2 **Горшков, А. Г.** Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : Физматлит, 2005. – 576 с. – EDN RXGSLJ.
3 **Zhuravkov, M.** Mechanics of Solid Deformable Body / M. Zhuravkov, Y. Lyu, E. Starovoitov. – Singapore : Springer Verlag, 2023. – 317 p.
4 **Абдусаттаров, А.** Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / А. Абдусаттаров, Э. И. Старовойтов, Н. Б. Рузиева. – Ташкент : ТГТУ, 2023. – 381 с.
5 Деформирование трехслойных пластин при термосиловых нагрузках / Э. И. Старовойтов, Ю. В. Шафиева, А. В. Нестерович, А. Г. Козел. – Гомель : БелГУТ, 2024. – 395 с.
6 Deformation of Three-layer Structural Elements in Thermal Radiation Fields / E. I. Starovoitov, M. A. Zhuravkov, D. V. Leonenko, Lyu Yongtao. – Springer Nature Singapore, Pte Ltd. – 2024. – 384 p.
7 **Leonenko, D. V.** Vibrations of Cylindrical Sandwich Shells with Elastic Core Under Local Loads / D. V. Leonenko, E. I. Starovoitov // International Applied Mechanics. – 2016. – Vol. 52 (4). – P. 359–367.
8 Natural vibration of a sandwich beam on an elastic foundation / V. D. Kubenko, Yu. M. Pleskachevskii, É. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2006. – Vol. 42, № 5. – P. 541–547.
9 **Starovoitov, É. I.** Vibrations of a sandwich rod under local and impulsive forces / É. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2005. – Vol. 41, № 7. – P. 809–816.
10 **Tarlakovskii, D. V.** Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells / D. V. Tarlakovskii, G. V. Fedotenkov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol. 43, № 2. – P. 145–152.
11 **Вестяк, В. А.** Распространение нестационарных объемных возмущений в упругой полуплоскости / В. А. Вестяк, А. С. Садков, Д. В. Тарлаковский // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2011. – № 2. – С. 130–140.
12 Воздействие нестационарного давления на тонкую сферическую оболочку с упругим заполнителем / А. В. Вестяк, Л. А. Игумнов, Д. В. Тарлаковский, Г. В. Федотенков // Вычислительная механика сплошных сред. – 2016. – Т. 9, № 4. – С. 443–452.
13 **Леоненко, Д. В.** Колебания круговой трехслойной пластины под действием внешней нагрузки / Д. В. Леоненко, М. В. Маркова // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2023. – № 1. – С. 49–63.
14 **Старовойтов, Э. И.** Колебания сэндвич-пластины в температурном поле, вызванные локальным импульсом / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Проблемы машиностроения и автоматизации. − 2025. − № 1 (370). − С. 38−45.
15 **Старовойтов, Э. И.** Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака / Э. И. Старовойтов, А. Г. Козел // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т. 24, № 3. – С. 392–406.
16 **Starovoitov, E. I.** Deformation of a composite plate on an elastic foundation by local loads / E. I. Starovoytov, D. V. Leonenko, M. Suleyman // Mechanics of Composite Materials. – 2007. – Vol. 43, № 1. – P. 75–84.
17 **Захарчук, Ю. В.** Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – № 10 (6). – С. 55–66.
18 Деформирование круговой трехслойной пластины на упругом основании / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2005. – Т. 2, № 1. – С. 16–19.
19 **Старовойтов, Э. И.** Упругопластическое деформирование трехслойных стержней в температурном поле / Э. И. Старовойтов // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2012. – № 3. – С. 91–98.
20 **Старовойтов, Э. И.** Изгиб прямоугольной трехслойной пластины на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Е. П. Доровская // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2006. – № 3. – С. 45–50.
21 **Старовойтов, Э. И.** Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, М. Сулейман // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2006. – Т. 3, № 4. – С. 55–62.

УДК 625.8

ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ С ШАРНИРНЫМ ОПИРАНИЕМ ПО МОМЕНТАМ ПРИ УЧЕТЕ ПОЛНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ЗАДАЧИ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНОЙ НАГРУЗКИ

Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ
Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация
МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация

ДО НГОК ДАТ
Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация

Рассматривается нестационарный изгиб изотропных пластин в прямоугольной декартовой системе координат Ox_1x_2 при общей модели [1, 2]. Уравнения, описывающие движение упругой пластины с учетом моментных напряжений и физические соотношения, имеют следующую форму

$$\ddot{w}=\gamma_{\alpha+}^{-2}\Delta w+\gamma_{\alpha-}^{-2}\theta_{\psi}-2\alpha\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}-\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1}\right)+q,$$

$$\ddot{\psi}_1=c_{\alpha+}\frac{\partial\theta_{\psi}}{\partial x_1}+\gamma_{\alpha+}^{-2}\Delta\psi_1+2\alpha\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2}-r^{-2}\left(\gamma_{\alpha-}^{-2}\frac{\partial w}{\partial x_1}+\gamma_{\alpha+}^{-2}\psi_1-2\alpha\omega_2\right)+m_1,$$

$$\ddot{\psi}_2=c_{\alpha+}\frac{\partial\theta_{\psi}}{\partial x_2}+\gamma_{\alpha+}^{-2}\Delta\psi_2-2\alpha\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1}-r^{-2}\left(\gamma_{\alpha-}^{-2}\frac{\partial w}{\partial x_2}+\gamma_{\alpha+}^{-2}\psi_2+2\alpha\omega_1\right)+m_2,\tag{1}$$

$$\ddot{\omega}_1=2\alpha\upsilon\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}-\psi_2\right)+\gamma_2^{-2}\Delta\omega_1+c_{02}\frac{\partial\theta_{\omega}}{\partial x_1}-4\alpha\upsilon\omega_1+\gamma_3^{-2}\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1}+\tilde{m}_{M1},$$

$$\ddot{\omega}_2=2\alpha\upsilon\left(\psi_1-\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)+\gamma_2^{-2}\Delta\omega_2+c_{02}\frac{\partial\theta_{\omega}}{\partial x_2}-4\alpha\upsilon\omega_2+\gamma_3^{-2}\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2}+\tilde{m}_{M2},$$

$$\ddot{\varphi}_3=2\alpha\upsilon\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}-\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}-2\varphi_3\right)+\gamma_2^{-2}\Delta\varphi_3-r^{-2}\left(\gamma_3^{-2}\theta_{\omega}+\gamma_0^{-2}\varphi_3\right)+\tilde{m}_{2M};$$

$$M_{11}=\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\kappa\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2},M_{22}=\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}+\kappa\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1},$$

$$M_{12}=\gamma_{\alpha+}^{-2}\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}+\gamma_{\alpha-}^{-2}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}-2\alpha\varphi_3,M_{21}=\gamma_{\alpha+}^{-2}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}+\gamma_{\alpha-}^{-2}\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}+2\alpha\varphi_3,\tag{2}$$

$$T_{13}=\gamma_{\alpha-}^{-2}\psi_1+\gamma_{\alpha+}^{-2}\frac{\partial w}{\partial x_1}+2\alpha\omega_2,T_{23}=\gamma_{\alpha-}^{-2}\psi_2+\gamma_{\alpha+}^{-2}\frac{\partial w}{\partial x_2}-2\alpha\omega_1,$$

$$T_{31}=\gamma_{\alpha+}^{-2}\psi_1+\gamma_{\alpha-}^{-2}\frac{\partial w}{\partial x_1}-2\alpha\omega_2,T_{32}=\gamma_{\alpha+}^{-2}\psi_2+\gamma_{\alpha-}^{-2}\frac{\partial w}{\partial x_2}+2\alpha\omega_1,$$

$$R_{11}=\gamma_0^{-2}\gamma_2^2\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1}+\eta_2\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x_2}+\varphi_3\right),\ R_{22}=\gamma_0^{-2}\gamma_2^2\frac{\partial\omega_2}{\partial x_2}+\eta_2\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1}+\varphi_3\right),$$

$$R_{12}=\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1}+\eta\frac{\partial\omega_1}{\partial x_2},\ R_{21}=\frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}+\eta\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1},S_{13}=\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1},\ S_{23}=\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2},\ N_{\omega}=\eta_2\theta_{\omega}+\gamma_0^{-2}\gamma_2^2\varphi_3.$$

Здесь использованы следующие безразмерные величины (при одинаковом начертании величин они обозначены штрихом, который в (1), (2) и последующем изложении опущен):

$$x_i'=\frac{x_i}{L},\tau=\frac{c_1t}{L},w'=\frac{w}{L},r'=\frac{r}{L},\ p'=\frac{pL}{h(\lambda+2\mu)},r^2=I/h,I=h^3/12,\tilde{m}_{Mi}'=\frac{\tilde{m}_{Mi}L^2}{h},T_{kl}'=\frac{T_{kl}}{h(\lambda+2\mu)},$$

$$M_{kl}'=\frac{M_{kl}L}{I(\lambda+2\mu)},R_{kl}'=\frac{R_{kl}L}{h(\gamma+\varepsilon)},N_{\omega}'=\frac{N_{\omega}L}{h(\gamma+\varepsilon)},\gamma_0^2=\frac{c_1^2}{c_4^2},\ \gamma_1^2=\frac{c_1^2}{c_2^2},\ \gamma_2^2=\frac{c_1^2}{c_3^2},c_1=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}},c_2=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}},$$

$$c_3=\sqrt{\frac{\gamma+\varepsilon}{J}},\ c_4=\sqrt{\frac{\beta+2\gamma}{J}},\ \alpha'=\frac{\alpha}{\lambda+2\mu},\ \eta=\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon},\eta_1=\frac{\gamma}{\gamma+\varepsilon},\ \eta_2=\frac{\beta}{\gamma+\varepsilon},\upsilon=\frac{\rho L^2}{J},\ \kappa=\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}=1-\frac{2}{\gamma_1^2}.$$

Здесь w – нормальное перемещение; ω_i – координаты вектора угла вращения за счет моментных свойств среды; t – время; ρ и J – плотность и массовая мера инерции при вращении материала пластины; $\lambda,\ \mu$ − упругие постоянные Ламе; $\alpha,\ \beta,\gamma,\ \varepsilon$ − дополнительные физические параметры среды при наличии моментных эффектов; p – нормальное давление; $\tilde{m}_{Mi}$ – координаты внешнего поверхностного момента; L – характерный размер; h – толщина оболочки; T_{i3},T_{3i} и M_{ij} – внутренние силовые и моментные характеристики, инициированные тензором напряжений; R_{ij},N_{ω} – аналогичные величины, соответствующие тензору моментных напряжений.

Постановка и решение задачи. Полагаем, что пластина прямоугольная [3]: $0 \le x_1 \le a, 0 \le x_2 \le b$. На ее границах имеют место условия обобщенного шарнирного опирания:

$$w\big|_{x_1=0,a} = w\big|_{x_2=0,b} = 0, M_{11}\big|_{x_1=0,a} = 0, M_{22}\big|_{x_2=0,b} = 0, R_{12}\big|_{x_1=0,a} = 0,$$
$$R_{21}\big|_{x_2=0,b} = 0, S_{13}\big|_{x_1=0,a} = 0, S_{23}\big|_{x_2=0,b} = 0\,. \tag{3}$$

Начальные условия нулевые. Тезисно решение такой задачи изложено в [3]. Кинематические параметры и внешние нагрузки представляются в виде рядов

$$w = \sum_{m.n=1}^{\infty} w_{mn}(\tau)\sin a_m x_1 \sin b_n x_2, a_m = \frac{\pi m}{a}, b_n = \frac{\pi n}{b},$$
$$\omega_1 = \omega_{10} + \sum_{m.n=1}^{\infty} \omega_{1mn}(\tau)\sin a_m x_1 \cos b_n x_2, \omega_{10} = \sum_{m=1}^{\infty} \omega_{1m0}(\tau)\sin a_m x_1,$$
$$\omega_2 = \omega_{20} + \sum_{m.n=1}^{\infty} \omega_{2mn}(\tau)\cos a_m x_1 \sin b_n x_2, \omega_{20} = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{20n}(\tau)\sin b_n x_2,$$
$$\varphi_3 = \varphi_{300} + \sum_{m=1}^{\infty}\varphi_{3m0}\cos a_m x_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{30n}\cos b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty}\varphi_{3mn}\cos a_m x_1 \cos b_n x_2, \tag{4}$$
$$\psi_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\psi_{10n}(\tau)\sin b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty}\psi_{1mn}(\tau)\cos a_m x_1 \sin b_n x_2,$$
$$\psi_2 = \sum_{m=1}^{\infty}\psi_{2m0}(\tau)\sin a_m x_1 + \sum_{m,n=1}^{\infty}\psi_{2mn}(\tau)\sin a_m x_1 \cos b_n x_2.$$

При этом граничные условия (3) выполняются.

Подставляя ряды (4) в уравнения (1), получаем систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{\mathbf{X}}_{mn}^{(6)} = \mathbf{A}_{mn}^{(6)}\mathbf{X}_{mn}^{(6)} + \mathbf{B}_{mn}^{(6)},$$
$$\mathbf{A}_{mn}^{(6)} = \left(a_{mnij}\right)_{6\times 6}, \mathbf{X}_{mn}^{(6)} = \left(w_{mn}, \omega_{1mn}, \omega_{2mn}, \varphi_{3mn}, \psi_{1mn}, \psi_{2mn}\right)^T,$$
$$\mathbf{B}_{mn}^{(6)} = \left(p_{mn}, \tilde{m}_{M1mn}, \tilde{m}_{M2mn}, \tilde{m}_{2M}, m_1, m_2\right)^T,$$

где

$$a_{mn11} = -\gamma_{\alpha+}^{-2}\left(a_m^2 + b_n^2\right), a_{mn12} = -2\alpha b_n, a_{mn13} = 2\alpha a_m,$$
$$a_{mn14} = 0, a_{mn15} = -\gamma_{\alpha-}^{-2} a_m, a_{mn16} = -\gamma_{\alpha-}^{-2} b_n;$$
$$a_{mn21} = 2\alpha\upsilon b_m, a_{mn22} = -\left(\gamma_0^{-2}a_m^2 + \gamma_2^{-2}b_n^2 + 4\alpha\upsilon\right), a_{mn23} = a_{mn32} = -c_{02}a_m b_n,$$
$$a_{mn24} = -\gamma_3^{-2}a_m, a_{mn25} = 0, a_{mn26} = -2\alpha\upsilon;$$
$$a_{mn31} = -2\alpha\upsilon a_m, a_{mn33} = -\left(\gamma_2^{-2}a_m^2 + \gamma_0^{-2}b_n^2 + 4\alpha\upsilon\right),$$
$$a_{mn34} = -\gamma_3^{-2}b_n, a_{mn35} = 2\alpha\upsilon, a_{mn36} = 0;$$
$$a_{mn41} = 0, a_{mn42} = -r^{-2}\gamma_3^{-2}a_m, a_{mn43} = -r^{-2}\gamma_3^{-2}b_n,$$
$$a_{mn44} = -\left[4\alpha\upsilon + \gamma_2^{-2}\left(a_m^2 + b_n^2\right) + r^{-2}\gamma_0^{-2}\right], a_{mn45} = -2\alpha\upsilon b_n, a_{mn46} = 2\alpha\upsilon a_m;$$
$$a_{mn51} = -r^{-2}\gamma_{\alpha-}^{-2}a_m, a_{mn52} = 0, a_{mn53} = -r^{-2}2\alpha,$$
$$a_{mn54} = -2\alpha b_n, a_{mn55} = -\left[a_m^2 + \gamma_{\alpha+}^{-2}\left(b_n^2 + r^{-2}\right)\right], a_{mn56} = -c_{\alpha+}a_m b_n;$$
$$a_{mn61} = -r^{-2}\gamma_{\alpha-}^{-2}b_n, a_{mn62} = -r^{-2}2\alpha, a_{mn63} = 0,$$
$$a_{mn64} = 2\alpha a_m, a_{mn65} = -c_{\alpha+}a_m, a_{mn66} = -\left[b^2{}_n + \gamma_{\alpha+}^{-2}\left(a_m^2 + r^{-2}\right)\right].$$

Решение соответствующей задачи Коши с нулевыми начальными условиями проводится численно, либо с помощью преобразования Лапласа.

Ряды (4) заменяется частичными суммами с верхним пределом суммирования, который определяется следующим неравенством:

$$\left\| f_{N+1,N+1}\left(x_1, x_2, \tau\right) \right\| = \max_{0 \le x_1 \le a, 0 \le x_2 \le b, \tau \in [0,T]} \left| f_{N+1,N+1}\left(x_1, x_2, \tau\right) \right| < \varepsilon ,$$

где ε – заданная точность, а величина T определяет рассматриваемый диапазон изменения времени.

Рассмотрены примеры расчетов при наличии сосредоточенной в точке $\left(x_{10}, x_{20}\right)$, где $0 < x_{10} < a, 0 < x_{20} < b$, нагрузки следующего вида: $p = \delta\left(x_1 - x_{10}, x_2 - x_{20}\right) H\left(\tau\right), \tilde{m}_{M1} = \tilde{m}_{M2} = 0$, где $\delta\left(x_1, x_2\right)$ и $H\left(\tau\right)$ – дельта-функция Дирака и функция Хевисайда. Материал пластины – композит из алюминиевой дроби в эпоксидной матрице [4].

Список литературы

1 **Тарлаковский, Д. В.** Начально-краевые задачи для моментных упругих пластин / Д. В. Тарлаковский, Май Куок Чиен // Проблемы безопасности на транспорте: матер. XII Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 160-летию Бел. ж. д.: в 2 ч., Гомель, 24–25 ноября 2022 г. / М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Бел. ж. д., Белорус. гос. ун-т трансп.; под общ. ред. Ю. И. Кулаженко. – Гомель : БелГУТ, 2022. – Ч. 2. − С. 262–263.

2 **Михайлова, Е. Ю.** Общая теория упругих оболочек : учеб. пособие / Е. Ю. Михайлова, Д. В. Тарлаковский, Г. В. Федотенков. – М. : Изд-во МАИ, 2018. – 112 с.

3 **До Нгок Дат.** Действие поперечной нестационарной силы на шарнирно опертую моментную упругую прямоугольную пластину (простейшая модель) / До Нгок Дат, Д. В.Тарлаковский, Г. В. Федотенков // Труды МАИ. – 2024. – № 139. – URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=183451 (дата обращения 10.09.2025).

4 **Ерофеев, В. И.** Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой / В. И. Ерофеев. – М. : Изд-во МГУ, 1999. – 328 с.

УДК 539.3

ПОСТАНОВКА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРОЩЕННЫХ МОДЕЛЕЙ МОМЕНТНЫХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ, М. Ю. РЯЗАНЦЕВА, А. Ж. ФАРМАНЯН
НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация

Многие элементы современных инженерных модулей авиакосмической техники, машиностроения, строительной индустрии и т. д. являются тонкостенными конструкциями, выполненными из современных конструкционных материалов, включая различные композиционные материалы. При расчете на прочность таких материалов использование классических моделей приводит к ошибочным результатам, поскольку при этом не учитываются микроструктурные процессы. В ряде случаев более целесообразно использовать моментную теорию упругости, где деформация описывается не только вектором смещения, но и вектором вращения. В работе для тонких круговых цилиндрических оболочек, выполненных из моментного материала, представлена постановка нестационарных задач на основе упрощенной модели [1].

Общая теория динамики тонких моментных упругих оболочек построена в [2].

На основе полученных уравнений движения тонких моментных упругих оболочек постоянной толщины с произвольной гладкой срединной поверхностью построены:

1) уравнения движения изотропной моментной сферической оболочки в усилиях и «перемещениях» (кинематических параметрах), а также, при использовании дополнительных кинематических гипотез, упрощенные модели [3];

2) уравнения движения осесимметричной изотропной тонкой упругой моментной сферической оболочки и упрощенные модели [4];

3) осесимметричная функция влияния для нестационарных колебаний упругой моментной сферической оболочки на основе упрощенной модели [5];