2} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3t)}{5-9t^2} = \frac{1}{6\sqrt{5}}\ln\left|\frac{3t+\sqrt{5}}{3t-\sqrt{5}}\right| + C = \frac{1}{6\sqrt{5}}\ln\left|\frac{3\operatorname{tg} x+\sqrt{5}}{3\operatorname{tg} x-\sqrt{5}}\right| + C.$$

Задачи для аудиторной работы

Найти интегралы:

1.8.1. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^5 2x}dx.$

1.8.2. $\int \sin 3x \cos 2x dx.$

1.8.3. $\int \cos 4x \cos 7x dx.$

1.8.4. $\int \sin^2 3x dx.$

1.8.5. $\int \cos^4 x dx.$

1.8.6. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx.$

1.8.7. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx.$

1.8.8. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx.$

1.8.9. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx.$

1.8.10. $\int \operatorname{ctg}^3 x dx.$

1.8.11. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}dx.$

1.8.12. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx.$

1.8.13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+\cos x}}.$

1.8.14. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}.$

1.8.15. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x} dx.$

1.8.16. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos x} dx.$

1.8.17. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}.$

1.8.18. $\int \frac{\sin^3 x}{4+\cos x} dx.$

1.8.19. $\int \mathrm{tg}^4 x dx.$

1.8.20. $\int \frac{\sin^5 x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}.$

1.8.21. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}.$

1.8.22. $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} dx.$

1.8.23. $\int \sin 3x \cos 5x dx.$

1.8.24. $\int \sin 2x \sin 4x dx.$

1.8.25. $\int \cos^3 x dx.$

1.8.26. $\int \sqrt[3]{\cos^2 x} \sin^3 x dx.$

1.8.27. $\int \sin^2 3x dx.$

1.8.28. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx.$

1.8.29. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx.$

1.8.30. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}.$

1.8.31. $\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x} dx.$

1.8.32. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 2\sin x \cos x + 3\cos^2 x}.$

1.8.33. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx.$

1.8.34. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}.$

1.8.35. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$

1.8.36. $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos^7 x \sin x}}.$

1.8.37. $\int \mathrm{tg}^5 2x dx.$

1.8.38. $\int \mathrm{ctg}^4 x dx.$

1.8.39. $\int \sin^3 \frac{x}{5} \cos^3 \frac{x}{5} dx.$

1.8.40. $\int x \cos^3 x^2 dx.$

1.8.41. $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x}.$

1.8.42. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}}.$

Задачи для самостоятельной работы

Найти интегралы:

1.8.43. $\int \sin 10x \sin 15x dx.$

1.8.44. $\int \sin \frac{x}{3} \cos \frac{2x}{3} dx.$

1.8.45. $\int \cos^4 \frac{x}{2} dx.$

1.8.46. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx.$

1.8.47. $\int \sin^3 x dx.$

1.8.48. $\int (1+2\cos x)^2 dx.$

1.8.49. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx.$

1.8.50. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx.$

1.8.51. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x}.$

1.8.52. $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^6 x}.$

1.8.53. $\int \mathrm{tg}^4 x dx.$

1.8.54. $\int \mathrm{ctg}^5 x dx.$

1.8.55. $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}.$

1.8.56. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 9\cos^2 x}.$

1.8.57. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^7 x}.$

1.8.58. $\int \frac{dx}{4 - 5\sin x}.$

1.8.59. $\int \sqrt{1+\sin x} dx.$

1.8.60. $\int \sin^5 x \sqrt[3]{\cos x} dx.$

1.8.61. $\int \frac{1+\mathrm{tg} x}{\sin 2x} dx.$

1.8.62. $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^4 x}.$

1.9 Тригонометрические подстановки

Рассмотрим 4 случая.

Случай 1. Интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx,$ где R – рациональная функция, приводится к рациональной функции относительно $\sin t$ и $\cos t$ при помощи тригонометрической подстановки $x = a\sin t$ (или $a\cos t$).

Случай 2. Интеграл вида $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ берется с помощью подстановки $x=a\,\mathrm{tg}\,t$ (или $a\,\mathrm{ctg}\,t$).

Случай 3. Интеграл вида $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)$ берется с помощью подстановки $x=\dfrac{a}{\cos t}$ $\left(\text{или } \dfrac{a}{\sin t}\right)$.

Рассмотрим следующие примеры:

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

Применяя подстановку $x=a\sin t$, $dx=a\cos t dt$, получим

$$\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}=\left(a^2-a^2\sin^2 t\right)^{\frac{3}{2}}=a^3\left(1-\sin^2 t\right)^{\frac{3}{2}}=a^3\cos^3 t.$$

Тогда

$$\int\frac{dx}{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{a\cos t dt}{a^3\cos^3 t}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{\cos^2 t}=\frac{\mathrm{tg}t}{a^2}+C=\frac{1}{a^2}\frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}+C=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C.$$

2. $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$.

Применив подстановку $x=2\,\mathrm{tg}\,t$, $dx=\dfrac{2dt}{\cos^2 t}$, получим

$$\sqrt{4+x^2}=\sqrt{4+4\,\mathrm{tg}^2 x}=2\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}=\frac{2}{\cos t}.$$

Имеем

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}=\int\frac{\frac{2dt}{\cos^2 t}}{2\mathrm{tg}t\frac{2}{\cos t}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sin t}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{\sin t}-\mathrm{ctg}t\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2 t}-\mathrm{ctg}t\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}-\frac{2}{x}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}\right|+C.$$

При нахождении табличного интеграла мы воспользовались формулой

$$\int \frac{dt}{\sin t} = \ln\left|\frac{1}{\sin t} - \operatorname{ctg} t\right| + C,$$

так как при ее помощи легче перейти к прежней переменной x. Действительно,

$$\operatorname{tg} x = \frac{x}{2},\ \operatorname{ctg} t = \frac{2}{x},\ \sin t = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 t}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}.$$

3. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}\,dx.$

Воспользуемся подстановкой $x = \frac{2}{\cos t}$, $dx = \frac{2\operatorname{tg} t}{\cos t}dt$, $\cos t = \frac{2}{x}$ и

$$\sqrt{x^2-4} = \sqrt{\frac{4}{\cos^2 t} - 4} = 2\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}} = 2\frac{\sin t}{\cos t} = 2\operatorname{tg} t;$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}dx = \int \frac{2\operatorname{tg} t}{\frac{4}{\cos^2 t}} \cdot \frac{2\operatorname{tg} t}{\cos t}dt = \int \frac{\sin^2 t}{\cos t}dt = \int \frac{dt}{\cos t} - \int \cos t\,dt =$$

$$=\ln\left|\frac{1}{\cos t}+\operatorname{tg} t\right| - \sin t + C = \ln\left|\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}{\frac{2}{x}}\right| - \sqrt{1-\frac{4}{x^2}} + C = \ln\left|\frac{x^2+\sqrt{x^2+4}}{2}\right| - \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} + C.$$

При использовании подстановок $x = \frac{a}{\cos t}$ или $x = \frac{a}{\sin t}$ для возврата к старой переменной x нужно помнить формулы

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos t},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}.$$

При использовании подстановки $x = \alpha\operatorname{tg} t$ или $x = \alpha\operatorname{ctg} t$ – формулы

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}},\ \cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}.$$

Случай 4. Интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ путем преобразования квадратного трехчлена в сумму или разность квадратов сводится к одному из рассмотренных нами трех видов интегралов.

4. $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx = \int \sqrt{4-(x+1)^2}\,dx = \left[\begin{matrix} x+1=u \\ dx=du \end{matrix}\right] =$

$$= \int \sqrt{4-u^2}\,du = \left[\begin{matrix} u=2\sin t \\ du=2\cos t dt \end{matrix}\right] = \int \sqrt{4\left(1-\sin^2 t\right)}\,2\cos t dt = 4\int \cos^2 t dt =$$

$$= 2\int \left(1+\cos 2t\right)dt = 2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C = 2t+2\sin t\cos t + C =$$

$$= 2\arcsin\frac{u}{2} + 2\sin\left(\arcsin\frac{u}{2}\right)\cos\left(\arccos\frac{u}{2}\right)+C = 2\arcsin\frac{u}{2}+$$

$$+u\sqrt{1-\frac{u^2}{4}}+C = 2\arcsin\frac{x+1}{2}+\left(\frac{x+1}{2}\right)\sqrt{3-x^2-2x}+C.$$

5. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{(x+1)^2+1}} = \left[\begin{matrix} x+1=\mathrm{tg}\,t \\ dx=\dfrac{dt}{\cos^2 t} \end{matrix}\right] = \int \frac{\dfrac{dt}{\cos^2 t}}{\mathrm{tg}\,t\sqrt{\mathrm{tg}^2 t+1}} =$

$$= \int \frac{dt}{\sin t} = \ln\left|\frac{1}{\sin t} - \mathrm{ctg}\,t\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}}{\mathrm{tg}\,t} - \frac{1}{\mathrm{tg}\,t}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x+2}-1}{x+1}\right| + C.$$

6. $\int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2+1}} = \left[\begin{matrix} t=\mathrm{tg}\,x \\ dt=\dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{matrix}\right] = \int \frac{\dfrac{dx}{\cos^2 x}}{\mathrm{tg}^2 x\dfrac{1}{\cos x}} = \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} =$

$$= \int \sin^{-2} x d\left(\sin x\right) = -\frac{1}{\sin x} + C = C - \frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}}{\mathrm{tg}\,x} = C - \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}.$$

Задачи для аудиторной работы

Найти интегралы:

1.9.1. $\int \sqrt{4-x^2}\,dx.$

1.9.2. $\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}.$

1.9.3. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx.$ 1.9.4. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}dx.$

1.9.5. $\int \frac{dx}{\left(x^2+16\right)\sqrt{9-x^2}}.$ 1.9.6. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x+x^2\right)^3}}.$

1.9.7. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3}dx.$ 1.9.8. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}dx.$

1.10 Интегрирование иррациональных выражений

Рассмотрим следующие типы интегралов.

1.10.1 Интеграл вида $\int R(x,\sqrt[k]{x},\sqrt[m]{x},...)dx$ с помощью подстановки $x=t^n$, где n – наименьшее общее кратное чисел $k,m,...$, сводится к интегралу от рациональной функции

1. $$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+x}=\left[\begin{array}{l} x=t^4 \\ dx=4t^3dt \\ t=\sqrt[4]{x} \end{array}\right]=\int \frac{t^2\,4t^3dt}{t^3+t^4}=4\int \frac{t^2dt}{t+1}=4\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$$=4\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\right)+C=4\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right|\right)+C.$$

2. $$\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[6]{x^7}}dx=\left[\begin{array}{l} x=t^{12} \\ dx=12t^{11}dt \\ t=\sqrt[12]{x} \end{array}\right]=\int \frac{(t^6+t^4)12t^{11}dt}{t^{15}+t^{14}}=12\int \frac{t^3+tdt}{t+1}=$$

$$=12\int\left(t^2-t+2-\frac{2}{t+1}\right)dt=12\left(\frac{1}{3}t^2-\frac{1}{2}t^2+2t-2\ln|t+1|\right)+C=$$

$$=4\sqrt[4]{x}-6\sqrt[6]{x}-24\sqrt[12]{x}-24\ln\left|\sqrt[12]{x}+1\right|+C.$$

1.10.2 Интеграл вида $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},...\right)dx$ рационализируется подстановкой $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)=t^n$, где n – наименьшее общее кратное чисел $n_1, n_2, ...$.

3. $$\int\frac{dx}{(1+x)^{\frac{3}{2}}+(1+x)^{\frac{1}{2}}}=\begin{bmatrix}1+x=t^2\\ dx=2tdt\\ t=\sqrt{1+x}\end{bmatrix}=\int\frac{2tdt}{t^3+t}=2\int\frac{dt}{t^2+1}=2\operatorname{arctg}t+C=2\operatorname{arctg}\sqrt{1+x}+C.$$

4. $$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(5x+2)^2}-\sqrt{5x+2}}=\begin{bmatrix}5x+2=t^6,\ x=\dfrac{t^6-2}{5}\\ dx=\dfrac{6}{5}t^5dt,\ t=\sqrt[6]{5x+2}\end{bmatrix}=\int\frac{\frac{6}{5}t^5dt}{t^4+t^3}=$$

$$=\frac{6}{5}\int\frac{t^2dt}{t-1}=\frac{6}{5}\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt\,\frac{6}{5}\left(\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)+C=$$

$$=\frac{3}{5}\sqrt[3]{5x+2}+\frac{6}{5}\sqrt[6]{5x+2}+\frac{5}{6}\ln\left|\sqrt[6]{5x+2}-1\right|+C.$$

1.10.3 Интеграл вида $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx,$ т. е. подынтегральная функция рациональна относительно x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$.
Выделив полный квадрат в подкоренном выражении и заменив переменные, получим один из трех интегралов, содержащих

$$\sqrt{u^2-a^2},\sqrt{u^2+a^2},\sqrt{a^2-u^2}.$$

Интегралы такого типа берутся с помощью тригонометрических подстановок, которые были рассмотрены в подразделе 1.9.

1.10.4 Вычисление интегралов вида $\int R\left(P(x),\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ часто сводится к вычислению интегралов следующих трех типов:

$$\int\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\quad \int P_n(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx,\quad \int\frac{dx}{(x-2)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Здесь n – натуральное число.

Рассмотрим $\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Можно доказать, что

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где $Q_{n-1}(x)$ – многочлен степени $n-1$ с неопределенными коэффициентами; λ – неопределенный коэффициент.

Для нахождения неопределенных коэффициентов нужно продифференцировать последнее равенство, затем умножить на $\sqrt{ax^2+bx+c}$ и, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, определить λ и коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(x)$.

Заметим, что эту формулу применяют обычно при $n>1$. Если $P_n(x)$ – линейная функция, то проще воспользоваться ранее рассмотренным способом.

5. $\int \frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx = \left(Ax^2+Bx+C\right)\sqrt{x^2-2x+5} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}.$

Продифференцируем это равенство:

$$\frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}} = (2Ax+B)\sqrt{x^2-2x+5} + \frac{(Ax^2+Bx+C)(x-1)}{\sqrt{x^2-2x+5}} + \lambda \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+5}}.$$

Умножим на $\sqrt{x^2-2x+5}$:

$$3x^3-7x^2+1 = (2Ax+B)\left(x^2-2x+5\right) + (Ax^2+Bx+C)(x-1) + \lambda,$$

$$3x^3-7x^2+1 = 3Ax^3 + (2B-5A)x^2 + (10A-3B+C)x + 5B - C - \lambda.$$

Сравним коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$x^3 : 3A = 3,\ \ A = 1;$$

$$x^2 : 2B-5A = -7,\ \ B = -1;$$

$$x^1 : 10A-3B+C = 0,\ \ C = -13;$$

$$x^0 : 5B - C + \lambda,\ \ \lambda = -7.$$

Следовательно,

$$\int \frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx = \left(x^2-x-13\right)\sqrt{x^2-2x+5}-7\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+4}} =$$

$$= \left(x^2-x-13\right)\sqrt{x^2-2x+5}-7\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+5}\right|+C.$$

Рассмотрим $\int P_n(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx.$ Этот интеграл сводится к интегралу $\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$:

$$\int P_n(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{P_n(x)(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{Q_{n+2}(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$$

Интеграл $\int \frac{dx}{(x-2)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$ также сводится к интегралу $\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ путем применения обратной подстановки

$$x-\alpha=\frac{1}{u},\ dx=-\frac{du}{u^2},\ x=\frac{1+\alpha u}{u},$$

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u^n}\sqrt{\frac{a(1+\alpha u)^2}{u^2}+\frac{b(1+\alpha u)}{u}+c}} =$$

$$= \int \frac{u^{n-1}du}{\sqrt{a(1+\alpha u)^2+b(1+\alpha u)u+cu^2}} = \int \frac{R_{n-1}(u)du}{\sqrt{a_1u^2+b_1u+c_1}},$$

где a_1, b_1, c_1 – коэффициенты трехчлена, полученные после приведения подобных членов.

6. $\int (8x^2-3x)\sqrt{x^2+4}dx = \int \frac{(8x^2-3x)(x^2+4)}{\sqrt{x^2+4}}dx = \int \frac{8x^4-3x^3-32x^2-12x}{\sqrt{x^2+4}}dx =$

$$= \left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)\sqrt{x^2+4}+\lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = J;$$

$$8x^4-3x^3-32x^2-12x=(3Ax^2+2Bx+C)(x^2+4)+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+\lambda;$$

$$x^4: 3A+A=8, A=2;$$

$$x^3: 2B+B=-3,\quad B=-1;$$

$$x^2: 12A+C+C=32,\quad C=4;$$

$$x^1\ : 8B+D=-12, D=-4;$$

$$x^0: 4C+\lambda=0,\quad \lambda=-16;$$

$$J=(2x^3-x^2+4x-4)\sqrt{x^2+4}-16\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}=$$

$$=(2x^3-x^2+4x-4)\sqrt{x^2+4}-16\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|+C.$$

7. $$\int\frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}=\begin{bmatrix} t=\dfrac{1}{x+1},\ x=\dfrac{1-t}{t} \\ dx=-\dfrac{dt}{t^2} \end{bmatrix}=\int\frac{-\dfrac{dt}{t^2}}{\dfrac{1}{t^3}\sqrt{\dfrac{(1-t)^2}{t}+\dfrac{2-2t}{t}}}=-\int\frac{t^2dt}{\sqrt{1-t^2}}=$$

$$=\left(At+B\right)\sqrt{1-t^2}+\lambda\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=J;$$

$$-\frac{t^2dt}{\sqrt{1-t^2}}=A\sqrt{1-t^2}-\frac{(At+B)t}{\sqrt{1-t^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{1-t^2}};$$

$$-t^2=A(1-t^2)-At^2-Bt+\lambda;$$

$$A=\frac{1}{2};\quad B=0;\quad \lambda=-\frac{1}{2}.$$

$$J=\frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2}-\frac{1}{2}\arcsin t+C=\frac{1}{2(x+1)}\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{x+1}+C.$$

Задачи для аудиторной работы

Вычислить интегралы:

1.10.1. $\displaystyle\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx.$

1.10.2. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}dx}{x^{\frac{3}{4}}+1}.$

1.10.3. $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx.$

1.10.4. $\int \frac{xdx}{(3x-1)\sqrt{3x-1}}.$

1.10.5. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{(1-x)^2}.$

1.10.6. $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

1.10.7. $\int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}.$

1.10.8. $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx.$

1.10.9. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}.$

1.10.10. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}.$

1.10.11. $\int \frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx.$

1.10.12. $\int \frac{xdx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}.$

1.10.13. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}dx.$

1.10.14. $\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$

1.10.15. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx.$

1.10 16. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx.$

1.10.17. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$

1.10.18. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}.$

1.10.19. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a^2}}.$

1.10.20. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x+x^2)^3}}.$

1.10.21. $\int \frac{dx}{x\sqrt{10x^2-6x+1}}.$

1.10.22. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x-\sqrt[3]{x^2}}.$

1.10.23. $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx.$

1.10.24. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}.$

1.10.25. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}.$

1.10.26. $\int \frac{x^2-x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}dx.$

Задачи для самостоятельной работы

Вычислить интегралы:

1.10.27. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

1.10.28. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx$.

1.10.29. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx$.

1.10.30. $\int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}}$.

1.10.31. $\int \sqrt{25-x^2}dx$.

1.10.32. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2-25}}$.

1.10.33. $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^4}dx$.

1.10.34. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$.

1.10.35. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[4]{x}}$.

1.10.36. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$.

1.10.37. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-5x+3}}$.

1.10.38. $\int \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}+1}dx$.

1.10.39. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x-\sqrt[3]{x^2}}$.

1.10.40. $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$.

1.10.41. $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$.

1.10.42. $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$.

1.11 Задачи различных типов

Задачи для аудиторной работы

Вычислить интегралы:

1.11.1. $\int \frac{x^3dx}{x^8+1}$.

1.11.2. $\int \frac{x^7dx}{(1+x^4)^2}$.

1.11.3. $\int \frac{2x^2-x^5}{1+x^6}dx$.

1.11.4. $\int \frac{x^2dx}{x^6-x^3+1}$.

1.11.5. $\int \frac{dx}{x(x^2+5)}$.

1.11.6. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(1+x^2)}$.

1.11.7. $\int \frac{1-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}}dx$.

1.11.8. $\int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{(4x^2-2x+1)^3}}$.

1.11.9. $\int x^3\sqrt[4]{1+x^2}dx$.

1.11.10. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$.

1.11.11. $\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

1.11.12. $\int \frac{\ln\cos x dx}{\cos^2 x}$.

1.11.13. $\int e^{\sqrt{x}}\sqrt{x}dx$.

1.11.14. $\int \frac{x\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

1.11.15. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x+3\cos^2 x}$.

1.11.16. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x-3}+\sqrt{x-3}}$.

1.11.17. $\int \frac{dx}{2+\cos x}$.

1.11.18. $\int \frac{xdx}{1+\cos x}$.

1.11.19. $\int \frac{dx}{\sin x\cos^5 x}$.

1.11.20. $\int \frac{\sin x dx}{1-\sin x}$.

1.11.21. $\int \sqrt{x^2+4x+5}dx$.

1.11.22. $\int x\sqrt{x^2+4x-5}dx$.

1.11.23. $\int xe^{2x}dx$.

1.11.24. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4e^x-5}$.

1.11.25. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$.

1.11.26. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}}$.

1.11.27. $\int \frac{e^x-2}{e^{2x}+4}dx$.

1.11.28. $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2}dx$.

1.11.29. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

1.11.30. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}dx$.

Задачи для самостоятельной работы

Вычислить интегралы:

1.11.31. $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

1.11.32. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}.$

1.11.33. $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}.$

1.11.34. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}}.$

1.11.35. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x}+\sqrt[4]{5-x}}.$

1.11.36. $\int \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{x^3}dx.$

1.11.37. $\int \frac{3xdx}{\sqrt{1+x^4}}.$

1.11.38. $\int \frac{xdx}{\cos^2 3x}.$

1.11.39. $\int \frac{x\,\mathrm{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

1.11.40. $\int \frac{3^x dx}{1-9^x}.$

1.11.41. $\int \sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}dx.$

1.11.42. $\int x^3 e^{-x^2}dx.$

1.11.43. $\int \frac{2+\sqrt{\mathrm{ctg}x}}{\sin^2 x}dx.$

1.11.44. $\int \frac{2+\cos x}{\sin x}dx.$

1.11.45. $\int \cos x\cos^2 3xdx.$

1.11.46. $\int x\arcsin xdx.$

1.11.47. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-5}-\sqrt{x}}.$

1.11.48. $\int \frac{\ln xdx}{x\sqrt{1-\ln^2 x-4\ln x}}.$

1.11.49. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}.$

1.11.50. $\int x\ln(1+x^3)dx.$

2 ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ И КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

2.1 Непосредственное интегрирование

Вариант 1

1) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{2x\sqrt[3]{x^2}}$; 2) $\int \frac{(1+x)^2 dx}{x(1+x^2)}$; 3) $\int \frac{(4t-3)dt}{t^2+25}$.

Вариант 2

1) $\int \frac{\left(1+\sqrt[3]{\varphi}\right)d\varphi}{\varphi\sqrt{\varphi}}$; 2) $\int \frac{x^4dx}{x^2+1}$; 3) $\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Вариант 3

1) $\int \frac{(4-x)dx}{2+\sqrt{x}}$; 2) $\int\left(\frac{3}{t^2}-\frac{2}{\sqrt{t}}+\frac{4}{t}\right)dt$; 3) $\int \frac{(2x-5)dx}{x^2+4}$.

Вариант 4

1) $\int \frac{(x^2+1)^2dx}{x}$; 2) $\int \frac{(4x-1)dx}{\sqrt{2-x^2}}$; 3) $\int \frac{\sin 2xdx}{5\cos x}$.

Вариант 5

1) $\int \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x}}dx$; 2) $\int \frac{(y+3)dy}{\sqrt{1-y^2}}$; 3) $\int \frac{(1+\sin 2x)dx}{\sin x+\cos x}$.

Вариант 6

1) $\int\left(\sin 2x-\frac{3}{\sin^2 x}\right)dx$; 2) $\int \frac{(5z+5)dz}{\sqrt{1-9z^2}}$; 3) $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)}$.

Вариант 7

1) $\int(2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})^3dx$; 2) $\int \frac{(4x+3)dx}{4+x^2}$; 3) $\int \frac{\cos 2xdx}{\cos x+\sin x}$.

Вариант 8

1) $\int\left(\frac{2a}{\sqrt{x}}+3c\sqrt[3]{x^2}\right)dx$; 2) $\int \frac{x^4dx}{x-1}$; 3) $\int \frac{\cos 2xdx}{\cos x-\sin x}$.

Вариант 9

1) $\int(1-2\sqrt{t})^3dt$; 2) $\int \frac{(3x-5)dx}{\sqrt{4-x^2}}$; 3) $\int \frac{\operatorname{arctg} zdz}{1+z^2}$.

Вариант 10

1) $\int (e^x + e^{-x})^2 dx;$ 2) $\int \frac{(3t-2)dt}{t^2+9};$ 3) $\int \frac{\ln^2 x dx}{x}.$

2.2 Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен

Вариант 1

1) $\int \frac{dx}{x^2-4x+10};$ 2) $\int \frac{(3x-2)dx}{2x^2-7};$ 3) $\int \frac{(1-2z)dz}{\sqrt{3+2z-z^2}}.$

Вариант 2

1) $\int \frac{dt}{t^2+2t+7};$ 2) $\int \frac{(5x+1)dx}{3x^2-4};$ 3) $\int \frac{(2+3x)dx}{\sqrt{27+12x-4x^2}}.$

Вариант 3

1) $\int \frac{dx}{x^2-6x+11};$ 2) $\int \frac{(2\alpha-3)d\alpha}{5\alpha^2-4};$ 3) $\int \frac{(2-x)dx}{\sqrt{2x^2-12x+15}}.$

Вариант 4

1) $\int \frac{dy}{y^2-3y+5};$ 2) $\int \frac{(x-1)dx}{4x^2+1};$ 3) $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{12x^2-24x+15}}.$

Вариант 5

1) $\int \frac{dx}{x^2-3x+5};$ 2) $\int \frac{(z-1)dz}{4z^2+1};$ 3) $\int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{4x^2+8x+9}}.$

Вариант 6

1) $\int \frac{dt}{t^2+t+8};$ 2) $\int \frac{(3x+2)dx}{3x^2-5};$ 3) $\int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{x^2-6x+20}}.$

Вариант 7

1) $\int \frac{dx}{x^2-5x+10}$; 2) $\int \frac{(2x-1)dx}{3x^2-7}$; 3) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+6x+5}}$.

Вариант 8

1) $\int \frac{dx}{x^2+3x+7}$; 2) $\int \frac{(5\alpha+6)d\alpha}{2\alpha^2-9}$; 3) $\int \frac{(2x+6)dx}{\sqrt{5-4x-4x^2}}$.

Вариант 9

1) $\int \frac{dz}{z^2-z+4}$; 2) $\int \frac{(7x-1)dx}{4x^2-10}$; 3) $\int \frac{(2x-4)dx}{\sqrt{5-6x-3x^2}}$.

Вариант 10

1) $\int \frac{dx}{x^2+6x+15}$; 2) $\int \frac{(5x-2)dx}{3x^2-1}$; 3) $\int \frac{xdx}{\sqrt{15-2x-x^2}}$.

2.3 Интегрирование методом замены переменной

Вариант 1

1) $\int \frac{xdx}{(1+3x^2)^3}$; 2) $\int \frac{\cos\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}}$; 3) $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} 2t}dt}{1+4t^2}$.

Вариант 2

1) $\int \frac{xdx}{\left(3-2x^2\right)^4}$; 2) $\int \frac{(x-\operatorname{arctg} x)dx}{1+x^2}$; 3) $\int \frac{e^{2\operatorname{tg}\varphi}d\varphi}{\cos^2\varphi}$.

Вариант 3

1) $\int \frac{3ydy}{\sqrt[3]{5-2y^2}}$; 2) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{2-e^{2x}}}$; 3) $\int \cos^{\frac{2}{7}} 2x \sin 2x dx$.

Вариант 4

1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x - 1}}$; 2) $\int \frac{\cos\alpha d\alpha}{9 + 4\sin^2\alpha}$; 3) $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x\, dx.$

Вариант 5

1) $\int \frac{(1+x)dx}{1+\sqrt{x}}$; 2) $\int \frac{\sin x dx}{8 - \cos^2 x}$; 3) $\int \frac{e^x dx}{e^x + e^{-x}}$.

Вариант 6

1) $\int \frac{\sin t dt}{\sqrt{2 + 3\cos t}}$; 2) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{4\sin^2 x - 1}}$; 3) $\int e^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Вариант 7

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \arccos^2 x}$; 2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 + 3\ln x}}$; 3) $\int \frac{e^x dx}{\operatorname{ch} x}$.

Вариант 8

1) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(1 - 2x^3)^2}}$; 2) $\int \frac{dz}{z\sqrt{1 - \ln^2 z}}$; 3) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2 + \cos^2 x}}$.

Вариант 9

1) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{3 - 2\sin x}}$; 2) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{9 + x^8}}$; 3) $\int \frac{e^{2x} dx}{e^{4x} - 5}$.

Вариант 10

1) $\int \frac{2y^3 dy}{\sqrt{7 + 3y^4}}$; 2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4 + \ln^2 x}}$; 3) $\int \frac{\operatorname{tg}(\ln x) dx}{x}$.

2.4 Интегрирование по частям

Вариант 1

1) $\int x\sin 2x dx$; 2) $\int x \operatorname{arctg} x dx$; 3) $\int \sqrt[3]{x} \ln^2 x dx$.

Вариант 2

1) $\int t\cos 3t dt$; 2) $\int x \arcsin x dx$; 3) $\int x \ln^2 x dx$.

Вариант 3

1) $\int x e^{-2x} dx$; 2) $\int \frac{t dt}{\cos^2 t}$; 3) $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx$.

Вариант 4

1) $\int x e^{-3x} dx$; 2) $\int x \cos^2 x dx$; 3) $\int t^3 \operatorname{arctg} t\, dt$.

Вариант 5

1) $\int x \sin \frac{x}{2} dx$; 2) $\int \ln^2 z dz$; 3) $\int t^2 e^{-2t} dt$.

Вариант 6

1) $\int \alpha \cos 5\alpha d\alpha$; 2) $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$; 3) $\int \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt{x}}$.

Вариант 7

1) $\int x e^{-\frac{x}{2}} dx$; 2) $\int x \sin^2 x dx$; 3) $\int x^2 \operatorname{arcctg} x dx$.

Вариант 8

1) $\int x \cos \frac{x}{3} dx$; 2) $\int \ln^2 x dx$; 3) $\int x \sin x \cos^2 x dx$.

Вариант 9

1) $\int x^2 e^{-3x} dx;$ 2) $\int \operatorname{arctg} 2x dx;$ 3) $\int \frac{\ln^2 x dx}{x^3}.$

Вариант 10

1) $\int x e^{\frac{x}{2}} dx;$ 2) $\int \operatorname{arcctg} 3x d;$ 3) $\int x 2^{3x} dx.$

2.5 Интегрирование рациональных функций

Вариант 1

1) $\int \frac{x^5 dx}{x^2+2};$ 2) $\int \frac{x dx}{(x+2)(x+3)^2};$ 3) $\int \frac{3x dx}{x^3+1}.$

Вариант 2

1) $\int \frac{(x^4+1)dx}{x^2-3};$ 2) $\int \frac{(x+1)dx}{x^3-x^2};$ 3) $\int \frac{3dx}{x^3-1}.$

Вариант 3

1) $\int \frac{x^5 dx}{x^2-1};$ 2) $\int \frac{dx}{(x-2)^2(x-1)};$ 3) $\int \frac{(x-4)dx}{x^3-4x^2+17x}.$

Вариант 4

1) $\int \frac{8x^3 dx}{2x^2+1};$ 2) $\int \frac{(3x+7)dx}{(x-1)^2(x-2)};$ 3) $\int \frac{x^2 dx}{x^4-1}.$

Вариант 5

1) $\int \frac{(4x^4+2)dx}{2x^2-1};$ 2) $\int \frac{(2x-4)dx}{(x+2)(x+3)^2};$ 3) $\int \frac{2dx}{x^3+8}.$

Вариант 6

1) $\int \frac{(x^4+3)dx}{x^2+3};$ 2) $\int \frac{(3x-7)dx}{(x-5)^2(x-4)};$ 3) $\int \frac{4dx}{x^3-8}.$

Вариант 7

1) $\int \frac{x^5 dx}{x^2-2}$; 2) $\int \frac{8dx}{(x-3)^2(x-1)}$; 3) $\int \frac{4dx}{x^3-2x^2+5x}$.

Вариант 8

1) $\int \frac{(6x^4+x)dx}{2x^2+1}$; 2) $\int \frac{(4x+12)dx}{(x-4)(x-2)^2}$; 3) $\int \frac{(4x+12)dx}{x^3+4x^2+9x}$.

Вариант 9

1) $\int \frac{(x^3-x^2)dx}{x^2+4}$; 2) $\int \frac{(7x-5)dx}{(x+2)(x+3)^2}$; 3) $\int \frac{(x^2-5)dx}{x^3+2x^2+10x}$.

Вариант 10

1) $\int \frac{(x^4+x)dx}{x^2-3}$; 2) $\int \frac{(2x+3)dx}{x^3+x^2-2x}$; 3) $\int \frac{(x^2+3)dx}{x^3+4x}$.

2.6 Интегрирование тригонометрических выражений

Вариант 1

1) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[3]{\cos x}}$; 2) $\int \cos^4 t dt$; 3) $\int \frac{dx}{5+2\sin x+3\cos x}$.

Вариант 2

1) $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$; 2) $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$; 3) $\int \frac{dx}{5-4\sin x+2\cos x}$.

Вариант 3

1) $\int \frac{\cos^5 z dz}{\sqrt{\sin z}}$; 2) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$; 3) $\int \frac{3\sin x-2\cos x}{1+\cos x} dx$.

Вариант 4

1) $\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^3 x}$; 2) $\int \sin^6 t dt$; 3) $\int \frac{dx}{5+3\cos x-5\sin x}$.

Вариант 5

1) $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^4 x}$; 2) $\int \cos^6 x dx$; 3) $\int \frac{dx}{5\cos x + 10\sin x}$.

Вариант 6

1) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}}$; 2) $\int \sin^4 x dx$; 3) $\int \frac{dx}{3+2\cos x-\sin x}$.

Вариант 7

1) $\int \frac{\sin^5 x dx}{\sqrt[3]{\cos x}}$; 2) $\int \cos^4 2x dx$; 3) $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$.

Вариант 8

1) $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt{\sin x}}$; 2) $\int (\cos^2 x - \sin^4 x) dx$; 3) $\int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x + 3}$.

Вариант 9

1) $\int \frac{\sin^5 x dx}{\sqrt{\cos x}}$; 2) $\int (\sin^2 x + \cos^4 x) dx$; 3) $\int \frac{dx}{2 + 4\sin x + 3\cos x}$.

Вариант 10

1) $\int \frac{\cos^5 x dx}{\sin^3 x}$; 2) $\int (\sin^2 x + \sin^4 x) dx$; 3) $\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x}$.

2.7 Интегрирование иррациональных функций

Вариант 1

1) $\int \frac{\sqrt[6]{x} dx}{x(1-\sqrt[3]{x})}$; 2) $\int \frac{1}{(3-x)^2} \sqrt[3]{\frac{3-x}{3+x}} dx$; 3) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2 - 25}}$.

Вариант 2

1) $\int \frac{4dx}{4x + \sqrt[3]{x}}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+4} - \sqrt[3]{(x+4)^2}}$; 3) $\int \frac{\sqrt{16 - x^2} dx}{x^4}$.

Вариант 3

1) $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)dx}{\sqrt[6]{x^5}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$; 2) $\int \frac{\sqrt{x-1}dx}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}}$; 3) $\int x^3\sqrt{x^2-25}\,d\,x.$

Вариант 4

1) $\int \frac{(2\sqrt[4]{x}+1)dx}{\sqrt[4]{x^3}(\sqrt{x}+4)}$; 2) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$; 3) $\int x^2\sqrt{9+x^2}dx.$

Вариант 5

1) $\int \frac{(1+x)dx}{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}$; 2) $\int \sqrt{\frac{x+2}{x-2}}\cdot\frac{dx}{x^2}$; 3) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}.$

Вариант 6

1) $\int \frac{(1-x)dx}{\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}}$; 2) $\int \frac{\sqrt{x^2+9}dx}{x^2}$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x-1}+\sqrt{x-1}}.$

Вариант 7

1) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x}-3\sqrt{x}}$; 2) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\frac{dx}{x^2}$; 3) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(1+x^2)^5}}.$

Вариант 8

1) $\int \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}+1}dx$; 2) $\int \frac{dx}{(1+x)^{\frac{3}{2}}+(1+x)^{\frac{1}{2}}}$; 3) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}.$

Вариант 9

1) $\int \frac{dx}{(1-\sqrt[3]{x^2})\sqrt{x}}$; 2) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$; 3) $\int x^3\sqrt{1+x^2}dx.$

Вариант 10

1) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1-\sqrt[4]{x}}$; 2) $\int \sqrt{\frac{4x-5}{x+1}}dx$; 3) $\int \frac{dx}{3\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$.

2.8 Контрольная работа

Вариант 1

1) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^8-1}}$; 2) $\int \frac{4\cos xdx}{3-5\sin x}$;

3) $\int x\cos^2 xdx$; 4) $\int \frac{1}{x^2}\cdot \mathrm{ctg}\frac{1}{x}dx$;

5) $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}dx$; 6) $\int \frac{dx}{\cos^2 t\sqrt{\mathrm{tg}^2 t+2\mathrm{tg}t+5}}$;

7) $\int \sin^4 x\cos^2 xdx$; 8) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{\left(a^2+x^2\right)^3}}$.

Вариант 2

1) $\int \cos t\ln^2(\sin t)dt$; 2) $\int \frac{5xdx}{\sqrt{1-x^4}}$;

3) $\int \frac{\cos 2xdx}{\sin^4 x}$; 4) $\int \frac{dt}{\cos^2 \mathrm{t}(\mathrm{tg}^2 t-16)}$;

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{15-9x^2-6x}}$; 6) $\int \frac{d\varphi}{\varphi^4\sqrt{\varphi^2+1}}$;

7) $\int \frac{dz}{z^3+z^2+2z+2}$; 8) $\int x\sin^2 2xdx$.

Вариант 3

1) $\int \frac{x^2dx}{(4-x^3)^7}$; 2) $\int \frac{(5x-8)dx}{x^3-4x^2+4x}$;

3) $\int \frac{t\cos t dt}{\sin^3 t}$;

4) $\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+z+1}}$;

5) $\int \frac{\cos^4 x dx}{\sin^2 x}$;

6) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\left(1+9\operatorname{tg}^2 x\right)}$;

7) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x-1}}$;

8) $\int x^2\cos\frac{x}{3}dx$.

Вариант 4

1) $\int \frac{\cos x dx}{(1-3\sin x)^3}$;

2) $\int \cos^5 x\sqrt[3]{\sin^2 x}dx$;

3) $\int \frac{\ln(x+1)dx}{\sqrt{x+1}}$;

4) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x-1)}$;

5) $\int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t-4\sin t+13}$;

6) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{5+4\operatorname{tg} x}}$;

7) $\int \frac{(\alpha+1)d\alpha}{\alpha\sqrt{\alpha-2}}$;

8) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

Вариант 5

1) $\int x\sin^2 3x dx$;

2) $\int \frac{4\sin\alpha d\alpha}{(5-2\cos\alpha)^6}$;

3) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$;

4) $\int \frac{(x+2)dx}{x^4-2x^3+2x^2}$;

5) $\int \frac{\arcsin t dt}{\sqrt{1-t^2}}$;

6) $\int \frac{z^2 dz}{\sqrt{\left(2-z^2\right)^3}}$;

7) $\int \left(\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg}x\right)^2 dx$;

8) $\int \frac{1-2\sqrt{t}}{1+2\sqrt{t}}dt$.

Вариант 6

1) $\int x^2 \arcsin x dx;$

2) $\int \frac{\cos a da}{4+\sin^2 a};$

3) $\int \frac{dt}{t^2\sqrt{\left(1+t^2\right)^3}};$

4) $\int \frac{(3x+2)dx}{2x^2+x-3};$

5) $\int \left(\mathrm{tg}t+\mathrm{ctg}t\right)^3 dt;$

6) $\int \frac{xdx}{x^3-1};$

7) $\int \frac{y^2 dy}{\left(5-2y^3\right)^7};$

8) $\int \frac{\sin^5 x dx}{1+\cos^2 x}.$

Вариант 7

1) $\int (1-\sin 2t)^2 dt;$

2) $\int \frac{tdt}{\sqrt{2+4t}};$

3) $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+2\ln x}};$

4) $\int \frac{4dx}{\left(4+\sqrt[3]{x}\right)x};$

5) $\int \frac{\cos x dx}{(1-2\sin x)^5};$

6) $\int x^2(3+\cos 2x)dx;$

7) $\int \frac{(5x-14)dx}{x^3-x^2-4x+4};$

8) $\int \frac{(4x-5)dx}{x^2-4x+13}.$

Вариант 8

1) $\int \frac{(\sqrt[3]{x}-1)^3}{x}dx;$

2) $\int \frac{\mathrm{ctg}^5 x dx}{\sin^4 x};$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2+4x}};$

4) $\int \frac{(x+1)dx}{x^2-2x+10};$

5) $\int \frac{3z^2+2z-3}{z^3-z}dz;$

6) $\int x\mathrm{tg}^2 x dx;$

7) $\int \frac{tdt}{\sqrt{2t+1}+1};$

8) $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+3}.$

Вариант 9

1) $\int xe^{x^2+2}dx;$

2) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{z}\,dz;$

3) $\int x^2 \operatorname{arctg} x\,dx;$

4) $\int \frac{e^x dx}{e^{4x}-4};$

5) $\int \cos^3 t \sin^2 2t dt;$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}};$

7) $\int \frac{x^3 dx}{x^2-2x+5};$

8) $\int \frac{dx}{3\cos^2 x - 2}.$

Вариант 10

1) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-3x^2}};$

2) $\int \frac{\sin^4 t}{\cos^2 t}dt;$

3) $\int \cos^2 2x \sin^3 x dx;$

4) $\int \frac{\sqrt{z}-1}{\sqrt[3]{z}+1}dz;$

5) $\int \frac{(2x+3)dx}{x^2+6x+10};$

6) $\int \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt{x}};$

7) $\int x\operatorname{tg}^2 x dx;$

8) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+2}}.$

Вариант 11

1) $\int \frac{\sin x dx}{(1+3\cos x)^3};$

2) $\int \frac{\sin^3 \alpha d\alpha}{\cos^2 \alpha};$

3) $\int t\ln(t^2+a^2)dt;$

4) $\int \frac{e^{4t}dt}{\sqrt{1+e^{2t}}};$

5) $\int \frac{(5x-8)dx}{x^3-4x^2+4x};$

6) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}};$

7) $\int \frac{\sqrt[6]{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}};$

8) $\int \frac{dx}{5-3\cos x}.$

Вариант 12

1) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{3-4x^3}}$;

2) $\int \frac{\arcsin t dt}{t^2}$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$;

4) $\int \frac{\sin^3 \alpha d\alpha}{\sqrt{\cos\alpha}}$;

5) $\int \frac{2z-3}{z^2+2z+10} dz$;

6) $\int \frac{dx}{x^2-x^4}$;

7) $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}$;

8) $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

Вариант 13

1) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$;

2) $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt{\sin x}}$;

3) $\int x\mathrm{tg}^2 x dx$;

4) $\int \frac{\sqrt[4]{x}+3}{\sqrt{x}+1} dx$;

5) $\int \mathrm{arctg}\sqrt{t+1} dt$;

6) $\int \frac{(x+2)dx}{x^3-2x^2+2x}$;

7) $\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^4 x}$;

8) $\int x^2\sqrt{16-x^2} dx$.

Вариант 14

1) $\int \frac{\cos\alpha d\alpha}{1-\sin\alpha}$;

2) $\int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+6x+13}} dx$;

3) $\int \frac{\sin^5 t dt}{\sqrt{\cos t}}$;

4) $\int t\,\mathrm{arctg}\sqrt{t} dt$;

5) $\int \frac{2x-3}{x\sqrt{x-4}} dx$;

6) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$;

7) $\int \frac{2x^3+1}{x^2(x+1)} dx$;

8) $\int \frac{z^3 dz}{\sqrt{z^2-a^2}}$.

Вариант 15

1) $\int \sqrt{\cos\alpha}\sin^3\alpha d\alpha;$ 2) $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt{1-\sin^2 x}};$

3) $\int \frac{\ln^2 xdx}{x^3};$ 4) $\int \frac{1-2\sqrt{t}}{1+2\sqrt{t}}dt;$

5) $\int \frac{2x^2-x-1}{x^3-x^2-6x}dx;$ 6) $\int \mathrm{tg}^5 xdx;$

7) $\int \frac{x\arcsin xdx}{\sqrt{1-x^2}};$ 8) $\int x^2\sqrt{1-x^2}dx.$

2.9 Тест

В следующих задачах приводятся четыре ответа, из которых только один правильный. Требуется указать номер правильного ответа. Постоянная интегрирования в ответах опущена.

Вариант 1

1. $\int \frac{(2-\sqrt[3]{x})^2}{x}dx.$	1) $4\ln\lvert x\rvert-6\sqrt[3]{x}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2};$ 2) $4\ln\lvert x\rvert-6\sqrt[3]{x}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2};$ 3) $4\ln\lvert x\rvert-12\sqrt[3]{x}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x};$ 4) $2\ln\lvert x\rvert+12\sqrt[3]{x}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x}.$
2. $\int \mathrm{tg}(2-5x)dx.$	1) $\frac{1}{5}\ln\lvert\sin(2-5x)\rvert;$ 2) $-\frac{1}{5}\ln\lvert\sin(2-5x)\rvert;$ 3) $\frac{1}{5}\ln\lvert\cos(2-5x)\rvert;$ 4) $-\frac{1}{5}\ln\lvert\cos(2-5x)\rvert.$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x-4x^2}}$.	1) $\operatorname{arctg}(1+2x)$; 2) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{1+2x}{2}$; 3) $\arcsin\frac{1+2x}{2}$; 4) $\frac{1}{2}\arcsin(1+2x)$.
4. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{4+\ln x}}$.	1) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(4+\ln x)^2}$; 2) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{(4+\ln x)^2}$; 3) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{4+\ln x}$; 4) $\frac{3}{2\sqrt[3]{4+\ln x}}$.
5. $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$.	1) $\frac{1}{3}x^3\operatorname{arctg}x-\frac{1}{6}\ln(1+x^2)-\frac{1}{6}x^2$; 2) $\frac{1}{3}x^3\operatorname{arctg}x+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+\frac{1}{6}x^2$; 3) $\frac{1}{3}x^3\operatorname{arctg}x+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)-\frac{1}{6}x^2$; 4) $\frac{1}{3}x^3\operatorname{arctg}x-\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+\frac{1}{6}x^2$.

Вариант 2

1. $\int \frac{(2\sqrt{x}-x)^2}{x\sqrt{x}}dx$.	1) $8\sqrt{x}-4x+\frac{2}{3}x\sqrt{x}$; 2) $8\sqrt{x}-8x+2x\sqrt{x}$; 3) $4\sqrt{x}-8x+\frac{2}{3}x\sqrt{x}$; 4) $4\sqrt{x}-4x+2x\sqrt{x}$.

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-1}}.$	1) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left\|x+\sqrt{2x^2-1}\right\|;$ 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left\|\frac{x\sqrt{2}-1}{x\sqrt{2}+1}\right\|;$ 3) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(\sqrt{2}x);$ 4) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left\|x+\sqrt{x^2-\frac{1}{2}}\right\|.$
3. $\int \frac{3x+2}{x^2+4x+5}dx.$	1) $\frac{3}{2}\ln(x^2+4x+5)-2\ln\left\|\frac{x+2}{x-1}\right\|;$ 2) $\frac{3}{2}\ln(x^2+4x+5)-4\text{arctg}(x+2);$ 3) $\frac{3}{2}\ln(x^2+4x+5)+2\text{arctg}(x+2);$ 4) $\frac{3}{2}\ln(x^2+4x+5)+4\ln\left\|x+2\right\|.$
4. $\int \frac{\cos x dx}{(1-3\sin x)^5}.$	1) $\frac{1}{\sqrt[3]{1-3\sin x}};$ 2) $-\frac{5}{12}\left(\sqrt[5]{1-3\sin x}\right)^4;$ 3) $\frac{1}{12(1-3\sin x)^4};$ 4) $\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{(1-3\sin x)^4}.$
5. $\int x^3 e^{x^2}dx.$	1) $e^{x^2}(x^2-1);$ 2) $\frac{1}{2}e^{x^2}(x^2+1);$ 3) $\frac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1);$ 4) $e^{x^2}(x^2+1).$

Вариант 3

1. $\int \frac{x^3-\sqrt{x}-4x^2}{x}dx.$	1) $\frac{1}{3}x^3-\sqrt{x}-8x^2;$ 2) $\frac{1}{3}x^3-2\sqrt{x}-4x^2;$ 3) $\frac{1}{3}x^3-2\sqrt{x}-2x^2;$ 4) $x^3-\sqrt{x}-2x^2.$
2. $\int \frac{dx}{\sin 5x}.$	1) $\frac{1}{5}\ln\lvert\sin 5x\rvert;$ 2) $\frac{1}{5\cos^2 5x};$ 3) $-\frac{1}{5}\mathrm{ctg}5x;$ 4) $\frac{1}{5}\ln\left\lvert\mathrm{tg}\frac{5x}{2}\right\rvert.$
3. $\int \frac{xdx}{7-x^2+6x}.$	1) $\frac{1}{2}\ln\lvert 7-x^2+6x\rvert-\frac{3}{8}\ln\left\lvert\frac{x-7}{x+1}\right\rvert;$ 2) $-\frac{1}{2}\ln\lvert 7-x^2+6x\rvert+\frac{3}{4}\ln\left\lvert\frac{x-7}{x+1}\right\rvert;$ 3) $-\frac{1}{2}\ln\lvert 7-x^2+6x\rvert+\frac{3}{8}\ln\left\lvert\frac{x+1}{x-7}\right\rvert;$ 4) $-\frac{1}{2}\ln\lvert x^2-6x-7\rvert-\frac{3}{8}\ln\left\lvert\frac{x+1}{x-7}\right\rvert.$
4. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx.$	1) $\frac{2}{3}\sqrt{\arcsin^3 x};$ 2) $\frac{\arcsin x}{1-x^2};$ 3) $2\sqrt{\arcsin x};$ 4) $\frac{1}{2}\arcsin x.$

5. $\int x2^{-x}\,dx.$	1) $-\dfrac{x\ln 2+1}{2^x\ln 2}$; 2) $\dfrac{-x\ln 2+1}{2^x\ln^2 2}$; 3) $-\dfrac{x\ln 2+1}{2^x\ln^2 2}$; 4) $\dfrac{-x-1}{2^x\ln^2 2}$.

Вариант 4

1. $\int\left(2\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{4}{3\sqrt[3]{x}}\right)dx.$	1) $\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}-2\sqrt[3]{x^2}$; 2) $\dfrac{5}{6}\sqrt[3]{x^5}-2\sqrt[3]{x^2}$; 3) $\dfrac{6}{5}x\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$; 4) $\dfrac{6}{5}x\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x^2}$.
2. $\int 7^{1-3x}\,dx.$	1) $\dfrac{7^{2-3x}}{3\ln 7}$; 2) $-\dfrac{7^{1-3x}}{3\ln 7}$; 3) $\dfrac{7^{2-3x}}{2-3x}$; 4) $-\dfrac{7^{1-3x}}{3\ln\lvert 1-3x\rvert}$.
3. $\int\dfrac{1-x}{x^2+4x-5}\,dx.$	1) $-\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert x^2+4x-5\right\rvert+3\arcsin\dfrac{x+2}{3}$; 2) $-\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert x^2+4x-5\right\rvert+\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{x+5}{x-1}\right\rvert$;

	3) $-\frac{1}{2}\ln\left\|x^2+4x-5\right\|+\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{x-1}{x+5}\right\|$; 4) $-\frac{1}{2}\ln\left\|x^2+4x-5\right\|+3\ln\left\|x+2+\sqrt{x^2+4x-5}\right\|$.
4. $\int\frac{dx}{x\sqrt{9-\ln^2 2x}}$.	1) $\frac{1}{6}\ln\left\|\frac{3-\ln 2x}{3+\ln 2x}\right\|$; 2) $\ln\left\|\ln 2x+\sqrt{9-\ln^2 2x}\right\|$; 3) $\arcsin\frac{\ln 2x}{3}$; 4) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\ln 2x}{3}$.
5. $\int x^2\ln x dx$.	1) $x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3$; 2) $\frac{1}{3}x^3\ln x+\frac{1}{9}x^3$; 3) $\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{3}x^3$; 4) $\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3$.

Вариант 5

1. $\int\frac{2{,}5\sqrt{x}-2x+x\sqrt{x}}{x^2}dx$.	1) $5x^{-\frac{1}{2}}-2\ln\left\|x\right\|+2x^{\frac{1}{2}}$; 2) $-5x^{-\frac{1}{2}}-2\ln\left\|x\right\|+2x^{\frac{1}{2}}$; 3) $5x^{-\frac{1}{2}}-2\ln\left\|x\right\|+x^{\frac{1}{2}}$; 4) $-5x^{-\frac{1}{2}}-2x^{-2}-x^{\frac{1}{2}}$.

2. $\int \operatorname{ctg}(1+3x)dx.$	1) $-\ln\lvert\sin(1+3x)\rvert;$ 2) $\ln\lvert\cos(1+3x)\rvert;$ 3) $\frac{1}{3}\ln\lvert\sin(1+3x)\rvert;$ 4) $-\frac{1}{3}\ln\lvert\sin(1+3x)\rvert.$
3. $\int \frac{2xdx}{x^2-7x+13}.$	1) $2\ln(x^2-7x+13)+\frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-7}{\sqrt{3}};$ 2) $\ln(x^2-7x+13)+\frac{14}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-7}{\sqrt{3}};$ 3) $\ln(x^2-7x+13)+\frac{7}{\sqrt{3}}\ln\left\lvert\frac{2x-7}{2x+7}\right\rvert;$ 4) $2\ln(x^2-7x+13)-\frac{14}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(2x-7).$
4. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{4-3x^4}}.$	1) $\frac{1}{3}\sqrt{4-3x^4};$ 2) $-\frac{1}{3}\sqrt{4-3x^4};$ 3) $\frac{1}{3\sqrt{4-3x^4}};$ 4) $-\frac{1}{6}\sqrt{4-3x^4}.$
5. $\int x^3\ln^2 xdx.$	1) $x^4\left(\frac{1}{4}\ln^2 x-\frac{1}{8}\ln x+\frac{1}{32}\right);$ 2) $x^4\left(\ln^2 x-\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{16}\right);$ 3) $x^4\left(\frac{1}{4}\ln^2 x+\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{32}\right);$ 4) $x^4\left(\ln^2 x+\frac{1}{8}\ln x-\frac{1}{16}\right).$

Вариант 6

1. $\int \frac{1{,}5x\sqrt{x}-3\sqrt{x}-3{,}5x^2\sqrt[3]{x}}{x}dx.$	1) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-6\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}$; 2) $\frac{3}{2}\sqrt{x^3}-6\sqrt{x}-6x^2\sqrt[3]{x}$; 3) $\sqrt{x^3}-\frac{3}{2}\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x^7}$; 4) $x\sqrt{x}-6\sqrt{x}-\frac{3}{2}x^2\sqrt[3]{x}$.
2. $\int \frac{dx}{2x^2+9}$.	1) $\frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{3}$; 2) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{3}$; 3) $\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{3}$; 4) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}$.
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$.	1) $\operatorname{arctg}(x-3)$; 2) $\ln\left\|x-3+\sqrt{x^2-6x+10}\right\|$; 3) $\ln\left\|x+\sqrt{x^2-6x+10}\right\|$; 4) $\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{x-4}{x-2}\right\|$.
4. $\int \frac{dx}{(x^2+1)\operatorname{arcctg}x}$.	1) $\ln\left\|\operatorname{arcctg}x\right\|$; 2) $\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}^2 x$; 3) $-\ln\left\|\operatorname{arcctg}x\right\|$; 4) $-\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}^2 x$.

5. $\int xe^{2x}dx.$	1) $xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x};$ 2) $\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x};$ 3) $\frac{1}{2}xe^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x};$ 4) $\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}.$

Вариант 7

1. $\int\frac{\left(2x-3\sqrt{x}\right)^2}{x^3}dx.$	1) $4\ln\lvert x\rvert+\frac{24}{\sqrt{x}}-\frac{9}{x};$ 2) $4\ln\lvert x\rvert+\frac{12}{\sqrt{x}}+\frac{9}{x};$ 3) $4\ln\lvert x\rvert-\frac{24}{\sqrt{x}}+\frac{9}{x^2};$ 4) $4\ln\lvert x\rvert-\frac{12}{\sqrt{x}}-\frac{9}{x^2}.$
2. $\int\frac{dx}{\sin^2\left(\frac{x}{3}+1\right)}.$	1) $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3}+1\right);$ 2) $-3\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3}+1\right);$ 3) $\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3}+1\right);$ 4) $3\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3}+1\right).$
3. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+5}}.$	1) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2};$ 2) $\frac{1}{2}\ln\left\lvert x+3+\sqrt{x^2+6x+5}\right\rvert;$

	3) $\ln\left\|x+3+\sqrt{x^2+6x+5}\right\|$; 4) $\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{x+3}{x-2}\right\|$.
4. $\int e^{2\sin^2 x}\sin 2x dx.$	1) $\frac{1}{2}e^{2\sin^2 x}$; 2) $-2e^{2\sin^2 x}$; 3) $2e^{2\sin^2 x}$; 4) $e^{2\sin^2 x}$.
5. $\int \frac{\ln(x+1)dx}{\sqrt{x+1}}.$	1) $\sqrt{x+1}\ln(x+1)-\frac{2}{\sqrt{x+1}}$; 2) $2\sqrt{x+1}\ln(x+1)-4\sqrt{x+1}$; 3) $\frac{\ln(x+1)}{2\sqrt{x+1}}+4\sqrt{x+1}$; 4) $\sqrt{x+1}\ln(x+1)-2\sqrt{x+1}$.

Вариант 8

1. $\int \frac{(3x-x\sqrt{x})^2}{x^2}dx.$	1) $\frac{3}{2}x-4x\sqrt{x}+\frac{1}{2}x^2$; 2) $9x-12\sqrt{x}+\frac{1}{2}x^2$; 3) $9x-4x\sqrt{x}+\frac{1}{2}x^2$; 4) $\frac{3}{2}x-6\sqrt{x^3}+\frac{1}{2}x^2$.
2. $\int \frac{dx}{\sin^2(5-2x)}.$	1) $-\frac{1}{2}\mathrm{ctg}(5-2x)$; 2) $\frac{1}{2}\ln\mathrm{tg}\left(\frac{5}{2}-x\right)$; 3) $0{,}5\mathrm{ctg}(5-2x)$; 4) $-0{,}5\sin^{-1}(5-2x)$.

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-x^2+6x}}$.	1) $\frac{1}{4}\arcsin\frac{x-3}{4}$; 2) $\frac{1}{8}\ln\left\|\frac{x+1}{x-7}\right\|$; 3) $\ln\left\|x-3+\sqrt{7-x^2+6x}\right\|$; 4) $\arcsin\frac{x-3}{4}$.
4. $\int \frac{1-4\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$	1) $2\sqrt{1-x^2}-2\arcsin^2 x$; 2) $\ln\left\|x+\sqrt{1-x^2}\right\|-2\arcsin^2 x$; 3) $\arcsin x-\ln\left\|\arcsin x\right\|$; 4) $\arcsin x-2\arcsin^2 x$.
5. $\int (1-3x)\cos 2dx.$	1) $(3x-1)\sin 2x-\frac{3}{4}\cos 2x$; 2) $\frac{1}{2}(1-3x)\sin 2x-\frac{3}{4}\cos 2x$; 3) $(3x-1)\sin 2x+\frac{3}{4}\cos 2x$; 4) $\frac{1}{2}(1-3x)\sin 2x+\frac{3}{4}\cos 2x$.

Вариант 9

1. $\int \frac{3x\sqrt{x}-5x-x^2}{x^3}dx.$	1) $6\sqrt{x}-\frac{5}{x}-\ln\left\|x\right\|$; 2) $-\frac{6}{\sqrt{x}}-\frac{5}{x}-\ln\left\|x\right\|$; 3) $\frac{6}{\sqrt{x}}+\frac{5}{x}-\ln\left\|x\right\|$; 4) $-\frac{6}{\sqrt{x}}+\frac{5}{x}-\ln\left\|x\right\|$.

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}.$	1) $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(x\sqrt{3}\right);$ 2) $\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}};$ 3) $\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}};$ 4) $\arcsin\left(x\sqrt{3}\right).$
3. $\int \frac{2x+4}{x^2+2x+5}dx.$	1) $\ln(x^2+2x+5)+\mathrm{arctg}\frac{x+1}{2};$ 2) $\ln(x^2+2x+5)-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x+1}{2};$ 3) $\ln(x^2+2x+5)-\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{x+1}{x-2}\right\|;$ 4) $\ln(x^2+2x+5)+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x+1}{2}.$
4. $\int \frac{e^{\mathrm{arctg}2x}}{1+4x^2}dx.$	1) $2e^{\mathrm{arctg}2x};$ 2) $\frac{1}{2}e^{\mathrm{arctg}2x};$ 3) $e^{\mathrm{arctg}2x};$ 4) $-e^{\mathrm{arctg}2x}.$
5. $\int \frac{x\cos x dx}{\sin^3 x}.$	1) $\frac{x}{\sin^2 x}-\frac{1}{2}\mathrm{ctg}x;$ 2) $-\frac{1}{2}\frac{x}{\sin^2 x}+\mathrm{ctg}x;$ 3) $-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin^2 x}+\mathrm{ctg}x\right);$ 4) $-\frac{x}{\sin^2 x}-\mathrm{ctg}x.$

Вариант 10

1. $\int \frac{x^4 - 6x^2 + 5\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x\sqrt{x}} dx.$	1) $\frac{1}{3}x^3 - 4x\sqrt{x} + 5\ln\lvert x\rvert + 6x^{-\frac{1}{6}}$; 2) $\frac{7}{2}x\sqrt[3]{x} - 12\sqrt{x} + 5\ln\lvert x\rvert - 6x^{-\frac{1}{6}}$; 3) $\frac{2}{7}x\sqrt[3]{x} - 4x\sqrt{x} + 5\ln\lvert x\rvert + 6x^{-\frac{1}{6}}$; 4) $\frac{2}{7}x\sqrt[3]{x} - 4x\sqrt{x} + 5x^{-2} - 6x^{-\frac{1}{6}}$.
2. $\int \frac{dx}{\cos^2(2-3x)}.$	1) $\mathrm{tg}(2-3x)$; 2) $-\frac{1}{3}\cos^{-1}(2-3x)$; 3) $-\frac{1}{3}\mathrm{tg}(2-3x)$; 4) $-3\mathrm{tg}(2-3x)$.
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+8}}.$	1) $0{,}5\mathrm{arctg}\frac{x+2}{2}$; 2) $\ln\left\lvert x+2+\sqrt{x^2+4x+8}\right\rvert$; 3) $2\sqrt{x^2+4x+8}$; 4) $\arcsin\frac{x+2}{2}$.
4. $\int \frac{dx}{(2-x)\ln(2-x)}.$	1) $0{,}5\ln^2(2-x)$; 2) $\ln^{-2}(2-x)$; 3) $\ln\lvert\ln(2-x)\rvert$; 4) $-\ln\lvert\ln(2-x)\rvert$.
5. $\int x\cos x dx.$	1) $x\sin x - \cos x$; 2) $x\cos x - \sin x$; 3) $x\sin x + \cos x$; 4) $0{,}5\cos x^2$.

Вариант 11

1. $\int \frac{(x\sqrt{x}-2)^2}{x^2\sqrt{x}}dx.$	1) $2\sqrt{x}-4\ln\lvert x\rvert+\frac{4}{3x\sqrt{x}}$; 2) $\frac{3}{2}x\sqrt{x}-4\ln\lvert x\rvert-\frac{8}{3x\sqrt{x}}$; 3) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}-4\ln\lvert x\rvert-\frac{8}{3x\sqrt{x}}$; 4) $2\sqrt{x}-4\ln\lvert x\rvert-\frac{4}{3x\sqrt{x}}$.
2. $\int \frac{dx}{\cos^2(1-2x)}.$	1) $-0{,}5\mathrm{tg}(1-2x)$; 2) $0{,}5\mathrm{tg}(1-2x)$; 3) $-2\mathrm{tg}(1-2x)$; 4) $-2\mathrm{ctg}(1-2x)$.
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2}}.$	1) $\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{5}}$; 2) $0{,}5\ln\left\lvert\frac{3+x}{1-x}\right\rvert$; 3) $\ln\left\lvert x+1+\sqrt{4-2x-x^2}\right\rvert$; 4) $\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{5}}$.
4. $\int \frac{\ln^3 x+3}{x\ln x}dx.$	1) $x\ln^3 x+3\ln x$; 2) $\frac{1}{3}\ln^3 x+3\ln\lvert\ln x\rvert$; 3) $\ln^3 x+3\ln x$; 4) $\frac{1}{3}\ln^3 x+3x\ln x$.
5. $\int x^3\mathrm{arctg}\,x\,dx.$	1) $\frac{1}{4}x^4\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{6}x^3+x$; 2) $\frac{x^4-1}{4}\mathrm{arctg}\,x+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}x$;

	3) $\frac{1}{4}x^4 \operatorname{arctg} x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x$; 4) $\frac{x^4-1}{4}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x$.

Вариант 12

1. $\int \frac{(2x-3\sqrt{x})^2}{x}dx.$	1) $2x^2-4x\sqrt{x}+9x$; 2) $2x^2-8x\sqrt{x}+9x$; 3) $x^2-4x\sqrt{x}+9x$; 4) $x^2-8x\sqrt{x}+9x$.
2. $\int \frac{dx}{3x^2+12}.$	1) $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$; 2) $\frac{1}{3}\ln\left\|x+\sqrt{x^2+4}\right\|$; 3) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$; 4) $\frac{1}{12}\ln\left\|\frac{x+2}{x-2}\right\|$.
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2+4x}}.$	1) $\frac{1}{3}\arcsin\frac{x-2}{3}$; 2) $\ln\left\|x-2+\sqrt{5-x^2+4x}\right\|$; 3) $\arcsin\frac{x-2}{3}$; 4) $2\sqrt{5-x^2+4x}$.
4. $\int x5^{3-x^2}dx.$	1) $\frac{5^{4-x^2}}{4-x^2}$; 2) $-\frac{5^{3-x^2}}{2\ln 5}$;

	3) $-\dfrac{5^{3-x^2}}{\ln 5}$; 4) $\dfrac{x^2 5^{3-x^2}}{\ln 5}$.
5. $\int (1-x)\sin x dx.$	1) $(1-x)\cos x - \sin x$; 2) $(x-1)\sin x - \cos x$; 3) $(1-x)\cos x + \sin x$; 4) $(x-1)\cos x - \sin x$.

Вариант 13

1. $\int \dfrac{x^3-5x^2-x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx.$	1) $0,4x^2\sqrt{x}-\dfrac{10}{3}x\sqrt{x}-x$; 2) $0,4x^2\sqrt{x}-10\sqrt{x}-x$; 3) $0,4x^2\sqrt{x}-\dfrac{5}{2}x\sqrt{x}-x$; 4) $0,4x\sqrt{x}-10\sqrt{x}-x$.
2. $\int \dfrac{dx}{2x^2+5}.$	1) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{\sqrt{5}}$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{10}}$; 3) $\dfrac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{\sqrt{10}}$; 4) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{\sqrt{10}}$.
3. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}.$	1) $\arcsin(x-2)$; 2) $\ln\left\|2-x+\sqrt{4x-3-x^2}\right\|$; 3) $\ln\left\|x-2+\sqrt{4x-3-x^2}\right\|$; 4) $\arcsin\dfrac{x-2}{\sqrt{3}}$.

4. $\int \frac{e^x dx}{e^x + e^{-x}}$.	1) $2\ln(1-e^{2x})$; 2) $\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})$; 3) $\frac{1}{2}\ln(1-e^{2x})$; 4) $2\ln(1+e^{2x})$.
5. $\int x\sin^2 x dx$.	1) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x\sin 2x + \frac{1}{16}\cos 2x$; 2) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x$; 3) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{1}{16}\cos 2x$; 4) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x$.

Вариант 14

1. $\int \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{x\sqrt{x}} dx$.	1) $2\sqrt{x} + 2\ln\lvert x\rvert + 8x^{-\frac{1}{2}}$; 2) $2\sqrt{x} + 4\ln\lvert x\rvert - 8x^{-\frac{1}{2}}$; 3) $\sqrt{x} + 4\ln\lvert x\rvert - 8x^{-\frac{1}{2}}$; 4) $\sqrt{x} - 4\ln\lvert x\rvert + 8x^{\frac{1}{2}}$.
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-9}}$.	1) $\ln\left\lvert x\sqrt{2} + \sqrt{2x^2-9}\right\rvert$; 2) $\frac{1}{6}\ln\left\lvert\frac{x\sqrt{2}-3}{x\sqrt{2}+3}\right\rvert$; 3) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{3}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left\lvert x\sqrt{2} + \sqrt{2x^2-9}\right\rvert$.

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+3}}$.	1) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{2}}$; 2) $2\sqrt{x^2-2x+3}$; 3) $\ln\left\|x-1+\sqrt{x^2-2x+3}\right\|$; 4) $\ln\left\|x+\sqrt{x^2-2x+3}\right\|$.
4. $\int x\sqrt{3-2x^2}\,dx$.	1) $-\frac{2}{3}\sqrt{\left(3-2x^2\right)^3}$; 2) $x^2\sqrt{\left(3-2x^2\right)^3}$; 3) $-\frac{1}{6}\sqrt{\left(3-2x^2\right)^3}$; 4) $\frac{x^2}{2}\sqrt{3-2x^2}-\sqrt{\left(3-2x^2\right)^3}$.
5. $\int \ln 3x\,dx$.	1) $\frac{1}{3}\ln^2 3x$; 2) $x\ln 3x-x$; 3) $\frac{1}{6}\ln^2 3x$; 4) $x\ln 3x-\frac{1}{3}x$.

Вариант 15

1. $\int \frac{\left(2x-\sqrt{x}\right)^2}{4x^2}dx$.	1) $x-2\sqrt{x}+\frac{1}{4}\ln\left\|x\right\|$; 2) $x-4\sqrt{x}+\frac{1}{4}\ln\left\|x\right\|$; 3) $x-4\sqrt{x}+\frac{1}{4}x^2$; 4) $x-2\sqrt{x}+\frac{1}{4}x^{-2}$.

2. $\int \frac{dx}{3x^2-4}$.	1) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left\|\frac{x\sqrt{3}+2}{x\sqrt{3}-2}\right\|$; 2) $\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left\|\frac{x\sqrt{3}+2}{x\sqrt{3}-2}\right\|$; 3) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left\|\frac{x\sqrt{3}-2}{x\sqrt{3}+2}\right\|$.
3. $\int \frac{6x-2}{x^2-4x+8}dx.$	1) $6\ln(x^2-4x+8)+5\ln\left\|\frac{x-2}{x+4}\right\|$; 2) $3\ln(x^2-4x+8)-5\ln\left\|\frac{x-2}{x+4}\right\|$; 3) $3\ln(x^2-4x+8)+5\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2}$; 4) $6\ln(x^2-4x+8)+5\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2}$.
4. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{4+\cos^2 x}}$.	1) $-2\sqrt{4+\cos^2 x}$; 2) $-\sqrt{4+\cos^2 x}$; 3) $-\frac{1}{4}\ln\left\|\cos x+\sqrt{\cos^2 x+4}\right\|$; 4) $-\ln\left\|\cos x+\sqrt{\cos^2 x+4}\right\|$.
5. $\int \ln^2 x dx.$	1) $x(\ln^2 x-\ln x-2)$; 2) $x(\ln^2 x-2\ln x-2)$; 3) $x(\ln^2 x-2\ln x+2)$; 4) $x(\ln^2 x+2\ln x-2)$.

Вариант 16

1. $\int \frac{4x^3 - 4x\sqrt{x} + 8\sqrt[3]{x}}{x^2}dx.$	1) $2x^2 - 4\sqrt{x} + 12x^{-\frac{2}{3}}$; 2) $2x^2 - 8\sqrt{x} - \frac{16}{3}x^{-\frac{2}{3}}$; 3) $2x^2 - 8\sqrt{x} - 12x^{-\frac{2}{3}}$; 4) $2x^2 - 8\sqrt{x} + 3x^{\frac{2}{3}}$.
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 2x^2}}.$	1) $\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{3}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{3}$; 3) $\ln\left\|x\sqrt{2} + \sqrt{9 - 2x^2}\right\|$; 4) $-0{,}5\sqrt{9 - 2x^2}$.
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{5 + x^2 - 2x}}.$	1) $0{,}5\,\mathrm{arctg}\frac{x-1}{2}$; 2) $\arcsin\frac{x-1}{2}$; 3) $\sqrt{5 + x^2 - 2x}$; 4) $\ln\left\|x - 1 + \sqrt{5 + x^2 - 2x}\right\|$.
4. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x}dx.$	1) $-\ln\cos^2 x$; 2) $-\cos^3 x$; 3) $2\ln\|\cos x\|$; 4) $-2\ln\|\sin x\|$.
5. $\int \arcsin x dx.$	1) $\arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$; 2) $0{,}5\arcsin^2 x$; 3) $x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$; 4) $x\arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$.

Вариант 17

1. $\int \frac{\left(1-\sqrt[3]{x}\right)^2}{x}dx.$	1) $\ln\lvert x\rvert - 3\sqrt[3]{x} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$; 2) $\ln\lvert x\rvert - 6\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[3]{x}$; 3) $\ln\lvert x\rvert - 3\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[3]{x^2}$; 4) $\ln\lvert x\rvert - 6\sqrt[3]{x} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$.
2. $\int \frac{dx}{7-4x^2}$.	1) $\frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left\lvert\frac{\sqrt{7}+2x}{\sqrt{7}-2x}\right\rvert$; 2) $\frac{1}{4\sqrt{7}}\ln\left\lvert\frac{\sqrt{7}+2x}{\sqrt{7}-2x}\right\rvert$; 3) $\frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x}{\sqrt{7}}$; 4) $\frac{1}{4\sqrt{7}}\ln\left\lvert\frac{\sqrt{7}-2x}{\sqrt{7}+2x}\right\rvert$.
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+3}}$.	1) $\arcsin\frac{x-3}{\sqrt{6}}$; 2) $-\arcsin\frac{x-3}{\sqrt{6}}$; 3) $\ln\left\lvert x-3+\sqrt{x^2-6x+3}\right\rvert$; 4) $\ln\left\lvert\frac{x-4}{x+1}\right\rvert$.
4. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{2-\cos^2 x}}$.	1) $2\sqrt{2-\cos^2 x}$; 2) $\frac{1}{2\sqrt{2-\cos^2 x}}$; 3) $0{,}5\sqrt{2-\cos^2 x}$; 4) $\sqrt{2-\cos^2 x}$.

5. $\int \frac{x\sin x dx}{\cos^3 x}$.	1) $\frac{1}{2}\text{tg}x - \frac{x}{\cos^2 x}$; 2) $\frac{1}{2}\left(\text{tg}x - \frac{x}{\cos^2 x}\right)$; 3) $\frac{1}{2}\text{tg}x + \frac{x}{\sin^2 x}$; 4) $2\text{tg}x - \frac{1}{2}\frac{x}{\cos^2 x}$.

Вариант 18

1. $\int \frac{x^2 - 2x + 3}{x\sqrt{x}} dx.$	1) $\frac{3}{2}x\sqrt{x} - 4\sqrt{x} - 6x^{-\frac{1}{2}}$; 2) $\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 4\sqrt{x} - 6x^{-\frac{1}{2}}$; 3) $\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + 6x^{\frac{1}{2}}$; 4) $\frac{3}{2}x\sqrt{x} - 4\sqrt{x} - 6x^{\frac{1}{2}}$.
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 4}}$.	1) $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2 - 4}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left\|x\sqrt{3} + \sqrt{3x^2 - 4}\right\|$; 4) $\ln\left\|x\sqrt{3} + \sqrt{3x^2 - 4}\right\|$.
3. $\int \frac{2 - 3x}{x^2 - 6x + 5} dx.$	1) $-\frac{3}{4}(x^2 - 6x + 5)^2 - \frac{7}{4}\ln\left\|\frac{x-5}{x-1}\right\|$; 2) $-\frac{3}{2}\ln\left\|x^2 - 6x + 5\right\| - \frac{7}{4}\ln\left\|\frac{x-7}{x+1}\right\|$;

	3) $-\frac{3}{2}\ln\left\|x^2-6x+5\right\|-\frac{7}{4}\ln\left\|\frac{x-5}{x-1}\right\|$; 4) $-\frac{3}{2}\ln\left\|x^2-6x+5\right\|-7\arcsin\frac{x-3}{2}$.
4. $\int\frac{\sin 2x dx}{4-\cos^2 2x}$.	1) $-\ln\left\|4-\cos^2 2x\right\|$; 2) $\arcsin\cos 2x$; 3) $-\frac{1}{8}\ln\left\|\frac{\cos 2x+2}{\cos 2x-2}\right\|$; 4) $\operatorname{arctg}\cos 2x$.
5. $\int\frac{xdx}{\sin^2 x}$.	1) $-x^2\operatorname{ctg}x$; 2) $x\operatorname{ctg}x-\ln\left\|\sin x\right\|$; 3) $-x\operatorname{ctg}x+\ln\left\|\sin x\right\|$; 4) $-x\operatorname{ctg}x-\ln\left\|\sin x\right\|$.

Вариант 19

1. $\int\frac{\left(\sqrt{x}-3x\right)^2}{x\sqrt{x}}dx$.	1) $\sqrt{x}-6x+9x\sqrt{x}$; 2) $2\sqrt{x}-6x+6x\sqrt{x}$; 3) $2\sqrt{x}-12x+6\sqrt{x}$; 4) $\sqrt{x}-12x+6x\sqrt{x}$.
2. $\int\frac{dx}{2-7x}$.	1) $-\frac{1}{(2-7x)^2}$; 2) $-\frac{1}{7}\ln\left\|2-7x\right\|$; 3) $\frac{1}{7(2-7x)^2}$; 4) $-7\ln\left\|2-7x\right\|$.

3. $\int \frac{xdx}{x^2-3x+2}$.	1) $\frac{1}{2}\ln\left\|x^2-3x+2\right\|-\frac{3}{2}\ln\left\|\frac{x-2}{x+1}\right\|$; 2) $\frac{1}{2}\ln\left\|x^2-3x+2\right\|+\frac{3}{2}\ln\left\|\frac{x-2}{x+1}\right\|$; 3) $\frac{1}{2}\ln\left\|x^2-3x+2\right\|+\ln\left\|\frac{x-2}{x-1}\right\|$; 4) $\frac{1}{2}\ln\left\|x^2-3x+2\right\|+2\mathrm{arctg}(2x-3)$.
4. $\int \frac{\ln xdx}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$.	1) $x\sqrt{1+\ln^2 x}$; 2) $\sqrt{1+\ln^2 x}$; 3) $\frac{x}{\sqrt{1+\ln^2 x}}$; 4) $2\sqrt{1+\ln^2 x}$.
5. $\int x\sin x\cos xdx$.	1) $-\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x$; 2) $\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x$; 3) $\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x$; 4) $-\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x$.

Вариант 20

1. $\int \frac{x^4-6x^2+4x-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^3}}dx$.	1) $\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}-4x\sqrt{x}+8\sqrt{x}-6x^{-\frac{1}{6}}$; 2) $\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}-4x\sqrt{x}+8\sqrt{x}+6x^{-\frac{1}{6}}$; 3) $\frac{7}{2}x^3\sqrt{x}-4x\sqrt{x}+8\sqrt{x}+6x^{-\frac{1}{6}}$;

	4) $\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}-4x\sqrt{x}+8\sqrt{x}+6x^{-\frac{1}{6}}$.
2. $\int\frac{dx}{5x^2-9}$.	1) $\frac{1}{30}\ln\left\|\frac{5x-3}{5x+3}\right\|$; 2) $\frac{1}{6\sqrt{5}}\ln\left\|\frac{5x-3}{5x+3}\right\|$; 3) $\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{x\sqrt{5}}{3}$; 4) $\frac{1}{6\sqrt{5}}\ln\left\|\frac{x\sqrt{5}-3}{x\sqrt{5}+3}\right\|$.
3. $\int\frac{3+x}{x^2-2x+5}dx$.	1) $\frac{1}{4}(x^2-2x+5)^2+2\mathrm{arctg}\frac{x-1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}\ln\left\|x^2-2x+5\right\|+4\mathrm{arctg}\frac{x-1}{2}$; 3) $\frac{1}{2}\ln\left\|x^2-2x+5\right\|+2\mathrm{arctg}\frac{x-1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}\ln\left\|x^2-2x+5\right\|+$ $+4\ln\left\|x-1+\sqrt{x^2-2x+5}\right\|$.
4. $\int\frac{x^3dx}{\cos^2 x^4}$.	1) $4\mathrm{tg}x^4$; 2) $-\frac{1}{4}\cos^{-1}x^4$; 3) $x^2\mathrm{tg}x^4-x\mathrm{tg}x^4$; 4) $\frac{1}{4}\mathrm{tg}x^4$.
5. $\int x\cos 3x dx$.	1) $x\sin 3x+\frac{1}{3}\cos 3x$; 2) $x\cos 3x-\frac{1}{3}\sin 3x$;

	3) $\frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x$; 4) $\frac{1}{3}x\cos 3x-\frac{1}{9}\sin 3x$.

Вариант 21

1. $\int \frac{\left(x\sqrt{x}-2\sqrt{x}\right)^2}{x\sqrt{x}}\,dx.$	1) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-8x^{\frac{3}{2}}+8x^{\frac{1}{2}}$; 2) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-6x^{\frac{3}{2}}+8x$; 3) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-6x^{\frac{3}{2}}+8x^{\frac{1}{2}}$; 4) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+8x^{\frac{1}{2}}$.
2. $\int \frac{dx}{\cos 2x}$.	1) $\frac{1}{2}\ln\left\lvert \mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert$; 2) $2\ln\left\lvert \mathrm{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert$; 3) $2\ln\left\lvert \mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert$; 4) $\frac{1}{2}\ln\left\lvert \mathrm{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert$.
3. $\int \frac{4x\,dx}{x^2-2x-3}$.	1) $2\ln\lvert x^2-2x-3\rvert+\ln\left\lvert\frac{x+1}{x-3}\right\rvert$; 2) $2\ln\lvert x^2-2x-3\rvert+\ln\left\lvert\frac{x-3}{x+1}\right\rvert$; 3) $2\ln\lvert x^2-2x-3\rvert+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,\frac{x-1}{2}$; 4) $2\ln\lvert x^2-2x-3\rvert+\mathrm{arctg}(x-1)$.

4. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$.	1) $\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$; 2) $2e^{\sqrt{x}}$; 3) $\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}$; 4) $2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$.
5. $\int x\cos^2 x dx$.	1) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x$; 2) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x$; 3) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x$; 4) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x$.

Вариант 22

1. $\int \frac{(x\sqrt{x}+3)^2}{x^2}dx$.	1) $\frac{1}{2}x^2 + 4x\sqrt{x} - \frac{9}{x}$; 2) $\frac{1}{2}x^2 + 12\sqrt{x} + \frac{3}{x^3}$; 3) $\frac{1}{2}x^2 + 12\sqrt{x} - \frac{9}{x}$; 4) $\frac{1}{2}x^2 + 12\sqrt{x} + \frac{9}{x}$.
2. $\int \mathrm{ctg}(3x-5)$.	1) $\frac{1}{6}\mathrm{ctg}^2(3x-5)$; 2) $\frac{1}{3}\ln\lvert\sin(3x-5)\rvert$; 3) $-\frac{1}{3}\ln\lvert\cos(3x-5)\rvert$; 4) $-\frac{1}{5}\ln\lvert\sin(3x-5)\rvert$.

3. $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+3}dx.$	1) $\frac{3}{4}(x^2-4x+3)^2+2\ln\left\|\frac{x-3}{x-1}\right\|$; 2) $\frac{3}{2}\ln\left\|x^2-4x+3\right\|+2\ln\left\|\frac{x-1}{x-3}\right\|$; 3) $\frac{3}{2}\ln\left\|x^2-4x+3\right\|+4\ln\left\|\frac{x-1}{x-3}\right\|$; 4) $\frac{3}{2}\ln\left\|x^2-4x+3\right\|+2\ln\left\|\frac{x-3}{x-1}\right\|$.
4. $\int \frac{2dx}{x(4-\ln^2 x)}.$	1) $\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{\ln x-2}{\ln x+2}\right\|$; 2) $\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{\ln x+2}{\ln x-2}\right\|$; 3) $\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{2+\ln x}{2-\ln x}\right\|$; 4) $2\arcsin\frac{\ln x}{2}$.
5. $\int \frac{\ln x}{x^2}dx.$	1) $\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$; 2) $-\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}$; 3) $\frac{\ln x}{x^3}-\frac{1}{x}$; 4) $-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$.

Вариант 23

1. $\int \frac{6x^3+5x\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x}dx.$	1) $2x^3+\frac{15}{2}x\sqrt{x}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$; 2) $2x^3-\frac{15}{2}x\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}$;

	3) $2x^3+\frac{10}{3}x\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}$; 4) $2x^3-\frac{10}{3}x\sqrt{x}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$.
2. $\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$.	1) $-2\sqrt{3-2x}$; 2) $2\sqrt{3-2x}$; 3) $-\frac{1}{\sqrt{3-2x}}$; 4) $-\sqrt{3-2x}$.
3. $\int\frac{2x-1}{x^2-2x}dx$.	1) $\ln\left\|x^2-2x\right\|+\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{x-2}{x}\right\|$; 2) $\ln\left\|x^2-2x\right\|+\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}$; 3) $\frac{1}{2}\ln\left\|x^2-2x\right\|+\ln\left\|\frac{x-2}{x}\right\|$; 4) $\ln\left\|x^2-2x\right\|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}$.
4. $\int\frac{\cos 2x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 2x}}$.	1) $0{,}5\sqrt[3]{\sin 2x}$; 2) $1{,}5\sqrt[3]{\sin^2 2x}$; 3) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\sin^2 2x}$; 4) $1{,}5\sqrt[3]{\sin 2x}$.
5. $\int\frac{\ln^2 x dx}{x^2}$.	1) $-\frac{\ln^2 x+\ln x-2}{x}$; 2) $-\frac{\ln^2 x+\ln x+2}{x}$; 3) $-\frac{\ln^2 x+2\ln x+2}{x}$; 4) $-\frac{\ln^2 x+2\ln x-2}{x}$.

Вариант 24

1. $\int \frac{(2x\sqrt{x}-5)^2}{x\sqrt{x}}\,dx.$	1) $\frac{9}{2}x^2\sqrt{x}-20x-50x^{-\frac{1}{2}}$; 2) $\frac{8}{5}x^2\sqrt{x}-20x-50x^{-\frac{1}{2}}$; 3) $\frac{5}{8}x^2\sqrt{x}-10x+50x^{-\frac{1}{2}}$; 4) $\frac{8}{9}x^2\sqrt{x}-10x-50x^{-\frac{1}{2}}$.
2. $\int \mathrm{tg}\left(2+\frac{x}{3}\right)dx.$	1) $3\ln\left\vert\cos\left(2+\frac{x}{3}\right)\right\vert$; 2) $-\frac{1}{3}\ln\left\vert\sin\left(2+\frac{x}{3}\right)\right\vert$; 3) $-\frac{1}{3}\ln\left\vert\cos\left(2+\frac{x}{3}\right)\right\vert$; 4) $-3\ln\left\vert\cos\left(2+\frac{x}{3}\right)\right\vert$.
3. $\int \frac{x-4}{x^2+8x+20}\,dx.$	1) $\frac{1}{4}(x^2+8x+20)^2-4\,\mathrm{arctg}\frac{x+4}{2}$; 2) $\frac{1}{2}\ln\left\vert x^2+8x+20\right\vert-8\,\mathrm{arctg}\frac{x+4}{2}$; 3) $\frac{1}{2}\ln\left\vert x^2+8x+20\right\vert-$ $-8\ln\left\vert x+4+\sqrt{x^2+8x+20}\right\vert$; 4) $\frac{1}{2}\ln\left\vert x^2+8x+20\right\vert-4\,\mathrm{arctg}\frac{x+4}{2}$.
4. $\int \frac{x^2dx}{\sin^2(2-x^3)}.$	1) $-\frac{1}{3}\mathrm{ctg}(2-x^3)$; 2) $\frac{1}{3}\mathrm{ctg}(2-x^3)$;

	3) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}(2-x^3)$; 4) $\frac{1}{3}\sin^{-1}(2-x^3)$.
5. $\int xe^{2x}dx$.	1) $\frac{1}{2}xe^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}$; 2) $2xe^{2x}-4e^{2x}$; 3) $\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}$; 4) $\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}$.

ОТВЕТЫ

В ответах опущена постоянная интегрирования.

1.2.1. $\frac{1}{2}x^4+2x^2+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+2x$. **1.2.2.** $\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+3x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}$.

1.2.3. $-\frac{1}{12}\left(1-2x^2\right)^3$. **1.2.4.** $x-\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{5}x^5$. **1.2.5.** $-\frac{1}{5}\left(3-2x^2\right)^{\frac{5}{4}}$.

1.2.6. $\frac{1}{12}\left(x^2-2x+2\right)^6$. **1.2.7.** $-\frac{1}{6}\left(1-\cos 2x\right)^{-3}$. **1.2.8.** $\arcsin\frac{x}{2}$.

1.2.9. $-\sqrt{4-x^2}$. **1.2.10.** $\frac{2}{15}(1+5t)^{\frac{3}{2}}$. **1.2.11.** $-\frac{1}{2}(2-3x)^{\frac{2}{3}}$.

1.2.12. $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}$. **1.2.13.** $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+5\right)$. **1.2.14.** $\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{\sqrt{2x}-\sqrt{5}}{\sqrt{2x}+\sqrt{5}}\right|$.

1.2.15. $\frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2-3}\right|$. **1.2.16.** $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2-3}$. **1.2.17.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}x}{2}$.

1.2.18. $-\frac{1}{3}\sqrt{4-3x^2}$. **1.2.19.** $-\frac{1}{2\ln 5}5^{1-2x}$. **1.2.20.** $-3\operatorname{ctg}\frac{x}{3}$. **1.2.21.** $\frac{1}{3}\sin 3x$.

1.2.22. $\frac{1}{2}\cos(1-2x)$. **1.2.23.** $\ln|2-\cos x|$. **1.2.24.** $\frac{3^{2+3x^2}}{6\ln 3}$.

1.2.25. $\frac{1}{7}x^7-x^4+\frac{3}{2}x^2-5x$. **1.2.26.** $\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}-\frac{12}{5}x^{\frac{5}{6}}+\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}$. **1.2.27.** $0{,}5x^2+\sqrt{2}x$.

1.2.28. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$. **1.2.29.** $\ln\left|x+\sqrt{x^2-9}\right|$. **1.2.30.** $\arcsin\frac{x}{3}$. **1.2.31.** $0{,}5\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$.

1.2.32. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x+\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}\right|$. **1.2.33.** $\sin x+\cos x$. **1.2.34.** $-0{,}2\ln|3-5x|$.

1.2.35. $-\frac{2}{x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$. **1.2.36.** $\frac{2^x}{\ln 0{,}4\cdot 5^x}+\frac{3^x}{\ln 0{,}6\cdot 5^x}$. **1.2.37.** $-\frac{5^x}{\ln 5}$.

1.2.38. $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$. **1.2.39.** $0{,}5\ln|4-\cos 2x|$. **1.2.40.** $\ln|2+\ln x|$.

1.2.41. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}(3x+1)$. **1.2.42.** $-\frac{1}{8}\operatorname{ctg}x^2$. **1.2.43.** $-0{,}5\sin(1-2x)$.

1.2.44. $-0{,}1(2+5x)^{-2}$. **1.2.45.** $\frac{1}{3}\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)\right|$. **1.2.46.** $\frac{1}{24}(4+3x)^6$.

1.2.47. $\frac{1}{8}\sin^4 2x$. **1.2.48.** $-2\left(1-\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$. **1.2.49.** $0{,}15(5x-2)^{\frac{4}{3}}$.

1.2.50. $-\frac{1}{4}\cos 4x$. **1.2.51.** $-\frac{1}{2\ln 5}5^{1-2x}$. **1.2.52.** $-\frac{1}{2e^{2x}}$. **1.2.53.** $\frac{1}{3}\ln^3 x$.

1.2.54. $\ln|5+x|$. **1.2.55.** $x-\operatorname{arctg} x$. **1.2.56.** $x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}$. **1.2.57.** $\frac{1}{3}e^{3x}$.

1.2.58. $-\frac{3}{8}\left(2-x^2\right)^{\frac{4}{3}}$. **1.2.59.** $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+1\right|$. **1.2.60.** $-\frac{1}{2\ln 5}5^{1-x^2}$.

1.2.61. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+1\right|$. **1.2.62.** $\frac{3}{4}\operatorname{arctg}^{\frac{4}{3}} x$. **1.2.63.** $\operatorname{ctg}^3 x-2\operatorname{ctg} x$.

1.2.64. $\frac{1}{2}e^{\sin 2x}$. **1.2.65.** $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{3+2x}{3-2x}\right|$. **1.2.66.** $\frac{1}{2\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{5}}{2}$.

1.2.67. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3}$. **1.2.68.** $\frac{1}{3}\ln\left|3x+\sqrt{9x^2-4}\right|$. **1.2.69.** $\frac{1}{3}\ln\left|3x+\sqrt{9x^2+4}\right|$.

1.2.70. $\frac{2}{9}\arcsin^{\frac{3}{2}} 3x$. **1.2.71.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^4\frac{x}{2}$. **1.2.72.** $-2{,}5\operatorname{ctg}\frac{2x}{5}$.

1.2.73. $-0{,}3(2-5x)^{\frac{2}{3}}$. **1.2.74.** $2{,}5\ln\left|\cos\left(7-\frac{2x}{5}\right)\right|$.

1.2.75. $\frac{1}{4}x^4-2x^2+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^4}-x$. **1.2.76.** $8\sqrt{x}+\frac{6}{11}x^{\frac{11}{6}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$.

1.2.77. $\ln|x|+2\operatorname{arctg} x$. **1.2.78.** $\ln\left|x+\sqrt{x^2-5}\right|$. **1.2.79.** $\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right|$.

1.2.80. $\arcsin\frac{x}{2}$. **1.2.81.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|$. **1.2.82.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x+\frac{1}{2}x$.

1.2.83. $-\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x$. **1.2.84.** $\frac{1}{5}\cos(3-5x)$. **1.2.85.** $\frac{5}{2}\sin\frac{2}{5}x$.

1.2.86. $\frac{1}{4}\ln|\sin 4x|$. **1.2.87.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+4)$. **1.2.88.** $\ln\left|2+e^x\right|$.

1.2.89. $\frac{1}{3}(2x+5)^{\frac{3}{2}}$. **1.2.90.** $-\frac{1}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}}$. **1.2.91.** $\frac{1}{2}\ln^2 x$.

1.2.92. $-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}$. **1.2.93.** $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}^4 x$. **1.2.94.** $-\frac{1}{3}\ln|3-\sin 3x|$.

1.2.95. $x+\ln|x-2|$. **1.2.96.** $-\sqrt{4-x^2}$. **1.2.97.** $\frac{1}{3}\ln|2+3x|$.

1.2.98. $-\frac{1}{9(2+3x)^3}$. **1.2.99.** $-\ln(\cos^2 x)$. **1.2.100.** $\frac{2}{3}(3+2x)^{\frac{3}{4}}$.

1.2.101. $\frac{1}{2}\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\right|$. **1.2.102** $\frac{1}{12}(x^2-3)^6$. **1.2.103.** $-\frac{1}{9}\cos^3 3x$.

1.2.104. $\frac{1}{2\ln 3}3^{1+2x}$. **1.2.105.** $\frac{1}{1+\ln 9}(9e)^x$. **1.2.106.** $-\frac{1}{5\ln 10}10^{2-5x}$.

1.2.107. $\frac{1}{2\ln 5}5^{1+x^2}$. **1.2.108.** $\frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x$. **1.2.109.** $-3\operatorname{ctg}\frac{x}{3}$. **1.2.110.** $\ln|x\ln x|$.

1.2.111. $\frac{1}{2}x^2+x+\ln|x-1|$. **1.2.112.** $x-3\ln|x+3|$. **1.2.113.** $-\frac{1}{3\ln 5}5^{\cos 3x}$.

1.2.114. $\frac{2}{3}\arcsin^{\frac{3}{2}} x$. **1.2.115.** $\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x}{\sqrt{3}}$. **1.2.116.** $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{3x+2}{3x-2}\right|$.

1.2.117. $\arcsin\frac{3x}{2}$. **1.2.118.** $\frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2-25}\right|$.

1.2.119. $\frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2+25}\right|$. **1.2.120.** $-\frac{1}{15}\operatorname{ctg}^5 3x$.

1.2.121. $-0,05\arccos^4\frac{5x}{3}$. **1.2.122.** $1,25\operatorname{tg}\frac{4x}{5}$.

1.2.123. $-0,2\ln|\sin(2-5x)|$. **1.2.124.** $-2,5\left(4-\frac{x}{3}\right)^{\frac{6}{5}}$.

1.3.1. x^4-2x^3+5x. **1.3.2.** $2x^3-3x^2+7x-6$. **1.3.3.** $-2\cos x-\sin x$. **1.3.4.** $y=x^2-3x$. **1.3.5.** $s=t^3-t^2+12$. **1.3.6.** 18 м.

1.3.7. $s=t^3-15t^2+4t+5$. **1.3.8.** Через 5 с. **1.3.9.** 1) $s=35t-\frac{1}{29}t^2$; 2) $\frac{35^2}{29}\approx 62{,}5$ м. **1.3.10.** $x=\frac{v_0}{w}\sin\omega t$. **1.3.11.** $2x^4+3x^2-3x$.

1.3.12. x^3-x^2+4x-2. **1.3.13.** $y=\frac{x^3}{3}-10$. **1.3.14.** $s=t^2+t+2$.

1.3.15. $s=\frac{t^3}{3}+4t$. **1.3.16.** 1) $s=2t^3-12t^2+28t-12$; 2) $t=2$ с.

1.4.1. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{3}}{x+2+\sqrt{3}}\right|$. **1.4.2.** $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}$.

1.4.3. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right|+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}$.

1.4.4. $\arcsin\frac{x-3}{\sqrt{2}}$. **1.4.5.** $\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x-1}\right|$.

1.4.6. $-\frac{1}{2}\ln\left|3-2x-x^2\right|-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+3}{x-1}\right|$.

1.4.7. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-2-\sqrt{3}}{x-2+\sqrt{3}}\right|$. **1.4.8.** $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+6x-3\right|-\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{x+3-2\sqrt{3}}{x+3+2\sqrt{3}}\right|$.

1.4.9. $\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|$. **1.4.10.** $\arcsin\frac{x-2}{3}$.

1.4.11. $\sqrt{x^2+2x-5}-\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-5}\right|$.

1.4.12. $2\sqrt{6x-x^2-8}-3\arcsin(x-3)$.

1.4.13. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+6x-1\right|-\frac{3}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x+3-\sqrt{10}}{x+3+\sqrt{10}}\right|$.

1.4.14. $-3\sqrt{x^2+10x+29}+4\ln\left|x+5+\sqrt{x^2+10x+29}\right|$.

1.4.15. $\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{x^2-3x+\frac{5}{2}}+\frac{3\sqrt{2}}{4}\ln\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+\frac{5}{2}}\right|$.

1.4.16. $\frac{\sqrt{2}}{12}\ln\left|\frac{x-2-\sqrt{2}}{x-2+\sqrt{2}}\right|$. **1.4.17.** $\frac{3}{2}\ln\left|x^2+4x+1\right|+\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{3}}{x+2+\sqrt{3}}\right|$.

1.4.18. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-5}{x-3}\right|$. **1.4.19.** $\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+2}\right|$.

1.4.20. $\arcsin\frac{x-1}{2}$. **1.4.21.** $3\sqrt{x^2-4x+5}$. **1.4.22.** $\arcsin(2x-1)$.

1.4.23. $x+2\ln\left|x^2-4x+1\right|+\frac{7}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-2-\sqrt{3}}{x-2+\sqrt{3}}\right|$.

1.4.24. $-\sqrt{1-x-x^2}-\frac{5}{2}\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}$.

1.5.1. $-\frac{1}{2}\ln\left|4-x^2\right|$. **1.5.2.** $\frac{3}{7}(3+x)^{\frac{7}{3}}-\frac{9}{4}(3+x)^{\frac{4}{3}}$. **1.5.3.** $\frac{1}{2}\sqrt{3+2x^2}$.

1.5.4. $\frac{1}{4\ln 2}\ln\left|\frac{2^x+2}{2^x-2}\right|$. **1.5.5.** $-\frac{5}{36}\left(1-2x^3\right)^{\frac{6}{5}}$. **1.5.6.** $\ln\left|x^2+3x-1\right|$.

1.5.7. $-\frac{1}{2}\left(1-x^3\right)^{\frac{2}{3}}$. **1.5.8.** $\frac{1}{2}\ln\left|3+2e^x\right|$. **1.5.9.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{\sqrt{2}}$.

1.5.10. $-\frac{1}{5}e^{\frac{5}{x}}$. **1.5.11.** $-\ln\left|1+5x-x^2\right|$. **1.5.12.** $\frac{3}{2}\left(\ln|x|\right)^{\frac{2}{3}}$.

1.5.13. $\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}$. **1.5.14.** $-\frac{1}{8}\cos^4 2x$. **1.5.15.** $\frac{2}{9}(\operatorname{tg}3x)^{\frac{3}{2}}$.

1.5.16. $-3\left(4-\sin\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$. **1.5.17.** $\arcsin x-2\arcsin^2 x$. **1.5.18.** $\frac{3}{5}\sin^{\frac{5}{3}} x$.

1.5.19. $-\arcsin\frac{1}{x}$. **1.5.20.** $\sqrt{\frac{x}{x+2}}$. **1.5.21.** $2\sqrt{x}-4\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{2}$.

1.5.22. $2\sqrt{x+1}-4\ln\left|\sqrt{x+1}+2\right|$. **1.5.23.** $\arcsin\frac{\ln x}{2}$.

1.5.24. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+\sqrt{x^4+5}\right|$. **1.5.25.** $\frac{1}{\ln a}\ln\left|a^x+\sqrt{a^{2x}-1}\right|$.

1.5.26. $\ln|x+2|+\frac{3}{x+2}$. **1.5.27.** $\frac{1}{2a\cos^2 ax}$. **1.5.28.** $-\cos\ln x$.

1.5.29. $\frac{1}{\ln 2}\operatorname{arctg} 2^x$. **1.5.30.** $-2\cos\sqrt{x}$. **1.5.31.** $\frac{3}{8}(x^4+5)^{\frac{2}{3}}$.

1.5.32. $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}^{\frac{3}{2}} e^x$. **1.5.33.** $\ln\frac{e^x}{e^x+1}$. **1.5.34.** $\frac{1}{2}e^{x^2+4x-1}$.

1.5.35. $-\frac{1}{6}(2-4x)^{\frac{3}{2}}$. **1.5.36.** $-\frac{1}{2}\ln\left|4-x^2\right|$. **1.5.37.** $2e^{\sqrt{x}}$.

1.5.38. $\frac{1}{3}\ln\left|x^3+\sqrt{x^6+4}\right|$. **1.5.39.** $\frac{1}{3}\ln\left|x^3+2\right|$. **1.5.40.** $-e^{\frac{1}{1+x}}$.

1.5.41. $2\sqrt{x^2+\sin x}$. **1.5.42.** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+x$. **1.5.43.** $\frac{1}{4}\ln\left|3+4e^x\right|$.

1.5.44. $-\frac{1}{4\arcsin^2 2x}$. **1.5.45.** $-\operatorname{ctg}(\ln x)$. **1.5.46** $\frac{1}{\ln 2}\arcsin 2^{x-1}$.

1.5.47. $-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}\right|$. **1.5.48.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{2x+9}-3}{\sqrt{2x+9}+3}\right|$.

1.5.49. $\frac{1}{8}e^{4\sin 2x-1}\cos 2x$. **1.5.50.** $-\left(6+\sqrt[3]{x}\right)^{-3}$. **1.5.51.** $\sin\ln x$.

1.5.52. $-\frac{2}{15}(32+8x+3x^2)\sqrt{2-x}$. **1.5.53.** $\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+\frac{12}{5}x^{\frac{5}{12}}+\frac{12}{5}\ln\left|x^{\frac{5}{12}}-1\right|$.

1.5.54. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}(x^2+4)$. **1.5.55.** $\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+2\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}-2\operatorname{tg}x}\right|$.

1.5.56. $\frac{2}{3}\ln^{\frac{3}{2}} x-6\sqrt{\ln x}$. **1.5.57.** $\frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$.

1.5.58. $-\ln\left|1+e^{-x}\right|$. **1.5.59.** $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}$.

1.5.60. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-x+4\sqrt{x}-4\ln\left|1+\sqrt{x}\right|$. **1.5.61.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}$.

1.5.62. $\frac{2}{3}(e^x-2)\sqrt{e^x+1}$. **1.5.63.** $\frac{1}{3}\ln\left|3x+\sqrt{9x^2-4}\right|$.

1.5.64. $\frac{1}{4}\ln\left|x^4+\sqrt{x^8+3}\right|$. **1.5.65.** $\frac{1}{2}\sqrt{x^4+3}$. **1.5.66.** $\ln|x+2|+\frac{3}{x+2}$.

1.5.67. $-2\sqrt{1-\ln x}$. **1.5.68.** $\arcsin(\ln x)$. **1.5.69.** $-\frac{11}{2(x-2)^2}-\frac{4}{x-2}$.

1.5.70. $-\frac{1}{2}\ln\left|1-\ln^2 2x\right|$. **1.5.71.** $\frac{1}{4}e^{2x^2}$. **1.5.72.** $\arcsin e^x-\sqrt{1-e^{2x}}$.

1.5.73. $\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+2\sqrt{x}$. **1.5.74.** $\frac{6}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}}$. **1.5.75.** $\frac{3}{7}(x+1)^{\frac{7}{3}}+\frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}}$.

1.5.76. $\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{x^2-1}}\right|$.

1.6.1. $x\sin x+\cos x$. **1.6.2.** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$.

1.6.3. $\frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{9}e^{3x}$. **1.6.4.** $-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$. **1.6.5.** $(x-1)\cos x-\sin x$.

1.6.6. $\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)$. **1.6.7.** $\frac{1}{5}e^{2x}\sin x-\frac{2}{5}e^{2x}\cos x$.

1.6.8. $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|$. **1.6.9.** $-x\operatorname{ctg}x+\ln|\sin x|$.

1.6.10. $-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+x$. **1.6.11.** $x\ln x(\ln x-2)$.

1.6.12. $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x\sin x-\frac{1}{2}\cos x$. **1.6.13.** $\frac{1}{3}e^{3x}\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}\right)$.

1.6.14. $\frac{1}{1+\ln^2 4}4^x(\sin x\ln 4-\cos x)$. **1.6.15.** xe^x-e^x.

1.6.16. $x\ln|2x+3|-x+1{,}5\ln|2x+3|$. **1.6.17.** $\frac{1}{4}x^4\ln|x|-\frac{1}{16}x^4$.

1.6.18. $-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x$. **1.6.19.** $\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$.

1.6.20. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$. **1.6.21.** $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x$.

1.6.22. $\frac{1}{2}e^x\sin x-\frac{1}{2}e^x\cos x$. **1.6.23.** $\frac{1}{\ln 5}x5^x-\frac{1}{\ln^2 5}5^x$.

1.6.24. $\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{arctg}\,x-\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|$. **1.6.25.** $\frac{1}{2}x\sin\ln x-\frac{1}{2}x\cos\ln x$.

1.6.26. $2\sqrt{1+x}\arcsin x+4\sqrt{1-x}$. **1.6.27.** $x\ln x-x$.

1.6.28. $\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2$. **1.6.29.** $x\sin x+\cos x$. **1.6.30.** $\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)$.

1.6.31. $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x$. **1.6.32.** $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x$.

1.6.33. $\frac{1}{13}e^{2x}(2\sin 3x-3\cos 3x)$. **1.6.34.** $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$.

1.6.35. $-(x^2+2x+2)e^x$. **1.6.36.** $\frac{x}{2}(\sin\ln x+\cos\ln x)$.

1.6.37. $x\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|-\sqrt{1+x^2}$. **1.6.38.** $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}\right)\arcsin x+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}$.

1.7.1. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{(x+1)^2(x-2)}{(x-1)(x+2)^2}\right|$. **1.7.2.** $-\frac{1}{2x}-\frac{5}{4}\ln|x|+\frac{1}{36}\ln|x-2|-\frac{2}{3(x+1)}+\frac{11}{9}\ln|x+1|$.

1.7.3. $\frac{1}{2}x^2+x+\ln|x|-\frac{2}{3}\ln|x-2|-\frac{1}{3}\ln|x+1|$. **1.7.4.** $\frac{1}{3}\mathrm{arctg}x-\frac{1}{6}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}$.

1.7.5. $\frac{2-3x-x^2}{4x^2(x+2)}-\frac{1}{8}\ln\frac{x}{x+2}$.

1.7.6. $\frac{1}{52}\ln|x-3|-\frac{1}{20}\ln|x-1|+\frac{1}{65}\ln\left|x^2+4x+5\right|+\frac{7}{30}\mathrm{arctg}(x+2)$.

1.7.7. $\frac{x+2}{2(x^2+1)}+2\mathrm{arctg}x+\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln(x^2+1)$.

1.7.8. $-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. **1.7.9.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|$.

1.7.10. $-\frac{7}{2(x-2)^2}-\frac{2}{x-2}$. **1.7.11.** $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{3}{x+1}+5\ln|x+1|$.

1.7.12. $-\frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right|+\frac{1}{3}x^3$. **1.7.13.** $\frac{1}{2}x^2+x+\frac{9}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{4}\ln|x+1|$.

1.7.14. $-\ln(x^2+3)-\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+\ln(x^2-2x+5)+\frac{5}{2}\mathrm{arctg}\frac{x-1}{2}$.

1.7.15. $\frac{1}{2x}+\frac{3}{4}\ln|x|+\frac{1}{36}\ln|x-2|+\frac{1}{3(x+1)}-\frac{7}{9}\ln|x+1|.$

1.7.16. $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|.$ **1.7.17.** $x+\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right|.$

1.7.18. $\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-3}+\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|.$ **1.7.19.** $-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|.$

1.7.20. $-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}x.$ **1.7.21.** $\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)+\frac{5}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}.$

1.7.22. $\frac{1}{2}x^2-\frac{11}{(x-2)^2}-\frac{8}{x-2}.$ **1.7.23.** $\ln|x-2|-\frac{9}{x-2}-\frac{11{,}5}{(x-2)^2}.$

1.7.24. $\ln|x-5|-\frac{4}{x-5}-\frac{1}{x}.$ **1.7.25.** $\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}.$

1.7.26. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$

1.8.1. $\frac{1}{8\cos^4 2x}.$ **1.8.2.** $-\frac{1}{10}\cos 5x-\frac{1}{2}\cos x.$ **1.8.3.** $\frac{1}{6}\sin 3x+\frac{1}{22}\sin 11x.$

1.8.4. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}\sin 6x.$ **1.8.5.** $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x.$

1.8.6. $\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x.$ **1.8.7.** $-\frac{1}{\sin x}-\sin x.$

1.8.8. $\frac{1}{\cos x}+\cos x.$ **1.8.9.** $\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x.$ **1.8.10.** $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x-\ln|\sin x|.$

1.8.11. $\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x.$ **1.8.12.** $\frac{1}{3\sin^3 x}-\frac{1}{5\sin^5 x}.$ **1.8.13.** $-\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi-x}{4}\right|.$

1.8.14. $\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right|.$ **1.8.15.** $\frac{1}{\cos^2 x}.$ **1.8.16.** $-\frac{1}{3}\sin^3 x-\sin x+\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right|.$

1.8.17. $\frac{1}{2\cos^2 x}+\ln|\operatorname{tg}x|.$ **1.8.18.** $\frac{1}{2}\cos^2 x-4\cos x+15\ln|4+\cos x|.$

1.8.19. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}x+x.$ **1.8.20.** $3\sqrt[3]{\cos x}\left(\frac{2}{7}\cos^2 x-\frac{1}{13}\cos^4 x-1\right).$

1.8.21. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}\right|.$ **1.8.22.** $\ln(1+\sin^2 x).$ **1.8.23.** $\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 8x.$

1.8.24. $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{12}\sin 6x.$ **1.8.25.** $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x.$

1.8.26. $\frac{3}{11}\cos^{\frac{11}{3}} x-\frac{3}{5}\cos^{\frac{5}{3}} x.$ **1.8.27.** $\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}\sin 6x.$

1.8.28. $\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin 4x.$ **1.8.29.** $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x.$ **1.8.30.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}\right|.$

1.8.31. $\frac{1}{2}\cos^2 x-2\cos x+3\ln\left|\cos x+2\right|.$ **1.8.32.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x-1}{\sqrt{2}}.$

1.8.33. $\frac{1}{3\sin^3 x}-\frac{1}{5\sin^5 x}.$ **1.8.34.** $\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right|.$

1.8.35. $-\frac{1}{8}\frac{1}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}.$ **1.8.36.** $2\sqrt{\operatorname{tg}x}+\frac{2}{5}\operatorname{tg}^{\frac{5}{2}} x.$

1.8.37. $\frac{1}{8}\operatorname{tg}^4 2x-\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2 2x+\frac{1}{4}\ln(\operatorname{tg}^2 2x+1).$

1.8.38. $\operatorname{ctg}x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}x).$ **1.8.39.** $\frac{3}{8}\cos^8\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\cos^6\frac{x}{3}.$

1.8.40. $\frac{1}{2}\sin x^2-\frac{1}{6}\sin^3 x^2.$ **1.8.41.** $\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$ **1.8.42.** $\frac{2}{5}\cos^{\frac{5}{2}} x-2\cos^{\frac{1}{2}} x.$

1.8.43. $-0,02\sin 25x+0,1\sin 5x.$ **1.8.44.** $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\cos x.$

1.8.45. $\frac{3}{8}x+\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{16}\sin 2x$. **1.8.46.** $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}$.

1.8.47. $-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x$. **1.8.48.** $3x+4\sin x+\sin 2x$.

1.8.49. $\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x$. **1.8.50.** $\frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x$.

1.8.51. $-\frac{1}{\sin x}-\sin x$. **1.8.52.** $-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x+\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x$.

1.8.53. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg} x+x$. **1.8.54.** $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x+\ln|\sin x|$.

1.8.55. $-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}$. **1.8.56.** $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x-3}{\operatorname{tg} x+3}\right|$. **1.8.57.** $\frac{1}{6}\operatorname{tg}^6 x+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x$.

1.8.58. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right|$. **1.8.59.** $2\sin\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}$.

1.8.60. $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\cos^4 x}+\frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^{10} x}-\frac{3}{16}\sqrt[3]{\cos^{16} x}$. **1.8.61.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x+\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x|$.

1.8.62. $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x$.

1.9.1. $2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}$. **1.9.2.** $\ln\left|x+\sqrt{9+x^2}\right|$.

1.9.3. $\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|-\frac{1}{x}\sqrt{x^2+1}$. **1.9.4.** $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

1.9.5. $\frac{1}{20}\operatorname{arctg}\frac{5x}{4\sqrt{9-x^2}}$. **1.9.6.** $\frac{2}{3}\frac{2x+1}{\sqrt{1+x+x^2}}$.

1.9.7. $\frac{1}{4}\arccos\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{x^2-4}}{2x^2}$. **1.9.8.** $\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\sqrt{2\left(1+x^2\right)}}{\sqrt{x^2+2}}\right|$.

1.10.1. $\frac{1}{5}(x+2)(3x+1)^{\frac{2}{3}}$. **1.10.2.** $\frac{4}{3}\left(x^{\frac{3}{4}}-\ln\left|x^{\frac{3}{4}}+1\right|\right)$.

1.10.3. $\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}(x-2)+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$. **1.10.4.** $\frac{2}{9}\frac{3x-2}{\sqrt{3x-1}}$.

1.10.5. $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. **1.10.6.** $\frac{1}{15}\left(3x^4+4x^2+8\right)\sqrt{1-x^2}$.

1.10.7. $\left(\frac{1}{4x^4}+\frac{3}{8x^2}\right)\sqrt{x^2-1}-\frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{x}$.

1.10.8. $2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{4}\left(2-x^2\right)\sqrt{4-x^2}$.

1.10.9. $\ln\frac{x+1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$. **1.10.10.** $\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}$.

1.10.11. $\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{1}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|$.

1.10.12. $-\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1}-2\arcsin\frac{1}{x-2}$.

1.10.13. $-\frac{1}{x}\sqrt{x^2+a^2}+\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right|$. **1.10.14.** $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1.10.15. $\sqrt{x^2-4}-2\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}$. **1.10.16.** $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{a}\sqrt{a^2-x^2}$.

1.10.17. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **1.10.18.** $\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x}$.

1.10.19. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|$. **1.10.20.** $\frac{2}{3}\cdot\frac{2x+1}{\sqrt{1+x+x^2}}$.

1.10.21. $-\ln\left|\frac{1}{x}-3+\sqrt{10-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}\right|$. **1.10.22.** $2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}+3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|$.

1.10.23. $\sqrt[6]{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}-2\sqrt{x+1}$.

1.10.24. $2\sqrt{x}+6\sqrt[3]{x}+24\sqrt[6]{x}+48\ln\left|\sqrt[6]{x}-2\right|$. **1.10.25.** $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

1.10.26. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|$. **1.10.27.** $-\dfrac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{2}\arcsin x$.

1.10.28. $\sqrt{x^2+1}-\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|$. **1.10.29.** $\sqrt{x^2-a^2}-\arccos\dfrac{a}{x}$.

1.10.30. $\dfrac{1}{9}\sin\operatorname{arctg}\dfrac{x}{3}$. **1.10.31.** $12{,}5\arcsin\dfrac{x}{5}+2{,}5x\sqrt{25-x^2}$.

1.10.32. $\dfrac{1}{3}\sqrt{x^2-25}(x^2+50)$. **1.10.33.** $-\dfrac{\sqrt{(16-x^2)^3}}{48x^3}$.

1.10.34. $\ln\left|\sqrt{x^2-1}+x\right|-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$. **1.10.35.** $\dfrac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}-x+\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}+4\sqrt[4]{x}-4\ln\left(\sqrt[4]{x}+1\right)$.

1.10.36. $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}$. **1.10.37.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\dfrac{4x-3}{5}$.

1.10.38. $\dfrac{3}{4}x\sqrt[3]{x}-x+3\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt[3]{x}+6\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|$.

1.10.39. $2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}+3\ln\left|\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|$. **1.10.40.** $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}+\dfrac{1}{2}\ln\left|1+\sqrt{x-1}\right|$.

1.10.41. $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2}(x-2)+\dfrac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$.

1.10.42. $\ln\left|\dfrac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2}{x+2+\sqrt{x+1}}\right|-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}}$.

1.11.1. $\dfrac{1}{4}\operatorname{arctg}x^4$. **1.11.2.** $\dfrac{1}{4}\ln(x^4+1)+\dfrac{1}{4(x^4+1)}$.

1.11.3. $\dfrac{2}{3}\operatorname{arctg}x^3-\dfrac{1}{6}\ln(x^6+1)$. **1.11.4.** $\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x^3-1}{\sqrt{3}}$.

1.11.5. $\dfrac{1}{5}\ln\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+5}}$. **1.11.6.** $\dfrac{1}{2}\left(\ln\left|\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right|-\dfrac{1}{x+1}\right)$.

1.11.7. $\sqrt{2x}-\frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x)^5}$. **1.11.8.** $\frac{2x-1}{\sqrt{4x^2-2x+1}}$. **1.11.9.** $\frac{1}{5}(x^4+1)^{\frac{5}{4}}$.

1.11.10. $\ln\left|\ln x+\sqrt{1+\ln^2 x}\right|$. **1.11.11.** $\frac{1}{2}\ln^2\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|$.

1.11.12. $\operatorname{tg} x\ln|\cos x|+\operatorname{tg} x-x$. **1.11.13.** $2xe^{\sqrt{x}}-4\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}+4e^{\sqrt{x}}$.

1.11.14. $-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+x$. **1.11.15.** $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{tg} x\right)$.

1.11.16. $2\left(\sqrt[4]{x-3}-1\right)^2+4\ln\left(1+\sqrt[4]{x-3}\right)$. **1.11.17.** $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)$.

1.11.18. $x\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|$. **1.11.19.** $\ln|\operatorname{tg} x|+\operatorname{tg}^2 x+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x$.

1.11.20 $\operatorname{tg} x-x+\frac{1}{\cos x}$.

1.11.21. $\frac{1}{2}(x+2)\sqrt{x^2+4x+5}+\frac{1}{2}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|$.

1.11.22. $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+4x-5)^3}-(x+2)\sqrt{x^2+4x-5}+9\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x-5}\right|$.

1.11.23. $\frac{1}{4}e^{2x}(2x-1)$. **1.11.24.** $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+5}\right|$. **1.11.25.** $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$.

1.11.26. $3x^{\frac{1}{3}}-12x^{\frac{1}{6}}+24\ln(x^{\frac{1}{8}}+2)$. **1.11.27.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\ln(4+e^{2x})$.

1.11.28. $\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{x}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}$. **1.11.29.** $2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}$.

1.11.30. $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x$. **1.11.31.** $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x$. **1.11.32.** $\frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}$.

1.11.33. $\sqrt{x^2-4x+1}+3\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+1}\right|$.

1.11.34. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{x^2+2x+3}}{x+1}\right|$.

1.11.35. $-2\left(\sqrt[4]{5-x}-1\right)^2-4\ln\left(1+\sqrt[4]{5-x}\right)$. **1.11.36.** $-\frac{1}{x}-\frac{4}{3x\sqrt{x}}-\frac{1}{2x^2}$.

1.11.37. $\frac{3}{2}\ln\left(x^2+\sqrt{1+x^4}\right)$. **1.11.38.** $\frac{1}{3}x\operatorname{tg}3x+\frac{1}{9}\ln\left|\cos 3x\right|$.

1.11.39 $\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x-\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|$. **1.11.40.** $\frac{1}{\ln 9}\ln\left|\frac{1+3^x}{1-3^x}\right|$.

1.11.41. $\frac{1}{3}\sin\frac{3x}{2}-\frac{1}{10}\sin\frac{5x}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$. **1.11.42.** $-\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2}$.

1.11.43. $-2\operatorname{ctg}x-\frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{ctg}^3 x}$. **1.11.44.** $\frac{3}{2}\ln\left|1-\cos x\right|-\frac{1}{2}\ln\left|1+\cos x\right|$.

1.11.45. $\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{20}\sin 5x+\frac{1}{28}\sin 7x$.

1.11.46. $\frac{1}{2}x^2\arcsin x-\frac{1}{4}\arcsin x+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}$.

1.11.47. $\frac{2}{15}\left(\sqrt{(x+5)^3}+\sqrt{x^3}\right)$.

1.11.48. $-\sqrt{1-\ln^2 x-4\ln x}-\frac{2}{\sqrt{5}}\arcsin(2+\ln x)$. **1.11.49.** $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}^2 x\right)$.

1.11.50. $\frac{1}{2}x^2\ln\left|1+x^3\right|-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}\ln(x^2-x+1)-\frac{1}{2}\ln\left|x+1\right|+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Александрова, О. В**. Задачи по высшей математике. Примеры решения типовых задач : учеб. пособие / О. В. Александрова, И. А. Козик. – М. : КУРС, 2022. – 104 с.

2 Математический анализ. Задачи и упражнения : учеб. пособие. В 3 ч. / И. Л. Васильев, Ю. В. Васильев, В. Г. Кротов, Т. С. Мардвилло – Минск : Выш. шк., 2022. – Ч. 1. – 293 с.

3 Высшая математика : практикум. В 2 ч. / О. М. Матейко, С. А. Самаль, Н. Б. Яблонская ; под ред. С. А. Самаля. – Минск : РИВШ, 2020. – Ч. 1. – 332 с.

4 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-Пресс, 2021. – 608 с.

5 **Ровба, Е. А.** Высшая математика / Е. А. Ровба. – Минск : Выш. шк., 2018. – 398 с.

6 **Ровба, Е. А.** Математика для инженеров: примеры и задачи : учеб. пособие. В 4 ч. / Е. А. Ровба, Н. С. Березкина. – Минск : РИВШ, 2019. – Ч. 2. – 388 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ЗАДОРОЖНЮК Елена Андреевна
ГРИБОВСКАЯ Евгения Евгеньевна
ШАБАЛИНА Ирина Петровна

Неопределенный интеграл

Пособие

Редактор Е.Г. Привалова
Технический редактор В.Н. Кучерова

Подписано в печать . .2026 г. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 100 экз.
Зак № . Изд №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский государственный университет транспорта.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/361 от 13.06.2014 г.
№ 2/104 от 01.04.2014 г.
№ 3/1583 от 14.11.2017 г.
Ул. Кирова, 34, 246653, г. Гомель