УДК 539.3

# ОТКЛИК КОМПОЗИТНЫХ КОРПУСНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ТЕПЛОВОЙ УДАР

*Э. И .СТАРОВОЙТОВ*
*Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель*

*Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ, Г. В. ФЕДОТЕНКОВ*
*НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация*

**Введение.** Современные требования транспортного машиностроения к прочности и долговечности используемых корпусных элементов конструкций, работающих в условиях воздействия сложных физико-механических полей, обуславливают необходимость применения современных композитных материалов и создания соответствующих расчетных моделей. Этой проблеме посвящен ряд публикаций. В монографиях [1–6] рассмотрен порядок построения расчетных моделей трехслойных и многослойных элементов конструкций, учитывающих воздействия различных физико-механических полей. В статьях [7–13] рассмотрены свободные колебания и нестационарные нагружения тонкостенных элементов конструкций, в том числе взаимодействующих с упругим основанием. Работы [14–21] посвящены исследованию напряженно-деформированного состояния трехслойных стержней и пластин при стационарном нагружении.

Рассматривается задача о возникновении свободных осесимметричных колебаний элемента корпуса в виде шарнирно опертой трехслойной круговой пластины за счет падающего теплового потока.

При падении теплового потока $q_t$ в начальный момент времени на внешнюю поверхность пластины приращение температуры $T(z, t)$ описывается приближенной формулой [2]

$$T = \frac{q_t H}{\lambda}\left\{\tau + \frac{1}{2}\left(s + \frac{c+h_2}{H}\right)^2 - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\left[\pi n\left(s + \frac{c+h_2}{H}\right)\right]e^{-n^2\pi^2\tau}\right\}, \qquad (1)$$

где $H = \sum\limits_{k=1}^{3} h_k$ ; $\tau = ta/H^2$ ; $\lambda = \sum\limits_{k=1}^{3}\lambda_k h_k \Big/ H$ ; $C = \sum\limits_{k=1}^{3} C_k h_k \Big/ H$ ; $a = \lambda/C$ – осредненная температуропроводность; $\lambda_k$; $C_k$ – коэффициенты теплопроводности и теплоемкости; $\rho_k$ – плотность материала $k$-го слоя ($k$ = 1, 2, 3).

Для пластины принимаются кинематические гипотезы ломаной линии: в несущих слоях – Кирхгофа; в легком заполнителе – Тимошенко. Цилиндрическая система координат связана со срединной плоскостью заполнителя. Уравнения движения пластины при изотермическом нагружении получены вариационным методом в [2]. В нашем случае они формально сохраняют свой вид:

$$\mathrm{L}_2(a_1 u + a_2\psi - a_3 w,_r) = 0,$$
$$\mathrm{L}_2(a_2 u + a_4\psi - a_5 w,_r) = 0,$$
$$\mathrm{L}_3(a_3 u + a_5\psi - a_6 w,_r) - M_0\ddot{w} = 0, \qquad (2)$$

где $u(r, t)$ – радиальное перемещение координатной плоскости; $w(r, t)$ – прогиб пластины, $\psi(r, t)$ – относительный сдвиг в заполнителе; $M_0\ddot{w}$ – поперечные инерционные силы, $\mathrm{L}_2$, $\mathrm{L}_3$ – дифференциальные операторы [2]; $a_i$ – термозависимые коэффициенты, выражаемые через геометрические и упругие характеристики слоев.

На шарнирно опертом контуре предполагается наличие жесткой диафрагмы, не позволяющей относительный сдвиг слоев, т. е. при $r = r_0$

$$u = \psi = w = 0, \quad M_r = \sum_{k=1}^{3}\int_{h_k}\sigma_r^{(k)} z dz = 0, \qquad (3)$$

где $\sigma_r^{(k)}$ – радиальное напряжение; $M_r$ – радиальный изгибающий момент,

$$M_r = a_5\psi,_r - a_6 w,_{rr} - a_{60}\frac{w,_r}{r_1} - M_t, \quad M_t = \sum_{k=1}^{3} M_{kt} = 3\sum_{k=1}^{3}\alpha_k K_k\int_{h_k} T\, z dz;$$

$M_t$ – температурный момент, обусловленный объемной тепловой деформацией.

Начальные условия движения однородные. После преобразований система (2) принимает вид

$$u = b_1 w,_r + C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad \psi = b_2 w,_r + C_3 r + \frac{C_4}{r}, \quad \mathrm{L}_3(w,_r) + M^4 \ddot{w} = 0, \tag{4}$$

где $b_1 = \dfrac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}$, $b_2 = \dfrac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2}$, $M^4 = M_0 D$, $D = \dfrac{a_4}{a_6 a_4 - a_5{}^2}$.

Константы интегрирования $C_2 = C_4 = 0$ из условия ограниченности перемещений в центре пластины. Подставляя в первые два условия (3) перемещение и сдвиг из (4), получим

$$C_1 = -\frac{b_1}{r_1} w,_r(r_1, t), \quad C_3 = -\frac{b_2}{r_1} w,_r(r_1, t).$$

Это позволяет выписать граничные условия для прогиба на контуре $r = r_0$:

$$w = 0, \quad a_7 w,_{rr} + \frac{a_8}{r_0} w,_r = -M_t.$$

**Аналитическое решение.** Искомый прогиб представим как сумму квазистатической $w_s$ и динамической $w_d$ составляющих:

$$w = w_s + w_d, \tag{5}$$

$$w_s = \frac{r_0^2 M_t}{2(a_7 + a_8)} \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right]; \ w_d = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t), \quad v_n(\beta_n r) \equiv \frac{1}{d_n} \left[ J_0(\beta_n r) - \frac{J_0(\beta_n r_0)}{I_0(\beta_n r_0)} I_0(\beta_n r) \right],$$

где $v_n \equiv v_n(\beta_n r)$ – фундаментальная ортонормированная система собственных функций; $T_n(t)$ – искомая функция времени, $\beta_n$ – собственные числа оператора $\mathrm{L}_3$, частоты колебаний $\omega_n^2 = \beta_n^4 / M^4$.

Для искомой функции времени $T_n(t)$ справедливо уравнение

$$\ddot{T}_n + \omega_n^2 T_n = -\frac{r_0^2 I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8)} \ddot{M}_t. \tag{6}$$

Решение уравнения (6)

$$T_n(t) = -\frac{r_0^2 I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8)\omega_n} \dot{M}_t(0) \sin(\omega_n t) - \frac{r_0^2 I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8)\omega_n} \int_0^t \ddot{M}_t(\tau) \sin[\omega_n (t - \tau)] d\tau. \tag{7}$$

$$I(\beta_n) = \int_0^{r_0} \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right] r v_n dr = \frac{2}{d_n \beta_n^2} \left( J_2(\beta_n r_0) - \frac{J_0(\beta_n r_0)}{I_0(\beta_n r_0)} I_2(\beta_n r_0) \right).$$

Полный прогиб $w(r, t)$ (5) пластины получим, просуммировав динамическую $w_d$ и квазистатическую $w_s$ составляющие, разложенные в ряд по системе функций $v_n$. В результате

$$u = b_1 \sum_{n=0}^{\infty} v_n,_r \left( T_n + \frac{r_0^2 M_t I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8)} \right) + C_1 r, \quad \psi = b_2 \sum_{n=0}^{\infty} v_n,_r \left( T_n + \frac{r_0^2 M_t I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8)} \right) + C_3 r,$$

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \left( T_n + \frac{M_t I(\beta_n)}{2(a_7 + a_8)} \right). \tag{8}$$

Таким образом, перемещения, возбужденные тепловым потоком, определены выражениями (8), с учетом (7). Численные результаты показали слабую зависимость собственных чисел от материалов слоев. С ростом толщины несущих слоев числа уменьшаются, при увеличении температуры собственные частоты колебаний возрастают.

**Заключение.** Воздействие нестационарного температурного поля в случае шарнирного опирания контура пластины может приводить к появлению свободных колебаний корпусных элементов транспортных систем, в частности, трехслойных круговых пластин. При увеличении жесткости материалов несущих слоев происходит рост собственных частот колебаний.

*Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-2025».*

**Список литературы**

1 **Тарлаковский, Д. В.** Общие соотношения и вариационные принципы математической теории упругости : учеб. пособие / Д. В. Тарлаковский, Г. В. Федотенков. – М. : Изд-во МАИ-Принт, 2009. – 111 с.

2 **Горшков, А. Г.** Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : Физматлит, 2005. – 576 с. – EDN RXGSLJ.
3 **Zhuravkov, M.** Mechanics of Solid Deformable Body / M. Zhuravkov, Y. Lyu, E. Starovoitov. – Singapore : Springer Verlag, 2023. – 317 p.
4 **Абдусаттаров, А.** Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / А. Абдусаттаров, Э. И. Старовойтов, Н. Б. Рузиева. – Ташкент : ТГТУ, 2023. – 381 с.
5 Деформирование трехслойных пластин при термосиловых нагрузках / Э. И. Старовойтов, Ю. В. Шафиева, А. В. Нестерович, А. Г. Козел. – Гомель : БелГУТ, 2024. – 395 с.
6 Deformation of Three-layer Structural Elements in Thermal Radiation Fields / E. I. Starovoitov, M. A. Zhuravkov, D. V. Leonenko, Lyu Yongtao. – Springer Nature Singapore, Pte Ltd. – 2024. – 384 p.
7 **Leonenko, D. V.** Vibrations of Cylindrical Sandwich Shells with Elastic Core Under Local Loads / D. V. Leonenko, E. I. Starovoitov // International Applied Mechanics. – 2016. – Vol. 52 (4). – P. 359–367.
8 Natural vibration of a sandwich beam on an elastic foundation / V. D. Kubenko, Yu. M. Pleskachevskii, É. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2006. – Vol. 42, № 5. – P. 541–547.
9 **Starovoitov, É. I.** Vibrations of a sandwich rod under local and impulsive forces / É. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2005. – Vol. 41, № 7. – P. 809–816.
10 **Tarlakovskii, D. V.** Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells / D. V. Tarlakovskii, G. V. Fedotenkov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol. 43, № 2. – P. 145–152.
11 **Вестяк, В. А.** Распространение нестационарных объемных возмущений в упругой полуплоскости / В. А. Вестяк, А. С. Садков, Д. В. Тарлаковский // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2011. – № 2. – С. 130–140.
12 Воздействие нестационарного давления на тонкую сферическую оболочку с упругим заполнителем / А. В. Вестяк, Л. А. Игумнов, Д. В. Тарлаковский, Г. В. Федотенков // Вычислительная механика сплошных сред. – 2016. – Т. 9, № 4. – С. 443–452.
13 **Леоненко, Д. В.** Колебания круговой трехслойной пластины под действием внешней нагрузки / Д. В. Леоненко, М. В. Маркова // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2023. – № 1. – С. 49–63.
14 **Старовойтов, Э. И.** Колебания сэндвич-пластины в температурном поле, вызванные локальным импульсом / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Проблемы машиностроения и автоматизации. − 2025. − № 1 (370). − С. 38−45.
15 **Старовойтов, Э. И.** Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака / Э. И. Старовойтов, А. Г. Козел // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т. 24, № 3. – С. 392–406.
16 **Starovoitov, E. I.** Deformation of a composite plate on an elastic foundation by local loads / E. I. Starovoytov, D. V. Leonenko, M. Suleyman // Mechanics of Composite Materials. – 2007. – Vol. 43, № 1. – P. 75–84.
17 **Захарчук, Ю. В.** Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – № 10 (6). – С. 55–66.
18 Деформирование круговой трехслойной пластины на упругом основании / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2005. – Т. 2, № 1. – С. 16–19.
19 **Старовойтов, Э. И.** Упругопластическое деформирование трехслойных стержней в температурном поле / Э. И. Старовойтов // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2012. – № 3. – С. 91–98.
20 **Старовойтов, Э. И.** Изгиб прямоугольной трехслойной пластины на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Е. П. Доровская // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2006. – № 3. – С. 45–50.
21 **Старовойтов, Э. И.** Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, М. Сулейман // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2006. – Т. 3, № 4. – С. 55–62.

УДК 625.8

# ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ С ШАРНИРНЫМ ОПИРАНИЕМ ПО МОМЕНТАМ ПРИ УЧЕТЕ ПОЛНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ЗАДАЧИ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНОЙ НАГРУЗКИ

*Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ*
*Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация*
*МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация*

*ДО НГОК ДАТ*
*Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация*

Рассматривается нестационарный изгиб изотропных пластин в прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2$ при общей модели [1, 2]. Уравнения, описывающие движение упругой пластины с учетом моментных напряжений и физические соотношения, имеют следующую форму