

<https://mechanika.bsut.by>

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА И КОММУНИКАЦИЙ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра строительной механики, геотехники и строительных конструкций

Д. В. ЛЕОНЕНКО

РАСЧЕТ БАЛОК И РАМ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

*Рекомендовано учебно-методическим объединением высших учебных заведений
Республики Беларусь по образованию в области строительства и архитектуры
в качестве пособия для обучающихся по специальности
7-07-0732-01 «Строительство зданий и сооружений»*

Гомель 2026

УДК 624.072.2/.3.046.3(075.8)

ББК 38.112я73

Л47

Рецензенты: кафедра архитектуры и строительства ГрГУ им. Я. Купалы (зав. кафедрой – канд. техн. наук, доцент *А. Р. Волик*); профессор кафедры вычислительной математики и программирования д-р техн. наук, профессор *В. В. Можаровский* (ГГУ им. Ф. Скорины)

Леоненко, Д. В.

Л47

Расчет балок и рам на устойчивость : пособие / Д. В. Леоненко ; М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2026. – 67 с.
ISBN 978-985-891-247-5

Изложены краткие теоретические сведения об основах расчета на устойчивость балок и рам. Рассмотрены примеры решения задач по расчету балок и рам на устойчивость методом перемещений.

Предназначено для студентов строительных специальностей.

УДК 624.072.2/.3.046.3(075.8)

ББК 38.112я73

ISBN 978-985-891-247-5

© Леоненко Д. В., 2026

© Оформление. БелГУТ, 2026

ВВЕДЕНИЕ

Строительная механика занимает ключевое место в системе подготовки инженеров-строителей, формируя у студентов представление о закономерностях работы конструкций под действием нагрузок различной природы. Среди многочисленных задач расчета особое значение имеет проблема устойчивости, поскольку потеря устойчивого равновесия нередко предшествует разрушению и может происходить внезапно, без заметных признаков исчерпания прочности материала.

Настоящее пособие посвящено вопросам расчета на устойчивость рам и стержней. Выбор указанной тематики обусловлен тем, что именно стержневые элементы – колонны, стойки, раскосы, ригели – образуют основу большинства каркасных сооружений.

В пособии последовательно рассматриваются теоретические основы устойчивости упругих стержней, вывод критических сил для различных случаев закрепления, а также методы их определения. Особое внимание уделено анализу плоских рам, включая определение критических параметров с использованием метода перемещений. Теоретические положения сопровождаются примерами расчетов, иллюстрирующими алгоритмы решения типовых задач.

Пособие ориентировано на студентов строительных специальностей, изучающих дисциплину «Строительная механика». Материал структурирован с учетом требований действующего образовательного стандарта. В тексте используются общепринятые обозначения и терминология, что обеспечивает преемственность с нормативной и учебной литературой.

Цель пособия состоит в формировании у обучающихся системного понимания явлений устойчивости и практических умений выполнять расчеты стержневых конструкций на стадии проектирования. Освоение представленного материала должно способствовать развитию инженерного мышления, способности оценивать надежность конструктивных решений и принимать обоснованные проектные решения в условиях профессиональной деятельности.

1 ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

1.1 Определения

Устойчивостью называется способность сооружений сохранять свое первоначальное положение или первоначальную форму равновесия в деформированном состоянии при действии внешних сил.

В зависимости от величины приложенной нагрузки система может находиться в *устойчивом*, *неустойчивом* или *безразличном* состоянии равновесия. Проведем аналогию с шариком, расположенным на различных поверхностях (рисунок 1.1).

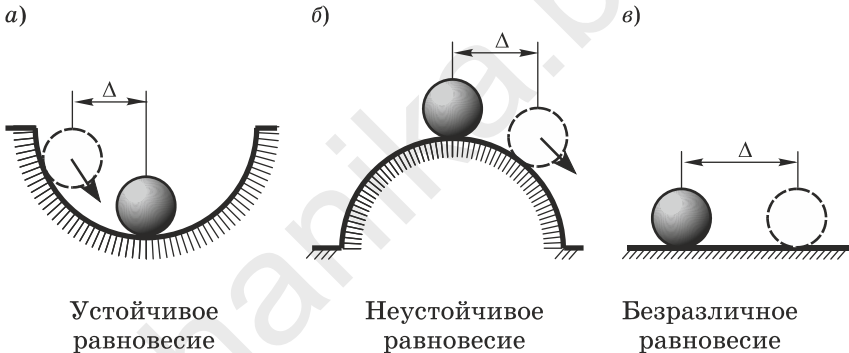


Рисунок 1.1

Устойчивым равновесием называется такое состояние нагруженной системы, при котором при малейшем дополнительном возмущении сооружение отклоняется от исходного состояния, но после исчезновения возмущения полностью возвращается в свое первоначальное положение или первоначальную форму равновесия (см. рисунок 1.1, а).

Неустойчивым равновесием называется такое состояние нагруженной системы, при котором даже малейшее возмущение не возвращает сооружение в исходное состояние, а приводит к большим отклонениям и новому положению или новой форме равновесия (см. рисунок 1.1, б).

Безразличным равновесием называется такое состояние нагруженной системы, при котором любое возмущение не возвращает сооружение в исходное состояние, но и не приводит к большим отклонениям (см. рисунок 1.1, в).

С точки зрения строительной механики безразличное состояние можно считать неустойчивым. Поэтому систему можно считать устойчивой только тогда, когда она способна возвратиться в исходное положение при любом отклонении.

Переход сооружения из устойчивого в неустойчивое состояние равновесия называется потерей устойчивости. Состояние перехода называется критическим состоянием. При этом все параметры системы называются критическими.

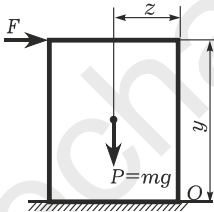
Критической силой F_{cr} называется минимальное значение сжимающей силы, при которой система теряет устойчивость.

В соответствии с определением различают:

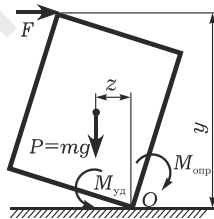
1 *Устойчивость положения* сооружения – это способность сооружения сохранять свое первоначальное положение. Сооружение в целом не может далее сохранять свое первоначальное положение и вынуждено его изменить. Происходит нарушение равновесия внешних сил, действующих на сооружение, которое восстанавливается лишь в новом его положении.

Например, при действии на тело горизонтальной силы F (рисунок 1.2, а) создается опрокидывающий момент $M_{опр} = Fy$ (рисунок 1.2, б), отчего тело может потерять устойчивость и принять новое положение (рисунок 1.2, в).

а) Первоначальное положение равновесия



б)



в)

Новое положение равновесия

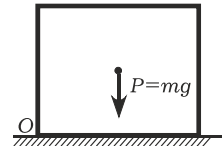


Рисунок 1.2

Собственный вес $P = mg$ создает удерживающий момент $M_{уд} = Pz$, который противостоит опрокидыванию. Положение системы зависит от соотношения этих моментов. Если $M_{уд} > M_{опр}$, то система устойчива; если $M_{уд} < M_{опр}$, то система неустойчива; если $M_{уд} = M_{опр}$, то система находится в критическом состоянии.

2 *Устойчивость форм равновесия* в деформированном состоянии – это способность сооружения сохранять свою первоначальную форму равновесия. Первоначальная форма деформации стержневой системы, соответствующая малым начальным нагруз-

кам определенного вида, при некотором значении этих нагрузок становится неустойчивой и переходит в другую форму, качественно отличную от первоначальной. Нарушаются условия равновесия между внешними и внутренними силами, соответствующими первоначальному виду деформации, которые восстанавливаются в новом деформированном состоянии.

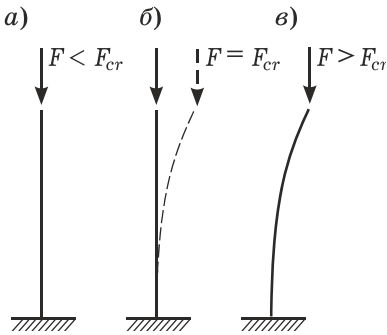


Рисунок 1.3

Пусть на прямой стержень с заделанным внизу концом действует некоторая сжимающая продольная сила F меньшая критической F_{cr} (рисунок 1.3, а), стержень остается в устойчивой прямолинейной форме равновесия. При увеличении нагрузки до критического значения F_{cr} стержень приобретает новую криволинейную форму равновесия (рисунок 1.3, б).

При дальнейшем увеличении нагрузки сверх критической стержень находится в неустойчивой криволинейной форме равновесия (см. рисунок 1.3, в).

Условно различают потерю устойчивости первого и второго рода.

Потеря устойчивости первого рода связана с нарушением равновесия между внешними и внутренними силами при качественном изменении формы деформации – возникают и интенсивно развиваются деформации нового вида.

Можно выделить три типа:

1 *Потеря устойчивости центрального сжатия.* Так, в сечениях центрально сжатого стержня (см. рисунок 1.3) при нагрузке меньше критической $F < F_{cr}$ возникают только деформации сжатия, а при достижении силы критического значения $F = F_{cr}$ появляется новый вид деформации изгиба.

2 *Потеря устойчивости симметричной формы деформации.* Примером могут служить симметричные конструкции, изображенные на рисунке 1.4. Под действием силы F рама получает симметричные деформации (см. рисунок 1.4, а). Однако при достижении силой F критического значения F_{cr} рама теряет свою устойчивость и переходит к несимметричной форме деформации (см. рисунок 1.4, б). Аналогичное происходит и в двухшарнирной арке (см. рисунок 1.4, в).

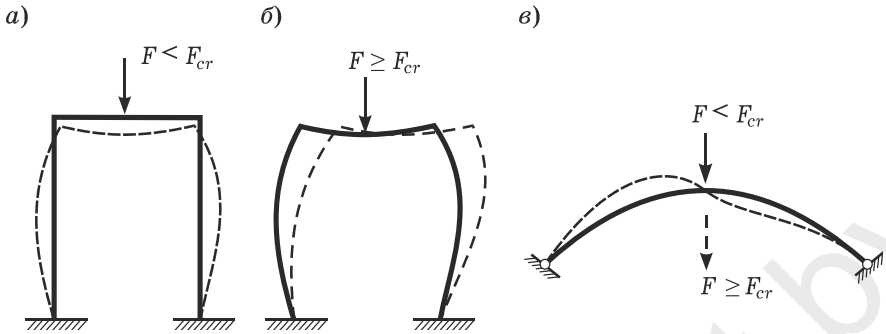


Рисунок 1.4

3 *Потеря устойчивости плоской формы деформации.* Тонкостенная балка, изображенная на рисунке 1.5, а, под действием поперечной нагрузки F изгибается в вертикальной плоскости. При потере устойчивости в случае достижения силой критического значения, балка отклоняется от первоначального положения, происходит дополнительный ее изгиб в горизонтальной плоскости и закручивание. Таким образом, теряется первоначальная форма плоской деформации (рисунок 1.5, б).

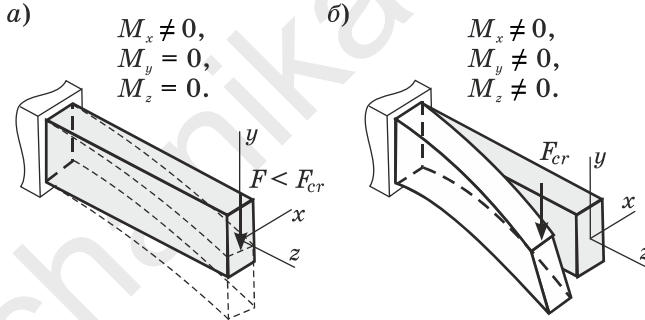


Рисунок 1.5

Потеря устойчивости второго рода связана с нарушением равновесия между нагрузкой и внутренними усилиями без появления новых видов деформаций. Она характеризуется резким возрастанием предыдущих деформаций. Так, внецентренно сжатый стержень при потере устойчивости принимает новую форму положения равновесия и значительно увеличивает свои перемещения, оставаясь сжато-изогнутым (рисунок 1.6, а). Новые виды деформаций не появляются. Аналогичное деформирование происходит и при потере устойчивости трехшарнирной арки (рисунок 1.6, б).

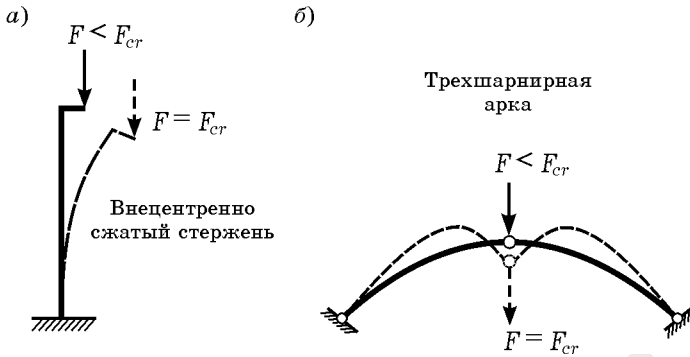


Рисунок 1.6

При расчете на устойчивость стержневых систем, как правило, рассматривается потеря устойчивости первого рода.

1.2 Число степеней свободы при расчете на устойчивость

Начальным и одним из важнейших этапов при выполнении расчета любой конструкции на устойчивость является определение числа степеней свободы ее расчетной схемы. Этот параметр необходим в первую очередь для правильного составления уравнений равновесия. При потере устойчивости стержневые системы теряют исходную форму устойчивого равновесия и принимают новую форму состояния равновесия. Изменение формы или положения системы связано с изменением координат ее характерных точек.

Числом степеней свободы называется количество независимых геометрических параметров, определяющих положение всех точек деформированной системы.

В задачах статики определение внутренних усилий ведется по недеформированной схеме, т. е. при составлении уравнений равновесия не учитываются перемещения и деформации в силу своей малости. Для геометрически неизменяемых систем число степеней свободы $W \leq 0$. Так, на рисунке 1.7, а число степеней свободы $W = -2$.

Любой элемент реальной конструкции является деформируемым и независимо от числа и характера связей, наложенных на него в целом, обладает бесконечным числом степеней свободы и форм неустойчивого равновесия. В задачах устойчивости уравнения равновесия составляются по деформированной схеме с учетом перемещений и деформаций, вызываемых действующей нагрузкой. В этом случае $W = \infty$ (рисунок 1.7, б).

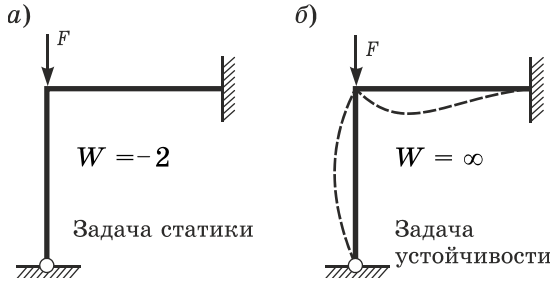


Рисунок 1.7

Для упрощения расчета упругая система может быть заменена более простой схемой, имеющей конечное число степеней свободы. Это позволяет дифференциальные уравнения заменить системой алгебраических уравнений. При этом в конструкцию вводят упругоподатливые связи (рисунок 1.8), а части стержневой системы заменяют на абсолютно жесткие стержни. Система превращается в механизм, допускающий малые перемещения. Стержни этого механизма не изгибаются, а только линейно перемещаются или поворачиваются.

а) Упругоподатливая опора б) Упругий шарнир

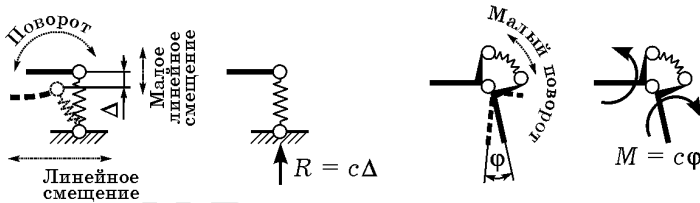


Рисунок 1.8

На рисунке 1.9, а изображен стержень с бесконечным числом степеней свободы. Мы его можем представить, например, в виде системы с одной степенью свободы или двумя (рисунок 1.9, б). Степень упрощения расчетной схемы выбирается исходя из цели исследования, метода и допустимой точности решения.

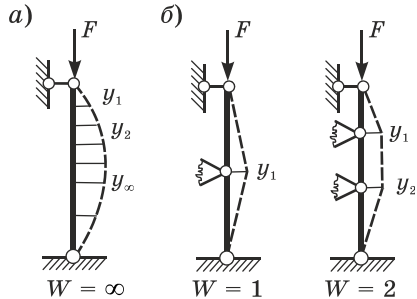


Рисунок 1.9

1.3 Методы расчета на устойчивость

Целью расчета на устойчивость является определение критических значений внешних нагрузок, действующих на сооружение или отдельные его элементы.

Основными методами определения критических сил являются статический, энергетический и динамический методы.

Статический метод. При использовании этого метода получают характеристические уравнения для возможных форм статического равновесия системы.

Расчет по статическому методу состоит из трех шагов:

1 Предполагая, что нагрузка незначительно превышает критическую, заданной упругой системе дают бесконечно малые перемещения, обеспечивающие качественно новое деформированное состояние системы. Считают, что деформированная форма бесконечно близка к исходной, а граничные условия принимаются по недеформированному состоянию.

2 Для деформированного состояния составляют уравнения равновесия внешних и внутренних сил. Вид уравнений зависит от числа степеней свободы. Для систем с конечным числом степеней свободы уравнения алгебраические, для систем с бесконечным числом степеней свободы – дифференциальные.

3 Анализируя уравнения, находят критическую силу. Критическая сила определяется из характеристического уравнения, получаемого приравнением к нулю определителя разрешающей системы. *Статический критерий* потери устойчивости будет иметь вид

$$D(k) = 0.$$

Для систем с бесконечным числом степеней свободы разрешающая система состоит из уравнений граничных условий, а для систем с конечным числом степеней свободы – из уравнений статического равновесия.

После определения критической силы, при необходимости, из уравнений равновесия можно определить и формы потери устойчивости.

Энергетический метод. Этот метод основан на принципе Лагранжа – Дирихле:

– если система находится в состоянии *устойчивого* равновесия, то ее полная потенциальная энергия E минимальна по сравнению с энергией во всех других ее положениях;

– если система находится в состоянии *неустойчивого* равновесия, то ее полная потенциальная энергия E имеет минимум;

– в *безразличном (критическом)* состоянии полная потенциальная энергия постоянна $E = \text{const}$.

Полная потенциальная энергия нагруженной системы E численно равна сумме потенциальных энергий внутренних и внешних сил:

$$E = U + T = U - W ,$$

где U – потенциальная энергия внутренних сил; T – потенциальная энергия внешних сил; W – работа внешних сил.

Из принципа Лагранжа – Дирихле следует, что разность двух соседних значений потенциальной энергии E_1 и E_2 равна нулю:

$$\Delta E = E_1 - E_2 = (U_1 - W_1) - (U_2 - W_2) = \Delta U - \Delta W = 0 .$$

Расчет состоит из трех шагов:

1 Системе задают малые перемещения, т. е. систему приводят в деформированное состояние.

2 Составляют выражения для приращений потенциальной энергии деформации и работы внешних сил.

3 Определяют критическую нагрузку, приравнявая соответствующие приращения:

$$\Delta U = \Delta W .$$

Энергетический метод является приближенным, так как для его использования необходимо знать, какую форму равновесия принимает система, а это чаще всего неизвестно. Форму равновесия задают близкой к реальной в виде какого-либо полинома или синусоиды. Чем ближе эта форма к действительной форме потери устойчивости, тем ближе к точному значению критическая нагрузка.

Данный метод дает завышенные результаты.

Динамический метод. В этом методе рассматривается колебательная система под действием сообщенного ей динамического возмущения. Даже тогда, когда действуют только статические нагрузки, внешние нагрузки рассматриваются как динамические.

При решении задач устойчивости этим методом исходят из предположения, что колеблющаяся система около своего положения равновесия не способна возвращаться к первоначальному положению статического равновесия. Это значит, что в критическом состоянии спектр собственных частот рассматриваемой системы стремится к нулю, т. е. $\omega \rightarrow 0$.

Расчет состоит из трех шагов:

1 Системе задают малые перемещения, обеспечивающие качественно новое деформированное состояние системы.

2 Составляют уравнение собственных колебаний системы.

3 Найдя общее выражение частоты собственных колебаний, приравнивают его к нулю, откуда и находят значение критической силы. Критической является сила, при которой частота собственных колебаний системы равна нулю. В общем случае *динамический критерий* потери устойчивости будет иметь вид

$$\min(\omega_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Результаты расчета для большинства конструкций по трем методам дают одинаковый результат, так как эти методы основаны на одних и тех же упрощающих гипотезах. Однако в сложных конструкциях результаты могут различаться, тогда в качестве решения задачи принимается минимальное значение из критических нагрузок, посчитанных различными методами.

Пример 1.1. Для стержня, изображенного на рисунке 1.10, а, требуется вычислить критическую силу с помощью статического, энергетического и динамического методов.

Статический метод. Стержень соединен с землей упругим шарниром. Данный вид закрепления допускает малый поворот. Стержень представляет систему с одной степенью свободы.

Отклоним стержень на малый угол φ , в упругом шарнире возникает момент $M = c\varphi$. Рассмотрим равновесие стержня относительно точки А (рисунок 1.10, б).

$$\sum M_{iA} = 0, \quad M - Fl \sin(\varphi) = 0,$$

$$c\varphi - Fl \sin(\varphi) = 0, \quad \varphi = \frac{Fl}{c} \sin(\varphi).$$

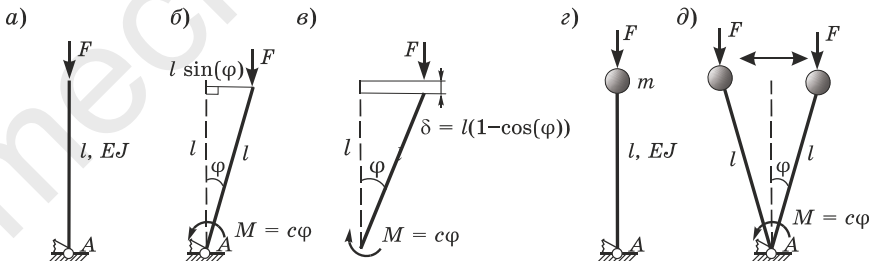


Рисунок 1.10

Здесь возможно два случая:

1. $\varphi = 0$ при любом значении силы F . В этом случае стержень сохраняет первоначальную форму равновесия.

2. $\varphi \neq 0$, тогда

$$\frac{\varphi}{\sin(\varphi)} = \frac{Fl}{c}.$$

Выражение, стоящее в левой части, всегда больше 1, т. е.

$$\frac{\varphi}{\sin(\varphi)} > 1,$$

следовательно

$$\frac{Fl}{c} > 1, \quad F > \frac{c}{l}.$$

Граничное значение соответствует критической силе

$$F_{cr} = \frac{c}{l}.$$

Энергетический метод. Зададим малое перемещение системы (см. рисунок 1.10, *в*).

Приращение потенциальной энергии системы

$$\Delta U = 0,5M\varphi = 0,5c\varphi^2 = 0,5c\varphi^2.$$

Приращение работы внешней силы F на перемещении δ будет

$$\Delta W = F\delta = Fl(1 - \cos(\varphi)).$$

В критическом состоянии приращения равны:

$$0,5c\varphi^2 = F_{cr}l(1 - \cos(\varphi)),$$

тогда критическая сила

$$F_{cr} = \frac{c\varphi^2}{2l(1 - \cos(\varphi))} = \frac{c\varphi^2}{4l \sin^2(0,5\varphi)} \approx \frac{c\varphi^2}{4l(0,5\varphi)^2} = \frac{c}{l},$$

$$F_{cr} = \frac{c}{l}.$$

Динамический метод. Расчетная схема данного стержня для динамического метода изображена на рисунке 1.10, *г*. Она представляет собой динамическую систему со сосредоточенной массой сверху, которая может колебаться относительно положения равновесия (см. рисунок 1.10, *д*).

Запишем дифференциальное уравнение колебаний:

$$I\ddot{\varphi} = \sum M.$$

Момент инерции массы $I = ml^2$. Из уравнения равновесия получим

$$\sum M = Fl \sin(\varphi) - c\varphi.$$

Так как углы малые, примем что $\sin(\varphi) \approx \varphi$, тогда

$$I\ddot{\varphi} = Fl\varphi - c\varphi,$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{c - Fl}{I}\varphi = 0,$$

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0, \quad \omega^2 = \frac{c - Fl}{I}.$$

Приравняем частоту собственных колебаний нулю:

$$\omega = \sqrt{\frac{c - F_{cr}l}{I}} = 0,$$

получим значение критической силы

$$F_{cr} = \frac{c}{l}.$$

Таким образом, мы получили одинаковые выражения для критических сил, найденных различными методами.

Контрольные вопросы

- 1 Что такое устойчивость?
- 2 Какие виды потери устойчивости Вы знаете?
- 3 В чем состоит основная задача расчета на устойчивость?
- 4 Какие методы используются в расчетах на устойчивость?
- 5 Какие критерии используются при определении критической силы?
- 6 Каковы алгоритмы статического, энергетического и динамического методов?

2 УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ

2.1 Задача Эйлера

Рассмотрим стержень постоянной жесткости EJ длиной l , который нагружен сжимающей силой F (рисунок 2.1).

Впервые эта задача была поставлена и решена Л. Эйлером в середине XVIII века. Для нахождения критической воспользуемся статическим методом.

При потере устойчивости стержень выпучивается, его прогибы описываются функцией $y(z)$. Система имеет бесконечное число степеней свободы, так как каждой точке соответствует свое значение функции $y(z)$.

В произвольном сечении с координатой z вычислим изгибающий момент

$$M(z) = -Fy(z)$$

и подставим в приближенное дифференциальное уравнение упругой линии балки

$$EJy'' = M_x .$$

Получаем однородное дифференциальное уравнение

$$EJy'' + Fy = 0 .$$

Упростим, сделаем замену

$$k^2 = F/EJ$$

и получим уравнение в каноническом виде

$$y'' + k^2y = 0 . \tag{2.1}$$

Решение данного уравнение хорошо известно:

$$y = C_1 \sin(kz) + C_2 \cos(kz) ,$$

где C_1, C_2 – константы интегрирования, получаемые из граничных условий закрепления концов стержня.

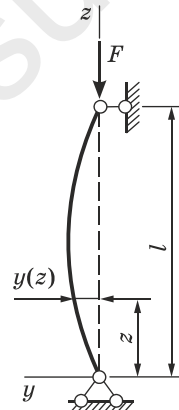


Рисунок 2.1

В нашем случае на обоих концах стержня ($z = 0, l$) шарнирные опоры, которые исключают перемещения в направлении оси y . Напишем их

$$z = 0, y = 0: \quad y = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = 0;$$

$$z = l, y = 0: \quad y = C_1 \sin(kl) + C_2 \cos(kl) = 0.$$

Получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных C_1, C_2 :

$$\begin{cases} 0 \cdot C_1 + 1 \cdot C_2 = 0, \\ \sin(kl)C_1 + \cos(kl)C_2 = 0. \end{cases}$$

Согласно статическому критерию перехода в критическое состояние, приравняем определитель матрицы системы к нулю:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sin(kl) & \cos(kl) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, получим характеристическое уравнение:

$$\sin(kl) = 0.$$

Его решение

$$kl = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где \mathbb{Z} – множество целых чисел.

Обозначим $kl = v$, тогда $v = \pi n$. Выразим значение силы F

$$F = k^2 EJ = v^2 \frac{EJ}{l^2}.$$

Величину

$$v = l \sqrt{\frac{F}{EJ}}$$

называют параметром сжатого стержня.

Минимальное значение силы соответствует ее критическому значению при $v_{\min} = \pi (n = 1)$. Тогда значение *критической силы Эйлера* будет

$$F_{cr} = v_{cr}^2 \frac{EJ}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (2.2)$$

Форму потери устойчивости получим, подставив значение констант C_1, C_2 и значение k в выражение для прогиба, обозначив константу интегрирования через C :

$$y = C \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right).$$

То есть при потере устойчивости стержень изгибается по синусоиде. Отметим, что константу C определить не удастся, прогиб y определяется с точностью до постоянного множителя.

2.2 Критическая сила при различных закреплениях стержня

Рассмотрим основные виды закрепления сжатого стержня с жесткими опорами. Будем считать, что при отклонении стержня сила F сохраняет направление вертикали.

1 *Шарнир – шарнир*. Шарнирное закрепление с двух концов стержня (рисунок 2.2, а) мы уже рассмотрели и получили значение критической силы согласно (2.2):

$$F_{cr} = v_{cr}^2 \frac{EJ}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

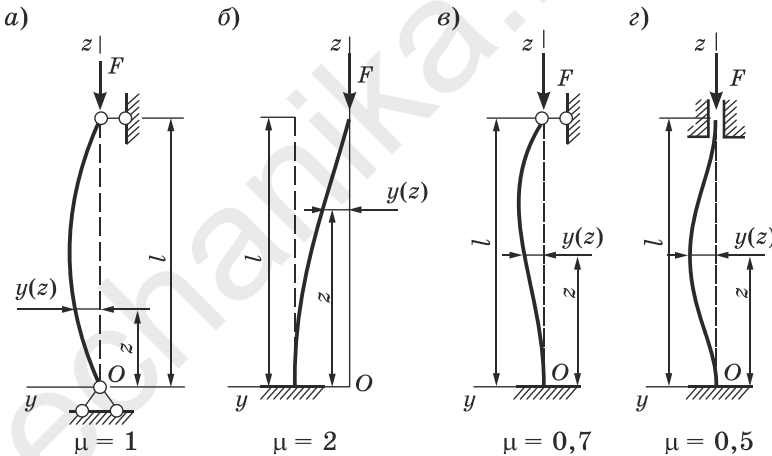


Рисунок 2.2

2 *Заделка – свободный край*. Рассмотрим стержень прикрепленным одним концом к земле заделкой (см. рисунок 2.2, б). Начало координат O примем в точке пересечения линии действия сжимающей силы в деформированном состоянии стержня и земли. Деформированное состояние описывается уравнением (2.1). В этом случае прогиб верхнего конца стержня и угол поворота нижнего конца стержня в заделке будут равны нулю:

$$z = l, y = 0: y = C_1 \sin(kl) + C_2 \cos(kl) = 0;$$

$$z = 0, y' = 0: y' = C_1 k \cdot 1 - C_2 k \cdot 0 = 0.$$

Сформируем матрицу однородной системы алгебраических уравнений и приравняем ее определитель к нулю:

$$\begin{vmatrix} \sin(kl) & \cos(kl) \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим

$$\cos(kl) = 0.$$

Наименьший положительный корень данного уравнения

$$kl = \frac{\pi}{2}.$$

Критическое значение внешней силы определяется по формуле

$$F_{cr} = k^2 EJ = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 EJ = \frac{\pi^2 EJ}{(2l)^2}. \quad (2.3)$$

Форму потери устойчивости получим, подставив значение констант C_1 , C_2 и значение k в выражение для прогиба, обозначив константу интегрирования через C :

$$y = C \cos\left(\frac{\pi z}{2l}\right).$$

То есть при потере устойчивости стержень изгибается по половине синусоиды.

3 Заделка – шарнир. Рассмотрим стержень снизу прикрепленным к земле заделкой, а сверху – шарнирной опорой (см. рисунок 2.2, в).

Предварительно дважды продифференцировав каждый член уравнения (2.1), получим дифференциальное уравнение, описывающее деформированное состояние рассматриваемого стержня в общем виде:

$$y^{(4)} + k^2 y'' = 0.$$

Его общее решение имеет вид:

$$y = C_1 \sin(kz) + C_2 \cos(kz) + C_3 z + C_4.$$

Составим выражения для углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил, возникающих в произвольном сечении z :

$$\begin{cases} y' = C_1 k \cos(kz) - C_2 k \sin(kz) + C_3, \\ M_x = EJy'' = -EJk^2 C_1 \sin(kz) - EJk^2 C_2 \cos(kz), \\ Q_y = EJy''' = -EJk^3 C_1 \cos(kz) + EJk^3 C_2 \sin(kz). \end{cases}$$

Произвольные постоянные C_1, C_2, C_3 и C_4 определим из граничных условий закрепления стержня. Для рассматриваемого стержня они записываются в виде

$$z = 0, y = 0: \quad y = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 + C_3 \cdot 0 + C_4 = 0;$$

$$z = 0, y' = 0: \quad y' = C_1 k \cdot 1 - C_2 k \cdot 0 + C_3 = 0;$$

$$z = l, y = 0: \quad y = C_1 \sin(kl) + C_2 \cos(kl) + C_3 l + C_4 = 0;$$

$$z = l, M_x = 0: \quad M_x = -EJk^2 C_1 \sin(kl) - EJk^2 C_2 \cos(kl) = 0.$$

Сформируем определитель системы и приравняем его к нулю:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ \sin(kl) & \cos(kl) & l & 1 \\ -EJk^2 \sin(kl) & -EJk^2 \cos(kl) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Упростив, получим

$$\operatorname{tg}(kl) = kl.$$

Наименьший положительный корень последнего уравнения

$$kl = 4,4934, \quad k = \frac{4,4934}{l} = \frac{\pi}{0,7l},$$

следовательно, критическая сила

$$F_{cr} = k^2 EJ = \left(\frac{\pi}{0,7l} \right)^2 EJ = \frac{\pi^2 EJ}{(0,7l)^2}.$$

Форму потери устойчивости получим, подставив значение констант C_1, C_2, C_3, C_4 и значение k в выражение для прогиба, обозначив константу интегрирования через C :

$$y = C \left(\sin\left(\frac{kz}{l}\right) - kl \cos\left(\frac{kz}{l}\right) - kz + kl \right).$$

4 *Заделка – заделка*. Рассмотрим стержень с двумя зашечленными концами, изображённый на рисунке 2.2, *г*, со следующими граничными условиями:

$$z = 0, y = 0: y = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 + C_3 \cdot 0 + C_4 = 0;$$

$$z = 0, y' = 0: y' = C_1 k \cdot 1 - C_2 k \cdot 0 + C_3 = 0;$$

$$z = l, y = 0: y = C_1 \sin(kl) + C_2 \cos(kl) + C_3 l + C_4 = 0;$$

$$z = l, y' = 0: y' = kC_1 \cos(kl) - kC_2 \sin(kl) + C_3 = 0.$$

Характеристическое уравнение для определения критической силы следует из равенства нулю определителя системы:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ \sin(kl) & \cos(kl) & l & 1 \\ k \cos(kl) & -k \sin(kl) & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$kl \sin(kl) = 2(1 - \cos(kl)).$$

Наименьший положительный корень последнего уравнения

$$kl = 2\pi,$$

следовательно, критическая сила равна

$$F_{cr} = k^2 EJ = \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 EJ = 4\pi^2 \frac{EJ}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(0,5l)^2}.$$

Форму потерю устойчивости получим, подставив значение констант C_1, C_2, C_3, C_4 и значение k в выражение для прогиба, обозначив константу интегрирования через C :

$$y = C \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi z}{l}\right) \right).$$

Полученные значения критической силы можно обобщить одной формулой, введя коэффициент приведения длины стержня μ :

$$F_{cr} = \nu_{cr}^2 \frac{EJ}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}.$$

С параметром сжатого стержня он связан соотношением

$$\mu = \frac{\pi}{v_{cr}}.$$

Значения коэффициента приведения длины μ для каждой схемы указаны на рисунке 2.2.

Пример 2.1. Для рамы, изображенной на рисунке 2.3, а, требуется вычислить критический момент.

Сжатым элементов является стержень AB . Вычислим в нем продольную силу. Для этого определим реакцию связи в шарнирно-подвижной опоре B .

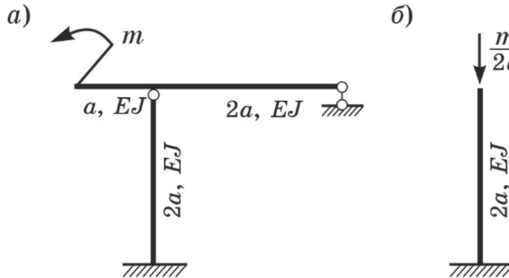


Рисунок 2.3

Сделаем сечение по шарниру C и составим уравнение моментов верхней части рамы:

$$\sum M_{iC}^{\text{верх.ч}} = 0, \quad m - V_B \cdot 2a = 0, \quad V_B = \frac{m}{2a}.$$

Продольная сжимающая сила в вертикальном стержне по модулю равна реакции V_B

$$|N_{AC}| = V_B = \frac{m}{2a}.$$

Так как шарнирно-подвижная опора B допускает свободное движение в горизонтальном направлении, то заданную раму можно привести к стержню, защемленному одним концом (см. рисунок 2.3, б), под действием сжимающей силы $m/(2a)$.

По формуле (2.3) вычислим критическую силу

$$F_{cr} = \frac{m_{cr}}{2a} = \frac{\pi^2 EJ}{4(2a)^2}.$$

Выразим критический момент

$$m_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{8a}.$$

2.3 Расчеты стержневых систем с упругими опорами

Ранее мы рассмотрели потерю устойчивости стержня с жесткими опорами. На практике встречаются случаи, когда опорные устройства предполагают малые перемещения. В этом случае вместо идеальных опор используют упругоподатливые.

Рассмотрим последовательную стержни, на одном конце которых расположена упругоподатливая опора, а второй конец шарнирно либо жестко закреплен.

Шарнирно-неподвижная опора. Рассмотрим стержень, закрепленный с одного торца шарнирно-неподвижной жесткой опорой, а с другого конца – упругоподатливой (рисунок 2.4, а). Здесь возможна одна из двух форм потери устойчивости, соответствующая наименьшему значению критической силы.

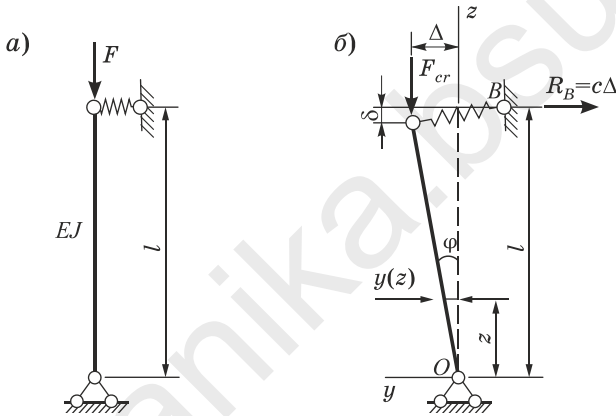


Рисунок 2.4

Первая форма возникает в случае высокой жесткости пружины c и малой жесткости EJ рассматриваемого стержня. В этом случае пружина не растягивается, верхний конец стержня не отклоняется, и система теряет устойчивость как стержень с жесткими опорами. То есть критическая сила вычисляется по формуле Эйлера

$$F_{cr}^{(1)} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (2.4)$$

Вторая форма потери устойчивости возникает при малой жесткости пружины и относительно высокой жесткости стержня. В этом случае стержень теряет устойчивость, поворачиваясь относительно шарнира в точке O , но сохраняя при этом свое первоначальное прямолинейное положение (см. рисунок 2.4, б).

Пусть стержень потерял устойчивость и занял новое положение. Критическое значение силы найдем с помощью энергетического метода. Зададим малое перемещение системы (см. рисунок 2.4, б).

В упругой опоре действует усилие R_B пропорциональное ее растяжению Δ . Приращение потенциальной энергии системы ΔU за счет растяжения пружины:

$$\Delta U = \frac{1}{2} R_B \Delta = \frac{1}{2} c \Delta \Delta = \frac{1}{2} c \Delta^2.$$

Приращение работы внешней силы F на перемещении δ будет (считаем синусы малых углов равными самим углам)

$$\Delta W = F \delta = Fl(1 - \cos(\varphi)) = 2Fl \sin^2(0,5\varphi) \approx 2Fl(0,5\varphi)^2 = \frac{1}{2} Fl\varphi^2.$$

В критическом состоянии приращения равны

$$\frac{1}{2} c \Delta^2 = F_{cr}^{(2)} \frac{1}{2} l \varphi^2,$$

тогда критическая сила

$$F_{cr}^{(2)} = \frac{c \Delta^2}{l \varphi^2} \approx \frac{c \Delta^2}{l (\operatorname{tg} \varphi)^2} \approx \frac{c \Delta^2}{l \left(\frac{\Delta}{l}\right)^2} = cl,$$

$$F_{cr}^{(2)} = cl. \quad (2.5)$$

Так как реальная форма потери устойчивости неизвестна, за критическую принимают меньшую из двух найденных сил:

$$F_{cr} = \min(F_{cr}^{(1)}; F_{cr}^{(2)}).$$

Жесткая заделка. Рассмотрим стержень, закрепленный с одного торца жесткой заделкой, а с другого конца – упругоподатливой опорой (рисунок 2.5, а). Здесь возможна только одна форма потери устойчивости.

Воспользуемся статическим способом для определения критической силы. Зададим малое перемещение системы (рисунок 2.5, б).

В произвольном сечении с координатой z вычислим изгибающий момент

$$M(z) = F(\Delta - y(z)) - R_B(l - z)$$

и подставим в приближенное дифференциальное уравнение упругой линии балки

$$EJy'' = M_x.$$

Получаем дифференциальное уравнение

$$EJy'' + Fy = F\Delta - c\Delta(l - z).$$

Упростим, сделаем замену

$$k^2 = \frac{F}{EJ}$$

и получим уравнение в каноническом виде

$$y'' + k^2y = \Delta \left(k^2 - \frac{c}{EJ} (l - z) \right).$$

Решение данного уравнения:

$$y = C_1 \sin(kz) + C_2 \cos(kz) + \Delta \left(1 - \frac{c}{k^2 EJ} (l - z) \right),$$

где C_1, C_2, Δ – величины, получаемые из граничных условий закрепления концов стержня.

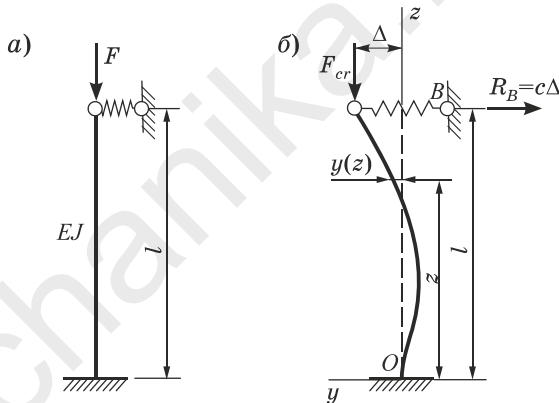


Рисунок 2.5

В нашем случае горизонтальное перемещение верхней точки стержня должно быть равным удлинению пружины. Прогиб нижней точки y и угол поворота θ сечения в жесткой заделке будут равны нулю. Угол поворота численно равен первой производной от функции прогиба

$$\theta = y' = C_1 k \cos(kz) - C_2 k \sin(kz) + \frac{c\Delta}{k^2 EJ}.$$

Граничные условия запишем в виде:

$$z = l, y = \Delta : y = C_1 \sin(kl) + C_2 \cos(kl) + \Delta = \Delta ;$$

$$z = 0, y = 0 : y = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 + \Delta \left(1 - \frac{cl}{k^2 EJ} \right) = 0 ;$$

$$z = 0, y' = 0 : y' = C_1 k \cdot 1 - C_2 k \cdot 0 + \Delta \frac{c}{k^2 EJ} = 0 .$$

Получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных C_1, C_2, Δ :

$$\begin{cases} \sin(kl)C_1 + \cos(kl)C_2 + 0 \cdot \Delta = 0 \\ 0 \cdot C_1 + 1 \cdot C_2 + \left(1 - \frac{cl}{k^2 EJ} \right) \Delta = 0, \\ kC_1 - 0 \cdot C_2 + \frac{c}{k^2 EJ} \Delta = 0. \end{cases}$$

Согласно статическому критерию перехода в критическое состояние, приравняем определитель матрицы системы к нулю:

$$\begin{vmatrix} \sin(kl) & \cos(kl) & 0 \\ 0 & 1 & 1 - \frac{cl}{k^2 EJ} \\ k & 0 & \frac{c}{k^2 EJ} \end{vmatrix} = 0 .$$

Раскрыв определитель и упростив полученное выражение, получим характеристическое уравнение:

$$kl - \operatorname{tg}(kl) = \frac{(kl)^3 EJ}{cl^3} . \quad (2.6)$$

Это трансцендентное уравнение относительно kl , решение которого зависит как от жесткости стержня EJ , так и от жесткости упругоподатливой опоры c . Данное уравнение имеет бесконечно много решений, которые возможно вычислить с помощью численных методов на компьютере. Нас интересует наименьший корень, который будет соответствовать критической силе:

$$F_{cr} = k^2 EJ .$$

В частном случае при отсутствии сопротивления пружины ($c = 0$) минимальный корень уравнения

$$|kl| = \frac{\pi}{2}$$

и критическая сила равна силе для стержня с верхним свободным и нижним жестко зашпеленным концами

$$F_{cr} = k^2 EJ = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 EJ = 2,47 \frac{EJ}{l^2}.$$

Если же жесткость упругоподатливой опоры стремится к бесконечности, то минимальный корень уравнения

$$kl = 4,4934,$$

что соответствует случаю, когда верхний конец стержня шарнирно закреплен, а нижний жестко заделан. Критическая сила

$$F_{cr} = k^2 EJ = \left(\frac{4,4934}{l}\right)^2 EJ = 20,19 \frac{EJ}{l^2}.$$

То есть все корни трансцендентного уравнения лежат в границах от 1,5708 до 4,4934, а для критической силы выполняется неравенство

$$2,47 \frac{EJ}{l^2} \leq F_{cr} \leq 20,19 \frac{EJ}{l^2}.$$

Пример 2.2. Необходимо найти критическое значение силы F_{cr} и показать форму потери устойчивости рамы (рисунок 2.6, а). Длины участков принять $l_1 = 5$ м, $l_2 = 3$ м, $l_3 = 6$ м, жесткость стоек – $EJ_1 = 10^3$ кН·м, $EJ_3 = 700$ кН·м, ригеля – $EJ_2 = \infty$.

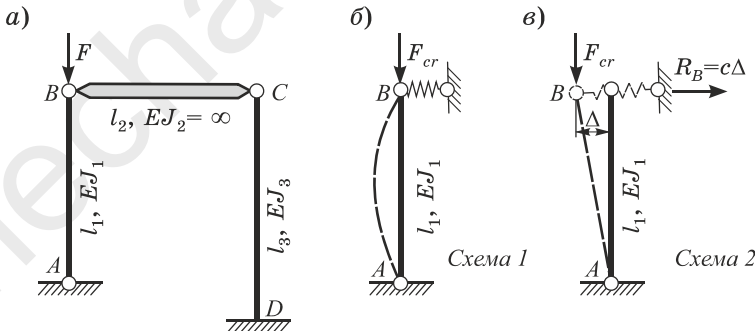


Рисунок 2.6

Стержень AB сжимается силой F , под действием которой он может потерять устойчивость. Точка B может перемещаться горизонтально за счет упругого деформирования стойки CD . Часть рамы

BCD левее шарнира B может быть заменена упругоподатливой опорой. Стержень AB может потерять устойчивость по двум различным схемам: как шарнирно опертый сжатый стержень (см. рисунок 2.6, б) и поворачиваться относительно шарнира A , оставаясь прямолинейным (см. рисунок 2.6, в). Рассмотрим отдельно каждый случай.

Схема 1. Данная схема представляет собой шарнирно опертую сжатую стойку. Критическая сила вычисляется по формуле Эйлера. Согласно (2.4) получим

$$F_{cr}^{(1)} = \frac{\pi^2 EJ_1}{l_1^2} = \frac{3,14^2 \cdot 10^3}{5^2} = 394,4 \text{ кН.}$$

Схема 2. В этом случае критическая сила вычисляется по формуле (2.5)

$$F_{cr}^{(2)} = cl_1.$$

Жесткость упругоподатливой опоры c определим, вычислив перемещение точки C от действия реакции в точке B . Так как ригель абсолютно жесткий ($EJ_2 = \infty$), то перемещения точек B и C равны.

Перемещение определим с помощью метода интеграла Максвелла – Мора (приложение А). Для этого построим эпюры изгибающих моментов в двух состояниях: в грузовом состоянии «р» (рисунок 2.7, а) и единичном состоянии «1» (рисунок 2.7, б).

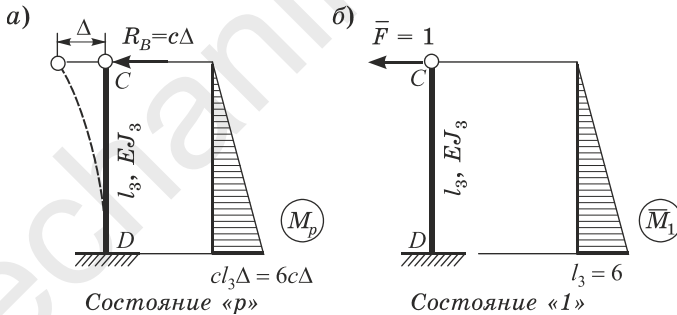


Рисунок 2.7

Перемещение точки C определим с помощью формулы трапеций (см. приложение А):

$$\Delta = \int_{l_3} \frac{\bar{M}_1 M_p}{EJ_3} dz = \frac{l_3}{6EJ_3} (2 \cdot 6c\Delta \cdot 6 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 6 + 6c\Delta \cdot 0) =$$

$$= \frac{6}{6 \cdot 700} 72c\Delta = \frac{18}{175} c\Delta.$$

Из этого выражения определяем жесткость опоры

$$\Delta = \frac{18}{175} c\Delta, \quad c = \frac{175}{18} = 9,72 \text{ кН/м}.$$

Критическая сила для схемы 2:

$$F_{cr}^{(2)} = c l_1 = 9,72 \cdot 5 = 48,6 \text{ кН}.$$

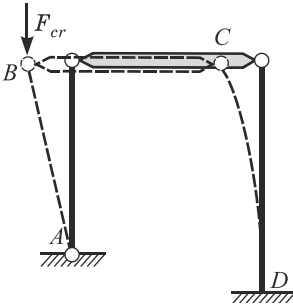


Рисунок 2.8

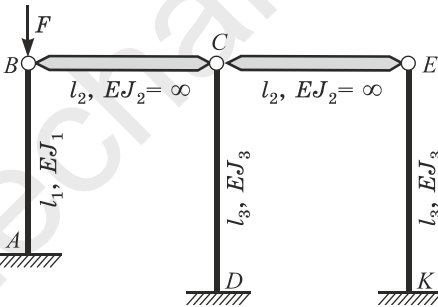
За критическую силу системы принимаем минимальную из полученных сил:

$$F_{cr} = \min(F_{cr}^{(1)}; F_{cr}^{(2)}) = \min(394,4; 48,6) = F_{cr}^{(2)} = 48,6 \text{ кН}.$$

На рисунке 2.8 указана форма потери устойчивости исходной рамы, соответствующая схеме 2.

Пример 2.3. Необходимо найти критическое значение силы F_{cr} и показать форму потери устойчивости рамы (рисунок 2.9, а). Длины участков принять $l_1 = 4 \text{ м}$, $l_2 = 3 \text{ м}$, $l_3 = 5 \text{ м}$, жесткость стоек – $EJ_1 = 10^3 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $EJ_3 = 1400 \text{ кН}\cdot\text{м}$, ригелей – $EJ_2 = \infty$.

а)



б)

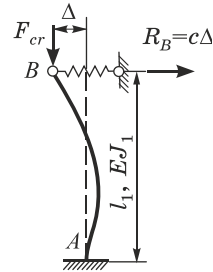


Рисунок 2.9

Потерю устойчивости рамы можно описать как потерю устойчивости стержня AB с упругоподатливой опорой в точке B (см. рисунок 2.9, б). В этом случае критическую силу можно определить, используя уравнение (2.6):

$$kl_1 - \operatorname{tg}(kl_1) = \frac{(kl_1)^3 EJ_1}{cl_1^3}. \quad (2.7)$$

Жесткость пружины c определим, рассмотрев перемещение точки C , под действием внешней силы R_B (рисунок 2.10, а).

Расчет статически неопределимой рамы. Перемещение точки C найдем методом Максвелла – Мора. Для этого построим эпюру изгибающих моментов M от внешней силы $R_B = c\Delta$. Система статически неопределима, для ее расчета воспользуемся методом сил.

Степень статической неопределимости рамы $n_c = 1$. Сформируем основную систему (рисунок 2.10, б).

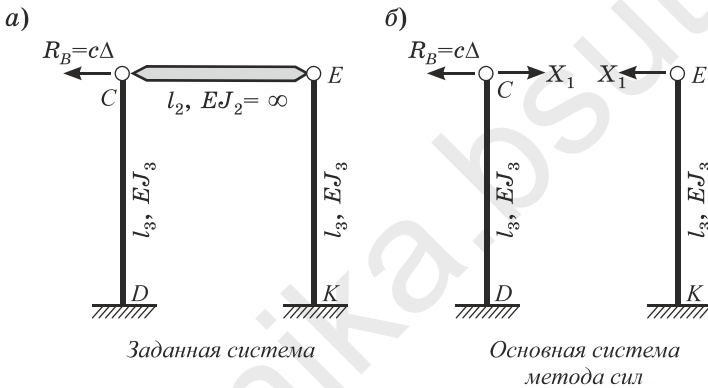


Рисунок 2.10

Каноническое уравнение:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

Для вычисления единичного и грузового перемещений сформируем единичное «1» (рисунок 2.11, а) и грузовое «р» (рисунок 2.11, б) состояния и построим соответствующие эпюры моментов \bar{M}_1 и M_p .

Единичное и грузовое перемещения вычислим, используя формулу Максвелла – Мора:

$$\delta_{11} = \sum_l \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EJ} dz = \frac{l_3}{6EJ_3} (2 \cdot 5 \cdot 5 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 5 + 5 \cdot 0) + \frac{l_3}{6EJ_3} (2 \cdot 5 \cdot 5 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 5 + 5 \cdot 0) = 2 \frac{5}{6 \cdot 1400} 50 = \frac{5}{84};$$

$$\Delta_{1p} = \sum_i \int \frac{\bar{M}_1 M_p}{EJ} dz = -\frac{l_3}{6EJ_3} (2 \cdot 5c\Delta \cdot 5 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 5 + 5c\Delta \cdot 0) =$$

$$= -\frac{5}{6 \cdot 1400} 50c\Delta = -\frac{5}{168} c\Delta.$$

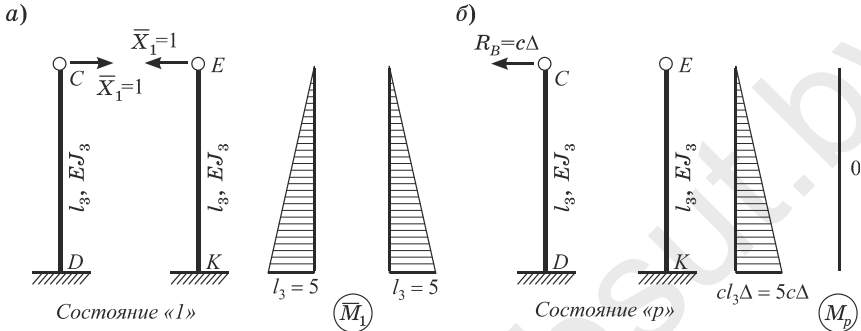


Рисунок 2.11

Решая каноническое уравнение, получим:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{5}{168} c\Delta \frac{84}{5} = \frac{c\Delta}{2}.$$

Окончательную эпюру строим графически (рисунок 2.12), вычисляя ее ординаты по формуле

$$M = \bar{M}_1 X_1 + M_p.$$

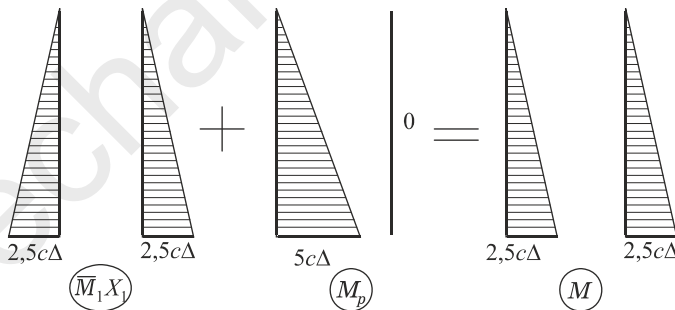


Рисунок 2.12

Определение жесткости упругоподатливой опоры. При вычислении перемещений в статически неопределимых системах единичное усилие по направлению искомого перемещения можно приложить не к заданной, а к основной системе. В основной системе

метода сил (см. рисунок 2.10, б) приложим усилие $\bar{F} = 1$ и построим единичную эпюру \bar{M} (рисунок 2.13, а).

Вычислим перемещение точки С:

$$\Delta = \sum \int_l \frac{\bar{M}M}{EJ} dz = \frac{l_3}{6EJ_3} (2 \cdot 2,5c\Delta \cdot 5 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 5 + 2,5c\Delta \cdot 0) =$$

$$= \frac{5}{6 \cdot 1400} 25c\Delta = \frac{5}{336} c\Delta,$$

т. е. $\Delta = \frac{5}{336} c\Delta$, откуда

$$c = \frac{336}{5} = 67,2 \text{ кН/м.}$$

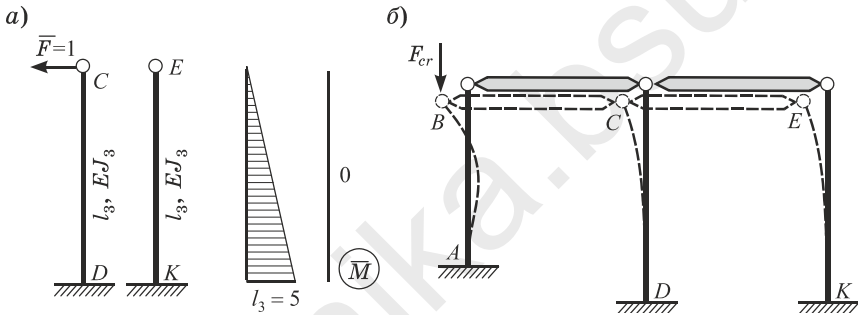


Рисунок 2.13

Определение критической силы. Подставим значение жесткостей в трансцендентное уравнение (2.7):

$$kl_1 - \text{tg}(kl_1) = \frac{(kl_1)^3 \cdot 1000}{67,2 \cdot 4^3},$$

$$kl_1 - \text{tg}(kl_1) = 0,2325 (kl_1)^3.$$

Решение ищем численно методом половинного деления. Обозначим

$$f(x) = x - \text{tg}(x) - 0,2325x^3, \quad x = kl_1.$$

Корень уравнения ищем на отрезке от $a = 1$ до $b = 3$, так как функция в этих точках разного знака. На каждом шаге вычисляем значение функции $f(x)$, сравнивая с нулем. Результаты записываем в таблицу 2.1. Процесс заканчиваем, когда $|f(x)| < 0,005$.

Таблица 2.1

№	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>f(a)</i>	<i>f(b)</i>	<i>f(a)f(b)</i>	$x = (a+b)/2$	<i>f(x)</i>
0	1,600	4,000	34,88	-12,04	-419,882	2,800	-1,95
1	1,600	2,800	34,88	-1,95	-67,957	2,200	1,10
2	2,200	2,800	1,10	-1,95	-2,140	2,500	-0,39
3	2,200	2,500	1,10	-0,39	-0,424	2,350	0,35
4	2,350	2,500	0,35	-0,39	-0,133	2,425	-0,02
5	2,350	2,425	0,35	-0,02	-0,007	2,388	0,16
6	2,388	2,425	0,16	-0,02	-0,003	2,406	0,07
7	2,406	2,425	0,07	-0,02	-0,001	2,416	0,03
8	2,416	2,425	0,03	-0,02	-0,001	2,420	0,00

Корень уравнения

$$x = kl_1 = 2,42, \quad k = \frac{2,42}{l_1} = \frac{2,42}{4} = 0,605.$$

Критическая сила

$$F_{cr} = k^2 EJ = 0,605^2 \cdot 1000 = 366,0 \text{ кН}.$$

Потеря устойчивости рамы показана на рисунке 2.13, б.

Контрольные вопросы

- 1 Чему равна сила Эйлера?
- 2 Чему равны критические силы при различных закреплениях концов стержня?
- 3 Чему равны приведенные длины стержней с различными закреплениями по концам?
- 4 Как определить параметр сжатого стержня ν ?
- 5 По какой кривой изгибается шарнирно опертый сжатый стержень при потере устойчивости.
- 6 Какие формы потери устойчивости возможны, если стержень закреплен одним концом жесткой шарнирно-неподвижной опорой, а другим – упругоподатливой?

3 РАСЧЕТЫ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ НА УСТОЙЧИВОСТЬ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

3.1 Гипотезы метода перемещений

Расчет стержневых систем на устойчивость можно выполнить либо методом сил, либо методом перемещений. Так как расчет рам на устойчивость методом сил вызывает значительные трудности, рассмотрим метод перемещений. При решении задач устойчивости стержневых систем данный метод, наряду с другими классическими методами, является наиболее эффективным методом. Примем следующие гипотезы:

1 Нагрузка считается узловой. Если имеется нагрузка в пролете (рисунок 3.1, а), то предварительно определяются продольные силы в стержнях (рисунок 3.1, б), а затем для сжатых стержней продольные силы прикладываются как узловые (рисунок 3.1, в). Растягивающие усилия не учитывают.

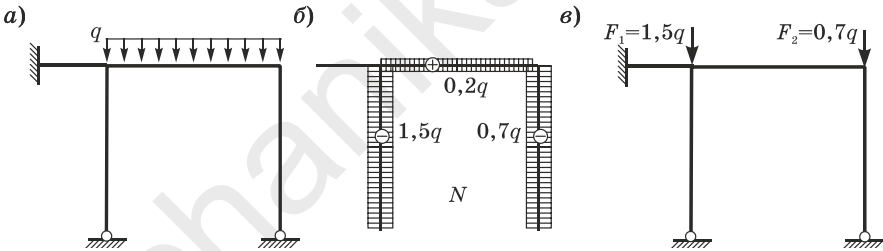


Рисунок 3.1

2 Нагрузка считается пропорциональной одному параметру, т.е. все узловые силы возрастают в одинаковой степени.

3 Стержни системы принимаются абсолютно прямыми, несжимаемыми и нерастяжимаемыми, соединенными жестко или шарнирно.

4 Сближением концов стержней пренебрегаем, т.е. считаем, что проекция изогнутого стержня на первоначальное направление равна его первоначальной длине.

5 Считаем, что все стержни работают в упругой стадии.

3.2 Последовательность расчета методом перемещений

Выделим основные этапы расчета стержневой системы методом перемещений при узловой нагрузке:

- 1 Определяют продольные усилия в стержнях системы N_i .
- 2 Вычисляют параметры *сжатых* стержней:

$$v_i = l_i \sqrt{\frac{|N_i|}{EJ_i}}.$$

3 Определяют степень кинематической неопределенности и формируют основную систему:

$$n_k = n_{\text{л}} + n_{\text{у}},$$

где $n_{\text{у}}$ – число угловых перемещений, $n_{\text{л}}$ – число линейных перемещений узлов системы.

4 Составляют систему канонических уравнений

$$\begin{cases} r_{11}(v)Z_1 + r_{12}(v)Z_2 + \dots + r_{1n}(v)Z_n = 0, \\ \dots \\ r_{n1}(v)Z_1 + r_{n2}(v)Z_2 + \dots + r_{nn}(v)Z_n = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Силловые реакции R_{ip} в системе отсутствуют, так как нагрузка приложена в узлах и не вызывает опорных реакций во введенных связях. Единичные реакции $r_{ij}(v)$ в общем случае зависят от параметров сжатого стержня v .

5 Строят эпюры изгибающих моментов в единичных состояниях. Как и при прочностном расчете, для этого используют готовые эпюры в отдельных стержнях. В случае изгибаемых стержней используют приложение Б, в случае сжато-изогнутых – приложение В. В отличие от изогнутых стержней, эпюры моментов в сжато-изогнутых криволинейны. В узлах введены поправочные функции $\varphi_1(v)$, $\varphi_2(v)$, $\varphi_3(v)$, $\varphi_4(v)$, $\eta_1(v)$, $\eta_2(v)$. Эти функции называются функциями проф. А. Ф. Смирнова и приведены в приложении Г.

6 Приравнивают определитель системы к нулю

$$\begin{vmatrix} r_{11}(v) & \dots & r_{1n}(v) \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{n1}(v) & \dots & r_{nn}(v) \end{vmatrix} = 0,$$

получают характеристическое уравнение, решая которое, определяют спектр собственных значений ν . За критическое принимают минимальное положительное значение

$$\nu_{cr} = \nu_{\min}$$

и вычисляют критическую силу

$$F_{cr} = \nu_{cr}^2 \frac{EJ}{l^2}.$$

Пример 3.1. Система стоек, связанных абсолютно жесткими стержнями, нагружена сжимающими сосредоточенными силами (рисунок 3.2). Потеря устойчивости стоек может происходить только в плоскости системы. Требуется определить критическое значение P_{cr} внешней силы P и коэффициент приведения длины сжатых стоек μ .

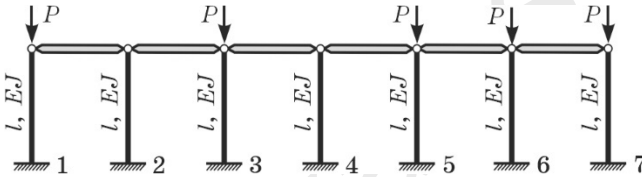


Рисунок 3.2

Вычислим параметры сжатых стержней. Для этого предварительно определим усилия в стойках. Вырезая шарнирные узлы рамы и рассматривая их равновесие, найдем продольные силы в стержнях 1–7 (рисунок 3.3, а):

$$\sum F_{iy} = 0,$$

$$N_1 = N_3 = N_5 = N_6 = N_7 = -P,$$

$$N_2 = N_4 = 0.$$

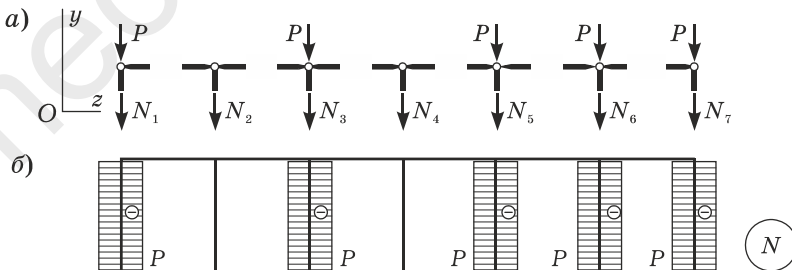


Рисунок 3.3

Знак «минус» показывает, что стержни сжаты. Строим эпюру продольных сил N (см. рисунок 3.3, б).

Для каждого из стержней определяем параметры

$$v_i = l_i \sqrt{|N_i| / EJ_i} \quad (i = 1, \dots, 5):$$

– для сжатых стоек

$$v_1 = v_3 = v_5 = l \sqrt{P / EJ} = v ,$$

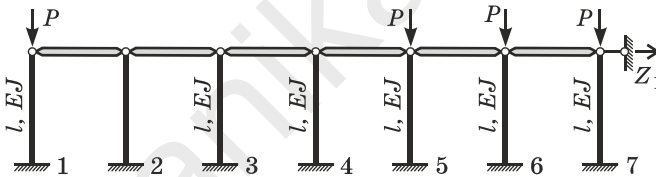
– для ненагруженных стоек

$$v_2 = v_4 = 0 .$$

Вычислим степень кинематической неопределимости n_k . Количество угловых перемещений n_y численно равно количеству жестких узлов. У нас все узлы шарнирные, поэтому $n_y = 0$. Узлы системы могут перемещаться только горизонтально, поэтому $n_l = 1$. Имеем

$$n_k = n_y + n_l = 0 + 1 = 1 .$$

Формируем основную систему метода перемещений. Для этого вводим горизонтальный опорный стержень, препятствующий горизонтальному смещению узлов, и вводим неизвестную метода перемещений Z_1 (рисунок 3.4).



Основная система

Рисунок 3.4

Так как система стоек один раз кинематически неопределима, то система канонических уравнений (3.1) вырождается в одно уравнение

$$r_{11} Z_1 = 0 ,$$

где Z_1 – горизонтальное перемещение, возникающее только при потере устойчивости; r_{11} – единичная реакция введенной связи от $\bar{Z}_1 = 1$.

Формируем состояние «1» основной системы, задавая единичное линейное перемещение введенного опорного стержня в направлении Z_1 (рисунок 3.5, а). Чтобы найти реакцию r_{11} в горизонтальном стержне, необходимо отсечь раму от опор, включая сам стержень.

В сечениях возникают продольные, поперечные силы и изгибающие моменты. В местах сечений прикладываем реакции, взятые из приложений (для изогнутых стоек 2, 4 – из приложения Б, для сжато-изогнутых стоек 1, 3, 5, 6, 7 – из приложения В), поперечные силы и изгибающие моменты не указываем (рисунок 3.5, б).

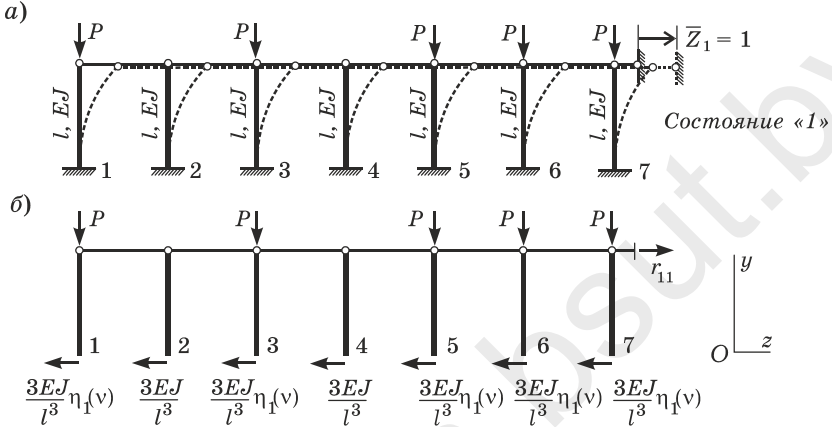


Рисунок 3.5

Составляем уравнение проекций всех сил на горизонтальную ось z :

$$\sum F_{iz} = 0, \quad r_{11} - 5 \frac{3EJ}{l^3} \eta_1(v) - 2 \frac{3EJ}{l^3} = 0,$$

отсюда

$$r_{11} = \frac{3EJ}{l^3} (5\eta_1(v) + 2).$$

Так как при потере устойчивости узел рамы поворачивается и $Z_1 \neq 0$, то из канонического уравнения следует, что

$$r_{11} = 0,$$

при этом $v = v_{cr}$

$$r_{11} = 0, \quad \frac{3EJ}{l^3} (5\eta_1(v_{cr}) + 2) = 0.$$

Уравнение устойчивости и его решение

$$5\eta_1(v_{cr}) + 2 = 0,$$

$$\eta_1(v_{cr}) = -2 / 5 = -0,4000.$$

По таблице функций Смирнова (приложение Г) находим

$$\eta_1(1,85) = -0,3954, \quad \eta_1(1,9) = -0,4736.$$

С помощью линейной интерполяции находим значение критического параметра

$$v_{cr} = 1,85 + \frac{1,9 - 1,85}{-0,4736 - (-0,3954)} (-0,4000 - (-0,3954)) = 1,853.$$

Вычислим критическую силу

$$P_{cr} = v_{cr}^2 \frac{EJ}{l^2} = 1,853^2 \frac{EJ}{l^2} = 3,43 \frac{EJ}{l^2}.$$

Коэффициент приведения длины сжатых стоек

$$\mu = \frac{\pi}{v_{cr}} = \frac{3,14}{1,852} = 1,69.$$

Пример 3.2. Рама нагружена вертикальной сосредоточенной силой (рисунок 3.6, а). Жесткость стойки EJ , ригеля $-2,5EJ$, длины одинаковы. Требуется определить критическое значение P_{cr} внешней силы P и коэффициент приведения длины сжатой стойки μ .

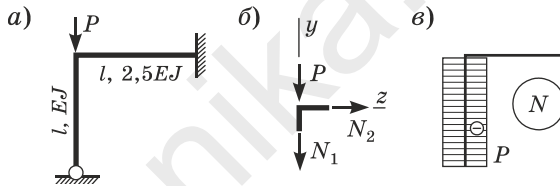


Рисунок 3.6

Вырезая узел рамы и рассматривая его равновесие (см. рисунок 3.6, б), определяем продольные силы в стержнях:

$$\sum F_{iy} = 0, \quad N_1 = -P;$$

$$\sum F_{iz} = 0, \quad N_2 = 0.$$

Знак «минус» показывает, что стержень сжат. Строим эпюру продольных сил N (см. рисунок 3.6, в).

Вычислим параметры сжатых стержней. Для сжатой стойки

$$v_1 = l \sqrt{\frac{|N|}{EJ}} = l \sqrt{\frac{P}{EJ}} = v.$$

Система имеет один жесткий узел, который допускает угловое перемещение. Линейные смещения отсутствуют, так как их

ограничивают опорные связи. Степень кинематической неопределенности

$$n_k = n_y + n_d = 1 + 0 = 1.$$

Формируем основную систему метода перемещений. Для этого вводим плавающую заделку, препятствующую повороту узла, и вводим неизвестную метода перемещений Z_1 (рисунок 3.7, а).

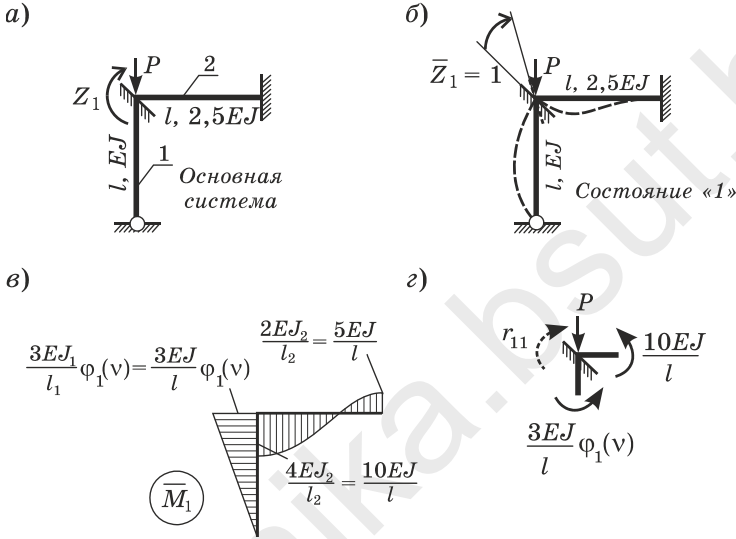


Рисунок 3.7

Так как $n_k = 1$, будет одно каноническое уравнение

$$r_{11}Z_1 = 0,$$

где Z_1 – угол поворота узла, возникающий только при потере устойчивости; r_{11} – единичная реакция введенной связи от $\bar{Z}_1 = 1$.

Формируем состояние «1» основной системы, задавая единичный угол поворота плавающей заделки в направлении Z_1 (см. рисунок 3.7, б). По таблицам приложений строим эпюру изгибающих моментов \bar{M}_1 (см. рисунок 3.7, в), для изогнутого ригеля используем приложение Б, для сжато-изогнутой стойки – приложение В).

Чтобы найти реакцию r_{11} , вырежем узел и составим уравнение равновесия моментов. В сечениях возникают продольные, поперечные силы и изгибающие моменты. В местах сечений прикладываем моменты, взятые из их эпюры моментов, поперечные и продольные силы не указываем (см. рисунок 3.7, г), так как они не создают момента относительно узла

$$\sum M_i = 0, \quad -r_{11} + \frac{3EJ}{l} \varphi_1(v) + \frac{10EJ}{l} = 0,$$

отсюда

$$r_{11} = \frac{EJ}{l} (3\varphi_1(v) + 10).$$

Когда сила P достигает критического значения P_{cr} , сжатая стойка теряет устойчивость, узел рамы поворачивается и возникают деформации изгиба. При этом параметр v становится критическим v_{cr} . Условие потери устойчивости:

$$r_{11} = 0, \quad \frac{EJ}{l} (3\varphi_1(v_{cr}) + 10) = 0.$$

Уравнение устойчивости и его решение

$$3\varphi_1(v_{cr}) + 10 = 0,$$

$$\varphi_1(v_{cr}) = -\frac{10}{3},$$

$$\varphi_1(v_{cr}) = -3,3333.$$

По таблице функций Смирнова (приложение Г) находим

$$\varphi_1(4,1) = -2,9802; \quad \varphi_1(4,15) = -3,5532.$$

С помощью линейной интерполяции находим значение критического параметра

$$v_{cr} = 4,1 + \frac{4,15 - 4,1}{-3,5532 - (-2,9802)} (-3,3333 - (-2,9802)) = 4,131.$$

Вычислим критическую силу

$$P_{cr} = v_{cr}^2 \frac{EJ}{l^2} = 4,131^2 \frac{EJ}{l^2} = 17,07 \frac{EJ}{l^2}.$$

Коэффициент приведения длины сжатых стоек

$$\mu = \frac{\pi}{v_{cr}} = \frac{3,14}{4,131} = 0,76.$$

Пример 3.3. Для сжатого неразрезного стержня требуется определить критическое значение внешней силы P_{cr} (рисунок 3.8, а). Жесткость 1-го участка – EJ , 2-го участка – $1,2EJ$, их длины соответственно равны l и $2l$.

Определяем продольные силы на 1-м и 2-м участках:

$$N_1 = N_2 = -P.$$

Знак «минус» показывает, что стержень сжат. Строим эпюру продольных сил N (рисунок 3.8, б).

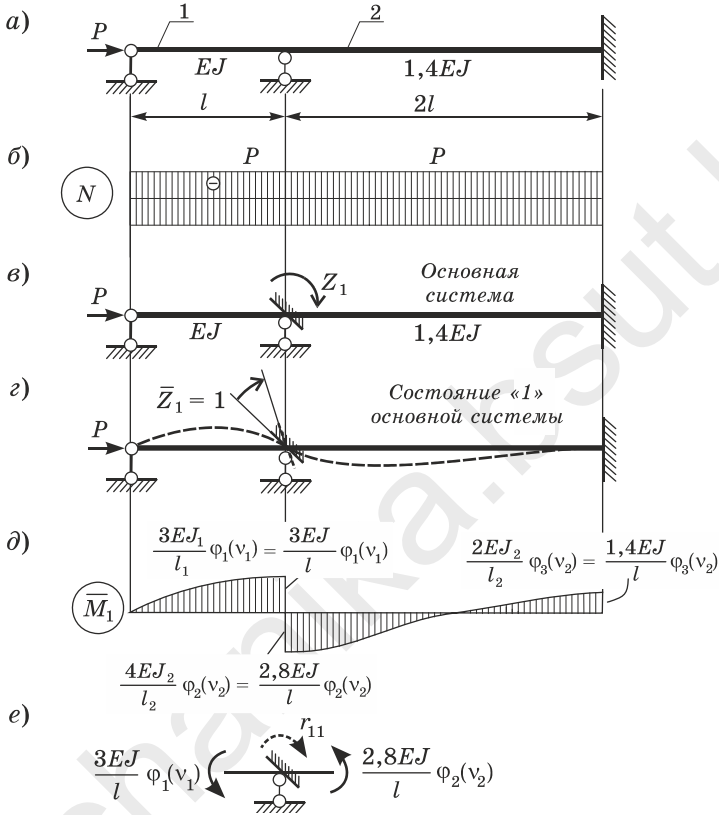


Рисунок 3.8

Вычислим параметры сжатых стержней

$$v_1 = l_1 \sqrt{\frac{|N_1|}{EJ_1}} = l \sqrt{\frac{P}{EJ}} = v,$$

$$v_2 = l_2 \sqrt{\frac{|N_2|}{EJ_2}} = 2l \sqrt{\frac{P}{1,4EJ}} = 1,690 l \sqrt{\frac{P}{EJ}} = 1,690v.$$

Система имеет один жесткий узел, который допускает угловое перемещение. Линейные смещения отсутствуют, так как их

ограничивает заделка на правом конце. Степень кинематической неопределенности

$$n_k = n_y + n_d = 1 + 0 = 1.$$

Формируем основную систему метода перемещений. Для этого вводим плавающую заделку, препятствующую повороту узла, и вводим неизвестную метода перемещений Z_1 (см. рисунок 3.8, в).

Так как $n_k = 1$, будет одно каноническое уравнение

$$r_{11}Z_1 = 0,$$

где Z_1 – угол поворота заделки над опорой, возникающий только при потере устойчивости; r_{11} – единичная реакция введенной связи от $\bar{Z}_1 = 1$.

Формируем состояние «1» основной системы, задавая единичный угол поворота плавающей заделки в направлении Z_1 (см. рисунок 3.8, г). По таблице приложения В строим эпюру изгибающих моментов \bar{M}_1 (см. рисунок 3.8, д).

Для определения реакции r_{11} вырежем узел и составим уравнение равновесия моментов (см. рисунок 3.8, е)

$$\sum M_i = 0, \quad -r_{11} + \frac{3EJ}{l} \varphi_1(v_1) + \frac{2,8EJ}{l} \varphi_2(v_2) = 0,$$

отсюда

$$r_{11} = \frac{3EJ}{l} \varphi_1(v_1) + \frac{2,8EJ}{l} \varphi_2(v_2).$$

Когда сила P достигает критического значения P_{cr} , неразрезной стержень теряет устойчивость, сечение над опорой поворачивается и возникают деформации изгиба. При этом параметр v становится критическим v_{cr} . Условие потери устойчивости:

$$r_{11} = 0, \quad r_{11} = \frac{3EJ}{l} \varphi_1(v_1) + \frac{2,8EJ}{l} \varphi_2(v_2) = 0.$$

Выразим v_1 и v_2 через $v = v_{cr}$, упростим и получим уравнение устойчивости

$$3\varphi_1(v_{cr}) + 2,8\varphi_2(1,690v_{cr}) = 0,$$

$$\varphi_1(v_{cr}) + 0,933\varphi_2(1,690v_{cr}) = 0.$$

Решение ищем численно методом половинного деления, используя приложение Г со значениями функций Смирнова. Обозначим

$$F(v) = \varphi_1(v) + 0,933\varphi_2(1,690v).$$

Корень уравнения ищем в пределах от 0 до 3, так как функция в этих точках разного знака. На каждом шаге вычисляем значение функции F , сравнивая с нулем. Результаты записываем в таблицу 3.1. Процесс заканчиваем, когда $|F(v)| < 0,005$.

Принимаем, критическое значение параметра v

$$v_{cr} = 2,852.$$

Для 1-го участка

$$v_{1 cr} = v_{cr} = 2,852,$$

для 2-го –

$$v_{2 cr} = 1,690v_{cr} = 4,820.$$

Таблица 3.1

№	v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(1,69v)$	F	v^*	$v_{i+1} = 0,5(v_i + v^*)$
0	0,000	1,000	1,000	1,933	–	–
	3,000	0,136	-0,568	-0,394	0,000	$0,5(0,000+3,000) = 1,500$
1	1,500	0,839	0,765	1,553	3,000	$0,5(1,500+3,000) = 2,250$
2	2,250	0,599	0,384	0,957	3,000	$0,5(2,250+3,000) = 2,625$
3	2,625	0,409	0,040	0,446	3,000	$0,5(2,625+3,000) = 2,813$
4	2,813	0,285	-0,213	0,086	3,000	$0,5(2,813+3,000) = 2,906$
5	2,906	0,215	-0,373	-0,133	2,813	$0,5(2,906+2,813) = 2,860$
6	2,860	0,250	-0,290	-0,021	2,813	$0,5(2,860+2,813) = 2,837$
7	2,837	0,268	-0,252	0,333	2,860	$0,5(0,837+0,860) = 0,849$
8	2,849	0,259	-0,272	0,005	2,860	$0,5(2,849+2,860) = 2,855$
9	2,855	0,254	-2,282	-0,009	2,849	$0,5(2,855+2,849) = 2,852$
10	2,852	0,256	-0,277	-0,002	2,852	–

Критическое значение внешней силы для 1-го участка

$$P_{cr}^{(1)} = \frac{v_{1cr}^2 EJ_1}{l_1^2} = \frac{2,852^2 EJ}{l^2} = 8,13 \frac{EJ}{l^2},$$

для 2-го –

$$P_{cr}^{(2)} = \frac{v_{2cr}^2 EJ_1}{l_2^2} = \frac{4,820^2 \cdot 1,4EJ}{(2l)^2} = 8,13 \frac{EJ}{l^2}.$$

Значения $P_{cr}^{(1)}$ и $P_{cr}^{(2)}$ совпали, что свидетельствует о правильности расчета.

Таким образом, стержень потеряет устойчивость при достижении силы критического значения

$$P_{cr} = 8,13 \frac{EJ}{l^2}.$$

Пример 3.4. Для неразрезного стержня с упруго-податливой опорой жесткостью $c = 50$ кН/м требуется определить критическое значение P_{cr} внешней силы P и изобразить форму потери устойчивости (рисунок 3.9, а). Длины участков принять $l_1 = l_2 = 6$ м, $EJ_1 = EJ_2 = 950$ кН·м).

Определяем продольные силы на 1-м и 2-м участках:

$$N_1 = N_2 = -P.$$

Знак «минус» показывает, что стержень сжат. Строим эпюру продольных сил N (рисунок 3.9, б).

Вычислим параметры сжатых стержней

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu = l \sqrt{\frac{P}{EJ}}.$$

Система имеет один жесткий узел, который допускает угловое перемещение. Упруго-податливая опора допускает линейное смещение перпендикулярно оси рассматриваемого стержня. Степень кинематической неопределимости

$$n_k = n_y + n_d = 1 + 1 = 2.$$

Стержень два раза кинематически неопределим. Формируем основную систему метода перемещений. Для этого вводим плавающую заделку, препятствующую повороту узла, и вертикальный опорный стержень, препятствующий линейным перемещениям упруго-податливой опоры. Задаем неизвестные метода перемещений: угол поворота Z_1 и вертикальное перемещение Z_2 (рисунок 3.9, в).

Так как $n_k = 2$, система канонических уравнений будет иметь вид

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 = 0, \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 = 0, \end{cases}$$

где Z_1 – угол поворота узла; Z_2 – вертикальное перемещение; r_{11} и r_{12} – единичные реакции в плавающей заделке от $\bar{Z}_1 = 1$ и $\bar{Z}_2 = 1$ соответственно; r_{21} и r_{22} – единичные реакции в опорном стержне от $\bar{Z}_1 = 1$ и $\bar{Z}_2 = 1$.

Формируем состояние «1» основной системы, задавая единичный угол поворота плавающей заделки в направлении Z_1 (рисунок 3.9, з). По приложению В строим эпюру изгибающих моментов M_1 и поперечных сил Q_1 (рисунок 3.9, д).

Далее сформируем состояние «2» основной системы, задавая единичное линейное перемещение в направлении Z_2 (рисунок 3.9, е). По приложению В строим эпюру изгибающих моментов M_2 и поперечных сил Q_2 (рисунок 3.9, ж).

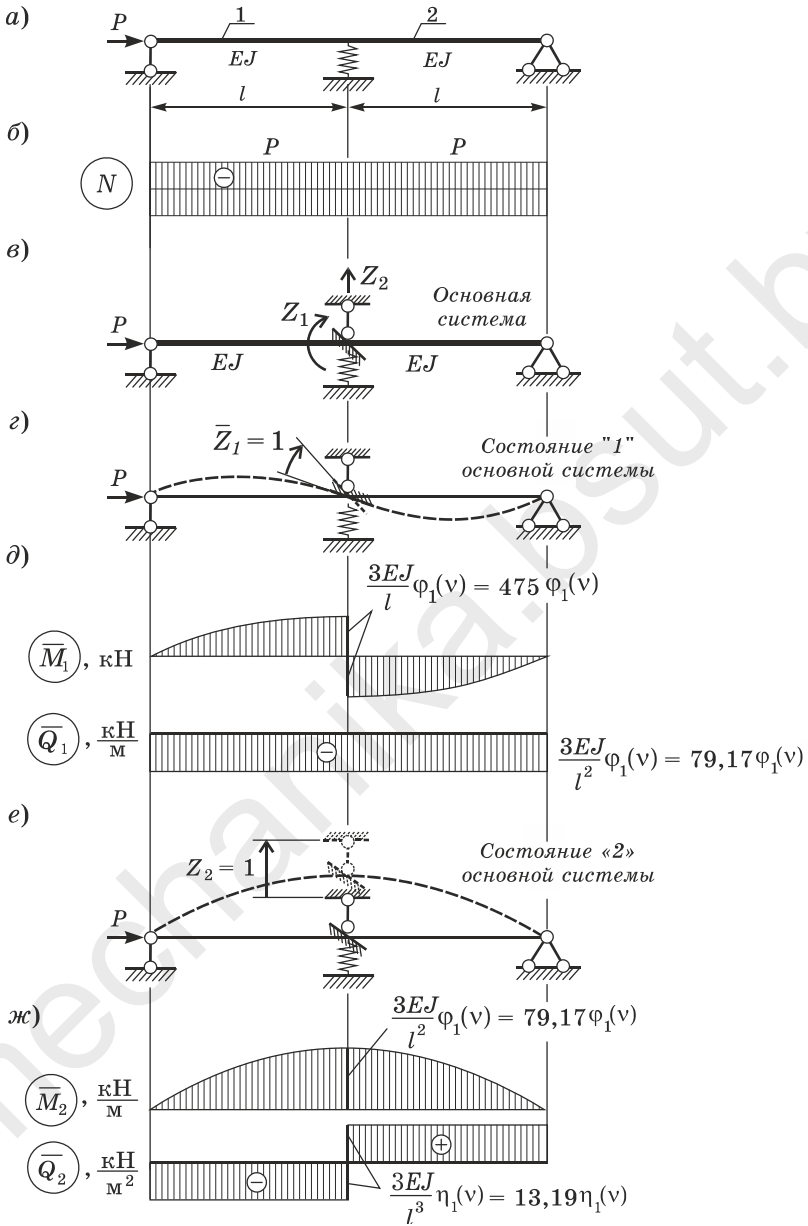


Рисунок 3.9

Чтобы найти единичные реакции, вырежем узел с введенными связями и рассмотрим равновесие узла. Для определения моментных реакций r_{11} и r_{12} составим уравнение моментов узла в соответствующих состояниях (рисунок 3.10, а, б):

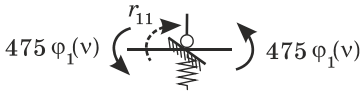
$$\sum M_i = 0, \quad r_{11} = 950\varphi_1(v);$$

$$\sum M_i = 0, \quad r_{12} = 0.$$

По первой теореме Рэлея

$$r_{21} = r_{12} = 0.$$

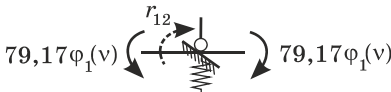
а)



Реакция упруго-податливой опоры пропорциональна ее перемещениям, т. е.

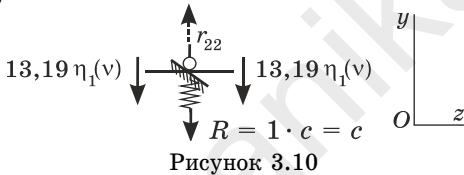
$$R = c\Delta,$$

б)



где R – реакция опоры, Δ – перемещение опорного сечения, c – жесткость опоры.

в)



В состоянии «2» опорное сечение смещается вверх на $\Delta = 1$. Для силовой реакции r_{22} составим уравнение проекций на вертикальную ось (рисунок 3.10, в)

$$\sum F_{iy} = 0, \quad r_{22} = 2 \cdot 13,19\eta_1(v) + c = 26,38\eta_1(v) + 50.$$

Уравнение устойчивости получим, приравняв определитель системы к нулю:

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрываем определитель

$$r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21} = 0.$$

Так как $r_{12} = r_{21} = 0$, то

$$r_{11}r_{22} = 0.$$

Для выполнения условия $r_{11}r_{22} = 0$ необходимо, чтобы $r_{11} = 0$ или $r_{22} = 0$. Рассмотрим оба случая.

1 Пусть $r_{11} = 0$ и $r_{22} \neq 0$, тогда

$$950\varphi_1(v) = 0,$$

$$\varphi_1(v) = 0,$$

По таблице функций Смирнова (приложение Г) находим

$$v_1 = \pi = 3,1416.$$

2 Пусть $r_{22} = 0$ и $r_{11} \neq 0$, тогда

$$26,38\eta_1(v) + 50 = 0,$$

$$\eta_1(v) = -\frac{50}{26,38} = -1,8954.$$

По таблице функций Смирнова (приложение Г)

$$\eta_1(2,60) = -1,8299, \quad \eta_1(2,65) = -1,9474,$$

с помощью линейной интерполяции находим

$$v_2 = 2,6 + \frac{2,65 - 2,6}{-1,9474 - (-1,8299)}(-1,8954 - (-1,8299)) = 2,6278.$$

Из двух значений v выбираем наименьшее

$$v_{cr} = \min(v_1, v_2) = v_2 = 2,6278,$$

которое соответствует случаю 2.

Вычисляем критическую силу

$$P_{cr} = \frac{v_{cr}^2 EJ}{l^2} = \frac{2,6278^2 \cdot 950 \cdot 10^3}{6^2} = 182,2 \cdot 10^3 = 182,2 \text{ кН}.$$

Определим форму потери устойчивости. Для случая 2 $r_{22} = 0$, $r_{11} \neq 0$. Из системы канонических уравнений с учетом того, что $r_{12} = 0$, $r_{21} = 0$, получаем

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 = 0, & \begin{cases} r_{11} \cdot Z_1 = 0, \\ 0 \cdot Z_2 = 0, \end{cases} \\ r_{22}Z_2 = 0; \end{cases}$$

следовательно, $Z_1 = 0$, $Z_2 \neq 0$.

При потере устойчивости происходит смещение сечения балки по вертикали за счет деформации упруго-податливой опоры. Имеет место симметричная форма потери устойчивости (рисунок 3.11).



Рисунок 3.11

Пример 3.5. Требуется найти критическое значение равномерно распределенной нагрузки q_{cr} и показать форму потери устойчивости рамы (рисунок 3.12, а). Длины участков принять $l_1 = 5,4$ м, $l_2 = 4$ м, $h = 4,2$ м, жесткости ригелей – EJ , стойки – kEJ ($k = 1,5$).

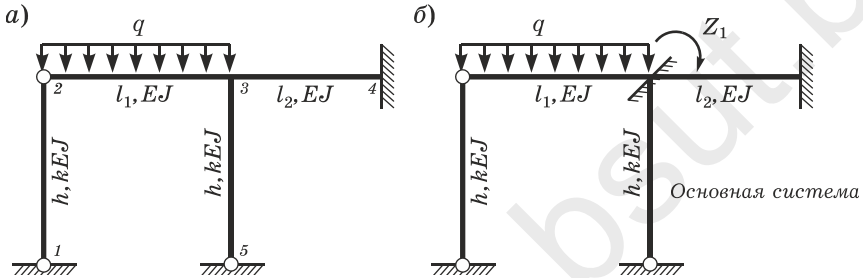


Рисунок 3.12

Так как распределенная нагрузка приложена в пролете, то сначала необходимо провести прочностной расчет для приведения нагрузки к узловой. Для этого необходимо построить эпюры продольных сил и полученные значения усилий приложить как внешние силы при расчете на устойчивость.

Приведение нагрузки к узловой. Расчет выполним методом перемещений.

Система имеет один жесткий узел, который допускает угловое перемещение. Жесткие опоры (заделка справа и шарнирно-неподвижная опора снизу) не допускают линейного смещения узла. Вычислим степень кинематической неопределимости

$$n_k = n_y + n_d = 1 + 0 = 1.$$

Рама один раз кинематически неопределима. Формируем основную систему метода перемещений. Для этого вводим плавающую заделку, препятствующую повороту узла, и задаем угол поворота Z_1 (см. рисунок 3.12, б).

Так как $n_k = 1$, получим одно каноническое уравнение

$$r_{11}Z_1 + R_{1p} = 0,$$

где r_{11} – единичная реакция во введенной связи от $\bar{Z}_1 = 1$; Z_1 – угол поворота заделки в узле, R_{1p} – грузовая реакция во введенной связи от внешней нагрузки.

Формируем состояние «1» основной системы, задавая единичный угол поворота плавающей заделки в направлении Z_1 (рисунок 3.13, а). По приложению Б строим эпюру изгибающих моментов \bar{M}_1 (рисунок 3.13, б). Вычисляем ординаты на концах стержней, учитывая их длины и жесткости. Длины подставляем в метрах. Вычисления ведем до трех знаков после запятой.

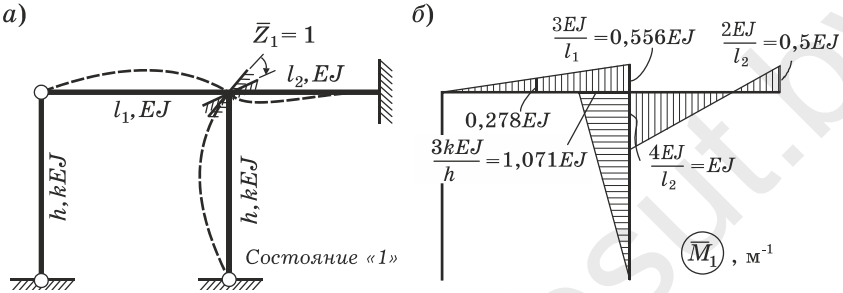


Рисунок 3.13

Формируем состояние «р» основной системы, прикладывая к основной системе внешнюю распределенную нагрузку (рисунок 3.14, а). По приложению Б строим грузовую эпюру изгибающих моментов M_p (рисунок 3.14, б).

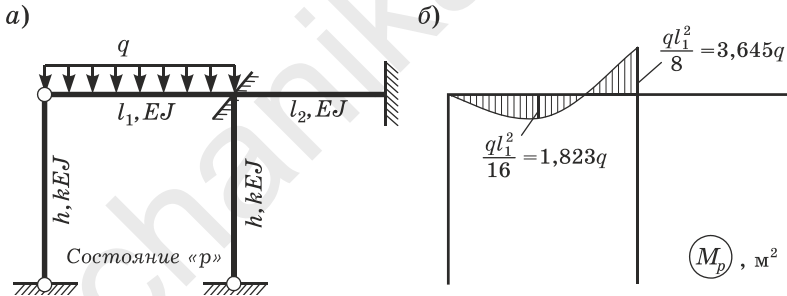


Рисунок 3.14

Чтобы найти единичную и грузовую реакции, вырежем узел с плавающей заделкой и рассмотрим равновесие узла в соответствующих состояниях. Составим уравнения равновесия моментов узла (рисунок 3.15):

– состояние «1» –

$$\sum M_i = 0,$$

$$-r_{11} + EJ + 1,071EJ + 0,556EJ = 0,$$

$$r_{11} = 2,627EJ ;$$

– состояние «р» –

$$\begin{aligned}\sum M_i &= 0, \\ -R_{1p} + 3,645q &= 0, \\ R_{1p} &= 3,645q.\end{aligned}$$

Подставим значения реакций в каноническое уравнение и получим

$$Z_1 = -\frac{R_{1p}}{r_{11}} = -\frac{3,645q}{2,627EJ} = -1,3875 \frac{q}{EJ} \text{ м}^3.$$

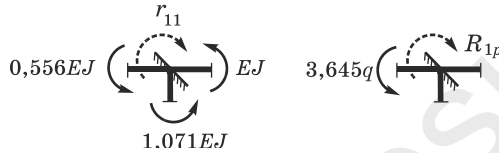


Рисунок 3.15

Строим эпюру изгибающих моментов. Ординаты эпюры M в заданной системе находим по формуле

$$M = \bar{M}_1 Z_1 + M_p.$$

Для этого умножаем ординаты единичной эпюры \bar{M}_1 на найденное значение перемещения Z_1 и добавляем ординаты грузовой эпюры M_p . Так как величина Z_1 отрицательна, то ординаты эпюры $\bar{M}_1 Z_1$ отображаем с противоположной стороны оси рамы по сравнению с эпюрой \bar{M}_1 . Получаем окончательную эпюру изгибающих моментов M (рисунок 3.16).

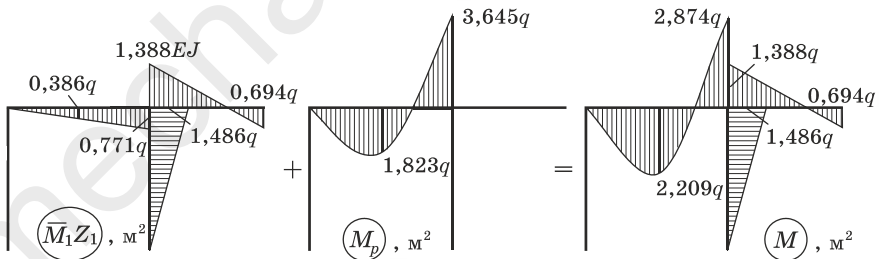


Рисунок 3.16

Эпюру поперечных сил Q построим по готовой эпюре изгибающих моментов M .

На участке 2–3 эпюра M криволинейна. Для определения ординат эпюры Q на концах участка вырежем элемент 2–3, приложим

внешнюю нагрузку q , моменты на концах стержня (из эпюры моментов) и неизвестные поперечные силы (рисунок 3.17).

Составим уравнения равновесия моментов относительно точек 2 и 3:

$$\sum M_{i2} = 0,$$

$$-\frac{ql_1^2}{2} - 2,874q - Q_3 l_1 = 0,$$

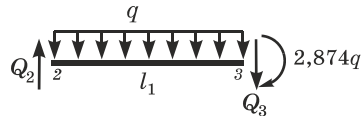


Рисунок 3.17

$$Q_3 = -\frac{q \cdot 5,4}{2} - \frac{2,874q}{5,4} = -3,232q;$$

$$\sum M_{i3} = 0, \quad -Q_2 l_1 + \frac{ql_1^2}{2} - 2,874q = 0,$$

$$Q_2 = \frac{q \cdot 5,4}{2} - \frac{2,874q}{5,4} = 2,168q.$$

На участках 3-4 и 3-5 эпюра M прямолинейна, поперечная сила равна тангенсу угла наклона эпюры моментов. Поперечная сила Q положительна, если для совмещения оси стержня с эпюрой M ось вращают по часовой стрелке, и наоборот. Значения длин стержней подставляем в метрах. В соответствии с этим

$$Q_{3-4} = \frac{1,388q + 0,694q}{l_2} = \frac{2,082q}{4} = 0,521q,$$

$$Q_{3-5} = \frac{1,486q}{h} = \frac{1,486q}{4,2} = 0,354q.$$

По рассчитанным ординатам строим эпюру Q (рисунок 3.18, а).

а) б)

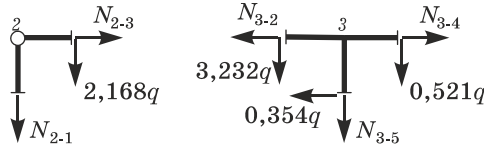
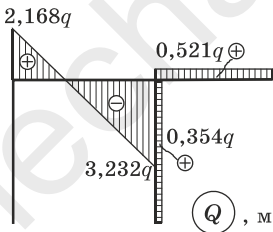


Рисунок 3.18

Эпюру продольных сил N строим по готовой эпюре Q . Вырежем шарнирный узел 2 и жесткий узел 3 рамы, в сечениях приложим поперечные и продольные силы (см. рисунок 3.18, б). Положительные поперечные силы направим так, чтобы они вращали узлы по

часовой стрелке, отрицательные – против часовой стрелки. Все продольные силы N считаем положительными – растягивающими.

Из уравнений проекций всех сил на вертикальную и горизонтальную оси найдем неизвестные продольные силы:

$$N_{2-1} = -2,168q, \quad N_{2-3} = 0,$$

$$N_{3-4} = 0,354q, \quad N_{3-5} = -3,232q - 0,521q = -3,753q.$$

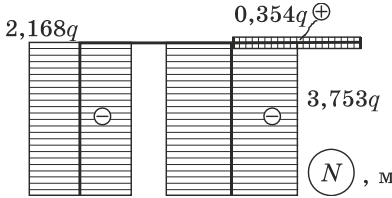


Рисунок 3.19

Знаки «минус» указывают на то, что стержни 2-1 и 3-5 сжаты. По полученным данным строим эпюру N , оси стержней располагаем по середине эпюр, указываем знаки (рисунок 3.19).

Расчет на устойчивость. При расчете на устойчивость продольные сжимающие силы в стержнях от нагрузки q прикладываются как внешние силы (рисунок 3.20, а). Положительные значения продольных сил не учитываются. Расчетную схему рамы условно разделяем на две части по шарниру 2. Левая часть эквивалентна шарнирно опертой сжатой стойке силой $2,168q$ (рисунок 3.20, б), а правая часть рамы, изображенной на рисунке 3.20, в. Любая из частей может потерять устойчивость. Рассмотрим отдельно каждую часть.

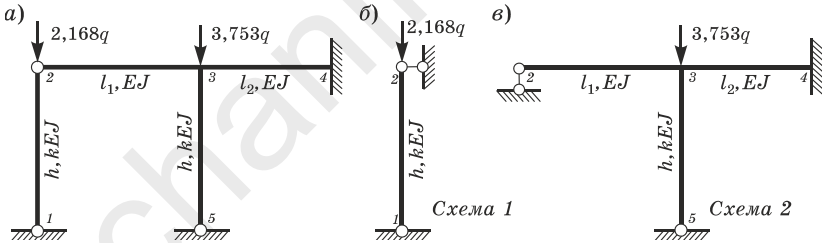


Рисунок 3.20

Схема 1. Данная схема представляет собой шарнирно опертую сжатую стойку. Критическая сила вычисляется по формуле Эйлера. Согласно (2.2) получим

$$F_{cr}^{(1)} = 2,168q_{cr}^{(1)} = \frac{\pi^2 kEJ}{h^2},$$

$$q_{cr}^{(1)} = \frac{\pi^2 kEJ}{2,168h^2} = \frac{3,14^2 \cdot 1,5EJ}{2,168 \cdot 4,2^2} = 0,387EJ.$$

Схема 2. Данная схема представляет собой Т-образную статически неопределимую раму. Для вычисления критической силы используем метод перемещений.

Вычислим параметр сжатой стойки 3–5

$$v = h\sqrt{\frac{3,753q}{kJ}} = 4,2\sqrt{\frac{3,753q}{1,5EJ}} = 6,643\sqrt{\frac{q}{EJ}}.$$

Система имеет один жесткий узел, который допускает угловое перемещение. Линейные смещения отсутствуют, так как их ограничивает заделка на правом конце. Степень кинематической неопределимости

$$n_k = n_y + n_d = 1 + 0 = 1.$$

Формируем основную систему метода перемещений. Для этого вводим плавающую заделку, препятствующую повороту узла, и вводим неизвестную метода перемещений Z_1 (рисунок 3.21). Так как $n_k = 1$, будет одно каноническое уравнение

$$r_{11}Z_1 = 0,$$

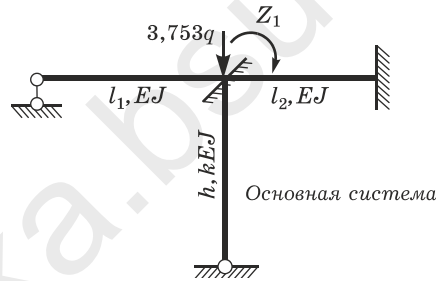


Рисунок 3.21

где r_{11} – единичная реакция введенной связи от $\bar{Z}_1 = 1$; Z_1 – угол поворота заделки, возникающий только при потере устойчивости.

Формируем состояние «1» основной системы, задавая единичный угол поворота плавающей заделки в направлении Z_1 (рисунок 3.22, а). Для изогнутых стержней 2–3 и 3–4 эпюру изгибающих моментов строим по приложению Б, а для сжато-изогнутого стержня 3–5 – по приложению В (рисунок 3.22, б).

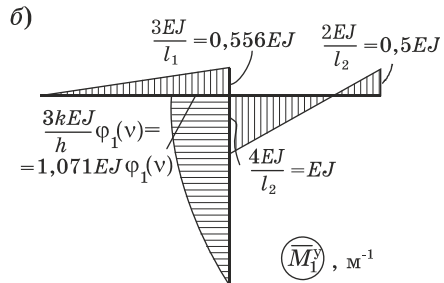
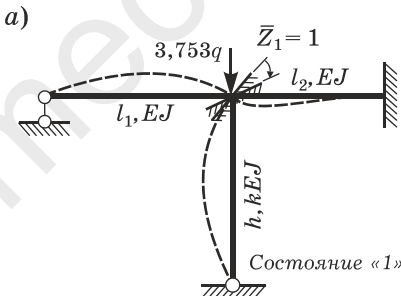


Рисунок 3.22

Для определения реакции r_{11} вырежем узел 3 и составим уравнение равновесия моментов (рисунок 3.23, а)

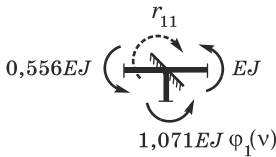
$$\sum M_i = 0, \quad -r_{11} + EJ + 1,071EJ\varphi_1(v) + 0,556EJ = 0,$$

отсюда

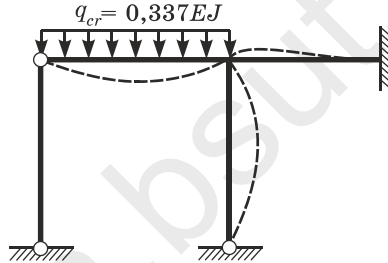
$$r_{11} = 1,071EJ\varphi_1(v) + 1,556EJ.$$

Когда сила q достигает критического значения q_{cr} , рама теряет устойчивость, сечение в узле 3 поворачивается и возникают деформации изгиба. При этом параметр v становится критическим v_{cr} .

а)



б)



Форма потери устойчивости

Рисунок 3.23

Условие потери устойчивости:

$$r_{11} = 0, \quad r_{11} = 1,071EJ\varphi_1(v_{cr}) + 1,556EJ = 0,$$

$$1,071\varphi_1(v_{cr}) = -1,556, \quad \varphi_1(v_{cr}) = -1,4528.$$

По таблице функций Смирнова (приложение Г)

$$\varphi_1(3,85) = -1,4142, \quad \varphi_1(3,9) = -1,6269,$$

с помощью линейной интерполяции находим

$$v_{cr} = 3,85 + \frac{3,9 - 3,85}{-1,6269 - (-1,4142)} (-1,4528 - (-1,4142)) = 3,8540.$$

Критическое значение нагрузки

$$v_{cr} = 6,643\sqrt{\frac{q_{cr}^{(2)}}{EJ}} = 3,8540, \quad q_{cr}^{(2)} = \left(\frac{3,8540}{6,643}\right)^2 EJ = 0,337EJ.$$

Из двух значений $q_{cr}^{(1)}$ и $q_{cr}^{(2)}$ выбираем наименьшее

$$q_{cr} = \min(q_{cr}^{(1)}, q_{cr}^{(2)}) = q_{cr}^{(2)} = 0,337EJ,$$

которое соответствует схеме 2.

На рисунке 3.23, б указана форма потери устойчивости исходной рамы.

3.3 Использование симметрии

Расчеты на устойчивость для симметричных рам можно упростить, если рама нагружена симметричной нагрузкой. При расчетах по деформированной схеме принцип суперпозиции не соблюдается, поэтому произвольную нагрузку нельзя разложить на симметричную и обратносимметричную, как это было возможно при статическом расчете [13]. Однако в отдельных случаях несимметричную нагрузку можно заменить симметричной.

Известно, что симметричная система при действии симметричной нагрузки может иметь одну из форм потери устойчивости: симметричную или обратносимметричную [3]. Заранее определить, какой форме соответствует критическая нагрузка в общем случае невозможно, поэтому рассматривают обе формы потери устойчивости и за критическую принимают наименьшую из сил.

Для симметричных рам при действии симметричной нагрузки упрощение заключается в разделении на две независимые части определителя системы, соответствующие симметричной и обратносимметричной формам потери устойчивости.

Рассмотрим симметричную раму, нагруженную вертикальными сосредоточенными силами (рисунок 3.24, а).

Степень кинематической неопределимости рамы равна 3. Сформируем основную систему метода перемещений (рисунок 3.24, б).

На рисунке 3.24, в показана симметричная форма потери устойчивости. Здесь $Z_1 = -Z_2, Z_3 = 0$ и необходимо решить одно уравнение с одним неизвестным (Z_1). Для определения критической силы $P_{cr}^{сим}$ коэффициент r_{11} приравняем к нулю:

$$r_{11} = 0.$$

В случае обратносимметричной формы потери устойчивости (рисунок 3.24, г) $Z_1 = Z_2, Z_3 \neq 0$ система канонических уравнений разрешается относительно двух неизвестных (Z_1 и Z_3). Здесь приравняем к нулю определитель системы, состоящий из коэффициентов $r_{22}, r_{23}, r_{32}, r_{33}$:

$$\begin{vmatrix} r_{22} & r_{23} \\ r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} = 0$$

и определяем критическую силу $P_{cr}^{обп}$, соответствующую обратносимметричной форме потере равновесия.

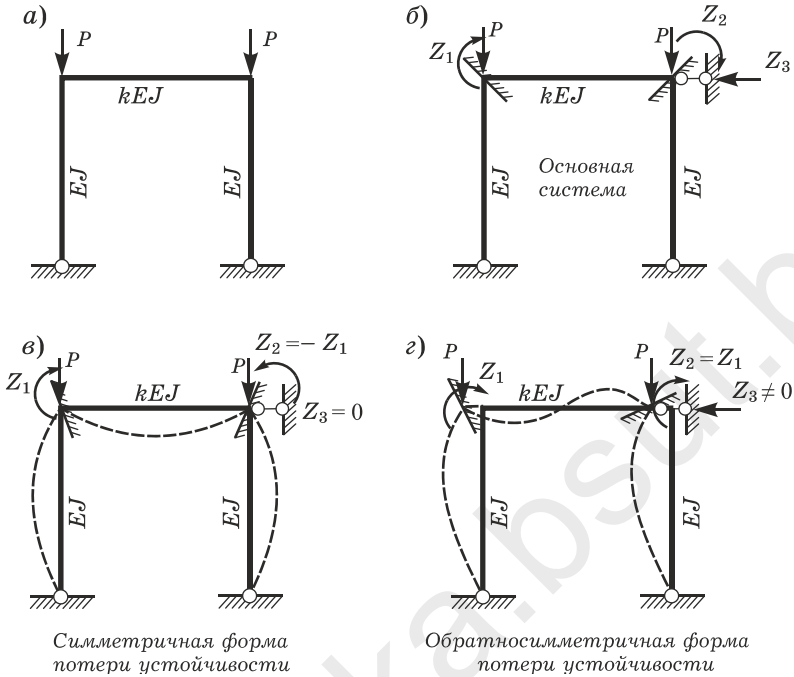


Рисунок 3.24

Выполнив отдельно расчет по каждой форме потери устойчивости, критическую силу для рамы находят как меньшую из полученных значений:

$$P_{cr} = \min(P_{cr}^{сим}, P_{cr}^{обр}).$$

Отдельные исследования двух типов форм потери устойчивости существенно снижают трудоемкость задачи по сравнению с расчетом без учета симметрии.

Контрольные вопросы

- 1 Какие гипотезы используются при расчете рам на устойчивость методом перемещений?
- 2 В чем состоит порядок расчета рамы на устойчивость?
- 3 Чем отличаются по виду эпюры моментов для изогнутых и сжато-изогнутых стержней?
- 4 В каких случаях можно использовать симметрию системы при решении задач устойчивости?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Бурчаков, Ю. И.** Строительная механика : учеб. пособие для студентов вузов / Ю. И. Бурчаков, В. Е. Гнедин, В. М. Денисов. – М. : Высшая школа, 1983. – 255 с.

2 **Васильков, Г. В.** Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений : учеб. пособие / Г. В. Васильков, З. В. Буйко. – СПб. : Лань, 2021. – 256 с.

3 **Довнар, Е. П.** Строительная механика : учеб. для вузов по спец. «Строительство» / Е. П. Довнар, Л. И. Коршун. – Минск : Выш. шк., 1986. – 310 с.

4 **Киселев В. А.** Строительная механика: Спец. курс. Динамика и устойчивость сооружений : учеб. для вузов / В. А. Киселев. – М. : Стройиздат, 1980. – 616 с.

5 **Кобелев, Е. А.** Строительная механика стержневых систем / Е. А. Кобелев, Н. А. Масленников. – СПб. : ИД «Петрополис», 2021. – 208 с.

6 Сборник задач и упражнений по устойчивости стержневых систем : учеб. пособие / Б. В. Лампси, Н. Ю. Трянина, П. А. Хазов, Б. Б. Лампси. – Н. Новгород : ННГАСУ, 2020. – 94 с.

7 **Смирнов, В. А.** Строительная механика : учеб. для вузов / В. А. Смирнов, С. А. Иванов, М. А. Тихонов. – М. : Стройиздат, 1984. – 208 с.

8 **Снитко, Н. К.** Строительная механика : учеб. для вузов / Н. К. Снитко. – М. : Высшая школа, 1972. – 488 с.

9 **Старовойтов, Э. И.** Сопротивление материалов : учеб. для вузов / Э. И. Старовойтов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 384 с.

10 Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений : учеб. для вузов / А. Ф. Смирнов, А. В. Александров, Б. Я. Лащеников, Н. Н. Шапошников ; под ред. А. Ф. Смирнова. – М. : Стройиздат, 1984. – 415 с.

11 Строительная механика. Основы теории с примерами расчетов : учеб. / А. Е. Саргсян, А. Т. Демченко, Н. В. Дворянчиков, Г. А. Джинчелашвили ; под ред. А. Е. Саргсяна. – М. : Высшая школа, 2000. – 416 с.

12 **Шакирзянов, Р. А.** Динамика и устойчивость сооружений : учеб. пособие / Р. А. Шакирзянов, Ф. Р. Шакирзянов. – Казань : Изд-во Казан. гос. архитект.-строит. ун-та, 2015. – 120 с.

13 **Яровая, А. В.** Строительная механика. Статика стержневых систем : учеб. пособие / А. В. Яровая. – Гомель : БелГУТ, 2013. – 447 с.

Вычисление перемещений методом Максвелла – Мора

Для решения задач устойчивости перемещения определяются как промежуточный этап решения. Рассмотрим один из методов вычисления перемещений – метод Максвелла – Мора. Он позволяет вычислять любые типы перемещений (удлинения, прогибы, углы поворота, углы закручивания и т. п.) для всех типов стержневых систем (балки, рамы, фермы). Перемещения (прогибы и углы поворота) Δ_K для плоской задачи могут быть получены с помощью интеграла Мора:

$$\Delta_K = \sum \int_l \frac{\bar{N}N_p}{EA} dz + \sum \int_l \frac{\eta \bar{Q}Q_p}{GA} dz + \sum \int_l \frac{\bar{M}M_p}{EJ} dz,$$

где \bar{N} , \bar{Q} , \bar{M} – внутренние усилия в единичном состоянии; N_p , Q_p , M_p – внутренние усилия в грузовом состоянии; EA , GA , EJ – жесткости при растяжении-сжатии, сдвиге и изгибе; η – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по сечению.

«Единичным» называется состояние системы под действием единичной нагрузки ($\bar{F} = 1$ или $\bar{m} = 1$), «грузовым» – состояние при действии внешней нагрузки.

Как правило, при изгибе балок основное влияние на перемещения имеют изгибающие моменты, поэтому в интеграле Мора учитывают только последнее слагаемое (рисунок А.1):

$$\Delta_K = \sum \int_l \frac{\bar{M}M_p}{EJ} dz.$$

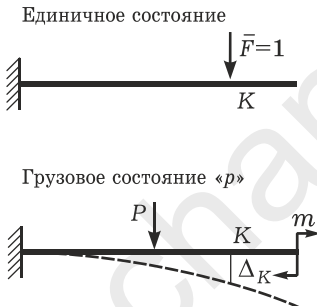
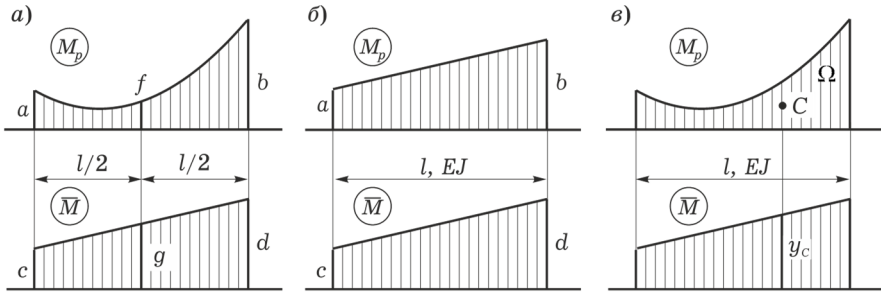


Рисунок А.1

Для вычисления интеграла нужно знать аналитическое выражение момента на каждом из участков, что не всегда удобно. Поэтому для вычисления интеграла Мора для участков постоянной жесткости используют различные способы, позволяющие избежать непосредственного интегрирования.

Рассмотрим участок балки постоянной жесткости EJ длиной l , для которой построены эпюры изгибающих моментов в грузовом M_p и единичном \bar{M} состояниях (рисунок А.2).



К формуле Симпсона

К формуле трапеций

К формуле Верещагина

Рисунок А.2

Перемещения по формуле Симпсона (см. рисунок А.2, а)

$$\Delta_K = \frac{1}{EJ} \int_0^l \bar{M} M_p dz = \frac{l}{6EJ} (ac + 4fg + bd),$$

где EJ – изгибная жесткость; l – длина участка; a, b, f – крайние и средняя ординаты эпюры M_p ; c, d, g – крайние и средняя ординаты \bar{M} .

Формула Симпсона является точной, если две эпюры прямолинейны или одна из них прямолинейная, а вторая представляет собой квадратную параболу.

Перемещения по формуле трапеций (см. рисунок А.2, б)

$$\Delta_K = \frac{1}{EJ} \int_0^l \bar{M} M_p dz = \frac{l}{6EJ} (2ac + 2bd + ad + bc),$$

где EJ – изгибная жесткость; l – длина участка; a, b – крайние ординаты эпюры M_p ; c, d – крайние ординаты \bar{M} .

Формула трапеций применима, если две эпюры прямолинейны. При вычислении произведений в правой части формул Симпсона и трапеций необходимо учитывать знаки ординат a, b, f, c, d, g . Произведения ординат, расположенных по одну сторону от оси, будут *положительными*, по разным – *отрицательными*.

Формула Верещагина позволяет заменить интегрирование перемножением площади одной эпюры на ординату второй (обязательно прямолинейной) эпюры, взятую под центром тяжести первой (см. рисунок А.2, в):

$$\Delta_K = \frac{1}{EJ} \int_0^l \bar{M} M_p dz = \frac{1}{EJ} \Omega y_c,$$

где EJ – изгибная жесткость; Ω – площадь «грузовой» эпюры M_p ; y_c – ордината «единичной» эпюры \bar{M} , взятая под центром тяжести эпюры M_p .

Результат перемножения будет *положительным*, если центр тяжести одной эпюры S и ордината y_c на другой эпюре расположены по одну сторону от оси стержня, *отрицательным* – по разные.

Для использования формулы Верещагина необходимо знать площади и центры тяжести эпюр. На рисунке А.3 приведены наиболее часто встречающиеся на практике формы эпюр.

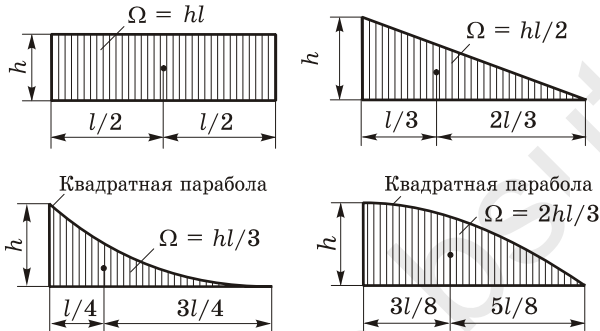


Рисунок А.3

Порядок определения перемещения Δ_K методом Мора:

- строят эпюру изгибающих моментов M_p от заданной нагрузки (в грузовом состоянии);
- по направлению искомого перемещения в точке K прикладывают *единичное усилие* (для линейных перемещений – сосредоточенную силу $\bar{F} = 1$, для угловых – момент $\bar{m} = 1$);
- строят эпюру изгибающих моментов \bar{M} в единичном состоянии;
- разбивают систему на участки, в пределах каждого из которых жесткость постоянна и хотя бы одна из эпюр прямолинейна;
- для каждого участка вычисляют перемещения, используя формулы Верещагина, Симпсона или трапеций;
- перемещения для каждого участка суммируют.

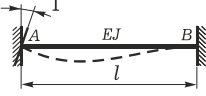
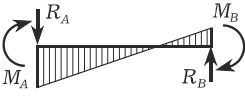
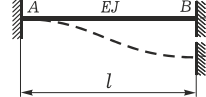
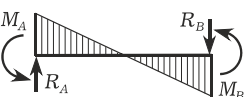
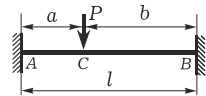
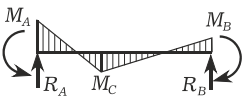
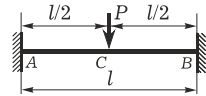
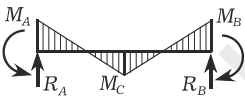
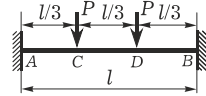
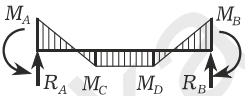
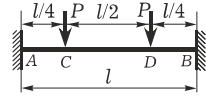
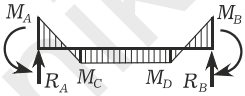
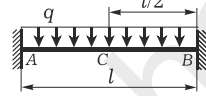
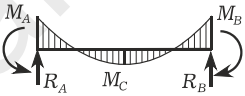
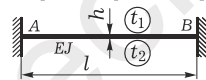

Если найденное перемещение положительное, то оно совпадает с направлением приложенного единичного усилия, если отрицательно – противоположно ему.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б
(справочное)

**Эпюры изгибающих моментов и реакции опор
в отдельных изогнутых стержнях**

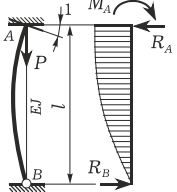
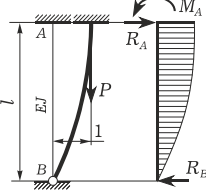
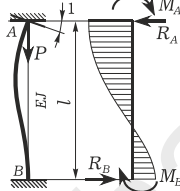
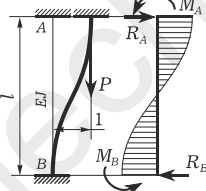
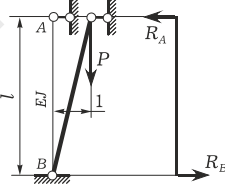
Расчетная схема стержня	Эпюра изгибающих моментов и реакции	Значения моментов и реакций
<p>1</p>		$R_A = R_B = \frac{3EJ}{l^2};$ $M_A = \frac{3EJ}{l}$
<p>2</p>		$R_A = R_B = \frac{3EJ}{l^3};$ $M_A = \frac{3EJ}{l^2}$
<p>3</p>		$R_A = \frac{Pb}{2l^3}(3l^2 - b^2); R_B = \frac{Pa^2}{2l^3}(3l - a);$ $M_A = \frac{Pb}{2l^2}(l^2 - b^2); M_C = \frac{Pa^2b}{2l^3}(3l - a)$
<p>4</p>		$R_A = \frac{11}{16}P; R_B = \frac{5}{16}P;$ $M_A = \frac{3}{16}Pl; M_C = \frac{5}{32}Pl$
<p>5</p>		$R_A = \frac{4}{3}P; R_B = \frac{2}{3}P;$ $M_A = \frac{1}{3}Pl; M_C = \frac{1}{9}Pl; M_D = \frac{2}{9}Pl$
<p>6</p>		$R_A = \frac{41}{32}P; R_B = \frac{23}{32}P;$ $M_A = \frac{9}{32}Pl; M_C = \frac{5}{128}Pl; M_D = \frac{23}{128}Pl$
<p>7</p>		$R_A = \frac{5}{8}ql; R_B = \frac{3}{8}ql;$ $M_A = \frac{1}{8}ql^2; M_C = \frac{1}{16}ql^2$
<p>8 Неравномерный нагрев</p>		$R_A = R_B = \frac{3EJ\alpha\Delta t}{2hl};$ $M_A = \frac{3EJ\alpha\Delta t}{2h}; \Delta t = t_1 - t_2$ $(t_1 > t_2)$

Окончание приложения В

Расчетная схема стержня	Эпора изгибающих моментов и реакции	Значения моментов и реакций
9 		$R_A = R_B = \frac{6EJ}{l^2};$ $M_A = \frac{4EJ}{l}; M_B = \frac{2EJ}{l}$
10 		$R_A = R_B = \frac{12EJ}{l^2};$ $M_A = M_B = \frac{6EJ}{l^2}$
11 		$R_A = \frac{Pb^2}{l^3}(l + 2a); R_B = \frac{Pa^2}{l^3}(l + 2b);$ $M_A = \frac{Pab^2}{l^2}; M_B = \frac{Pa^2b}{l^2}; M_C = \frac{2Pa^2b^2}{l^3}$
12 		$R_A = R_B = \frac{P}{2};$ $M_A = M_B = M_C = \frac{Pl}{8}$
13 		$R_A = R_B = P;$ $M_A = M_B = \frac{2}{9}Pl; M_C = M_D = \frac{1}{9}Pl$
14 		$R_A = R_B = P;$ $M_A = M_B = \frac{3}{16}Pl; M_C = M_D = \frac{1}{16}Pl$
15 		$R_A = R_B = \frac{1}{2}ql;$ $M_A = M_B = \frac{1}{12}ql^2; M_C = \frac{1}{24}ql^2$
16 Неравномерный нагрев 		$R_A = R_B = 0;$ $M_A = \frac{EJ\alpha\Delta t}{h}; \Delta t = t_1 - t_2$ $(t_1 > t_2)$

ПРИЛОЖЕНИЕ В
(справочное)

**Эпюры изгибающих моментов и реакции опор
в отдельных сжато-изогнутых стержнях**

Расчетная схема стержня	Значение моментов и реакций	Функции профессора А. Ф. Смирнова
<p>1</p> 	$R_A = R_B = \frac{3EJ}{l^2} \varphi_1(\nu);$ $M_A = \frac{3EJ}{l} \varphi_1(\nu)$	<p>Параметр сжатого стержня</p> $\nu = l \sqrt{\frac{P}{EJ}}$
<p>2</p> 	$R_A = R_B = \frac{3EJ}{l^3} \eta_1(\nu);$ $M_A = \frac{3EJ}{l^2} \varphi_1(\nu)$	$\varphi_1(\nu) = \frac{\nu^2}{3(1 - \nu/\operatorname{tg} \nu)};$ $\varphi_2(\nu) = \frac{1 - \nu/\operatorname{tg} \nu}{4 \left(\frac{\operatorname{tg}(0,5\nu)}{0,5\nu} - 1 \right)};$
<p>3</p> 	$R_A = R_B = \frac{6EJ}{l^2} \eta_3(\nu);$ $M_A = \frac{4EJ}{l} \varphi_2(\nu);$ $M_B = \frac{2EJ}{l} \varphi_3(\nu)$	$\varphi_3(\nu) = \frac{\nu/\sin \nu - 1}{2 \left(\frac{\operatorname{tg}(0,5\nu)}{0,5\nu} - 1 \right)};$ $\varphi_4(\nu) = \varphi_1(\nu/2);$
<p>4</p> 	$R_A = R_B = \frac{12EJ}{l^3} \eta_2(\nu);$ $M_A = M_B = \frac{6EJ}{l^2} \varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu) = \varphi_1(\nu) - \frac{\nu^2}{3};$
<p>5</p> 	$R_A = R_B = \frac{EJ}{l^3} \nu^2$	$\eta_2(\nu) = \eta_1(\nu/2) = \varphi_4(\nu) - \frac{\nu^2}{12}$

Функции профессора А. Ф. Смирнова

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,05	0,9998	0,9999	1,0000	1,0000	0,9990	0,9997
0,10	0,9993	0,9997	1,0002	0,9998	0,9960	0,9990
0,15	0,9985	0,9992	1,0004	0,9996	0,9910	0,9977
0,20	0,9973	0,9987	1,0007	0,9993	0,9840	0,9960
0,25	0,9958	0,9979	1,0010	0,9990	0,9750	0,9937
0,30	0,9940	0,9970	1,0015	0,9985	0,9640	0,9910
0,35	0,9918	0,9959	1,0020	0,9980	0,9510	0,9877
0,40	0,9893	0,9947	1,0027	0,9973	0,9360	0,9840
0,45	0,9864	0,9932	1,0034	0,9966	0,9189	0,9797
0,50	0,9832	0,9916	1,0042	0,9958	0,8999	0,9750
0,55	0,9797	0,9899	1,0051	0,9949	0,8788	0,9697
0,60	0,9757	0,9879	1,0061	0,9940	0,8557	0,9640
0,65	0,9715	0,9858	1,0071	0,9929	0,8307	0,9577
0,70	0,9669	0,9836	1,0083	0,9918	0,8035	0,9510
0,75	0,9619	0,9811	1,0095	0,9906	0,7744	0,9437
0,80	0,9565	0,9785	1,0109	0,9893	0,7432	0,9360
0,85	0,9508	0,9757	1,0123	0,9879	0,7100	0,9277
0,90	0,9447	0,9727	1,0138	0,9864	0,6747	0,9189
0,95	0,9382	0,9696	1,0155	0,9849	0,6374	0,9097
1,00	0,9313	0,9662	1,0172	0,9832	0,5980	0,8999
1,05	0,9241	0,9627	1,0190	0,9815	0,5566	0,8896
1,10	0,9164	0,9590	1,0209	0,9797	0,5131	0,8788
1,15	0,9083	0,9551	1,0230	0,9777	0,4675	0,8675
1,20	0,8998	0,9511	1,0251	0,9757	0,4198	0,8557
1,25	0,8908	0,9468	1,0274	0,9737	0,3700	0,8435
1,30	0,8814	0,9424	1,0297	0,9715	0,3181	0,8307
1,35	0,8716	0,9377	1,0322	0,9692	0,2641	0,8173
1,40	0,8613	0,9329	1,0348	0,9669	0,2080	0,8035
1,45	0,8505	0,9279	1,0375	0,9644	0,1497	0,7892
1,50	0,8393	0,9227	1,0403	0,9619	0,0893	0,7744
1,55	0,8275	0,9173	1,0432	0,9593	0,0267	0,7590
1,60	0,8152	0,9116	1,0463	0,9565	-0,0381	0,7432
1,65	0,8024	0,9058	1,0495	0,9537	-0,1051	0,7268
1,70	0,7891	0,8998	1,0529	0,9508	-0,1743	0,7100
1,75	0,7751	0,8935	1,0563	0,9478	-0,2457	0,6926
1,80	0,7606	0,8871	1,0600	0,9447	-0,3194	0,6747
1,85	0,7455	0,8804	1,0637	0,9415	-0,3954	0,6563
1,90	0,7297	0,8735	1,0676	0,9382	-0,4736	0,6374
1,95	0,7133	0,8664	1,0717	0,9348	-0,5542	0,6180
2,00	0,6961	0,8590	1,0760	0,9313	-0,6372	0,5980

Продолжение приложения Г

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
2,05	0,6783	0,8514	1,0804	0,9278	-0,7225	0,5775
2,10	0,6597	0,8436	1,0849	0,9241	-0,8103	0,5566
2,15	0,6404	0,8356	1,0897	0,9203	-0,9005	0,5351
2,20	0,6202	0,8273	1,0946	0,9164	-0,9931	0,5131
2,25	0,5991	0,8187	1,0998	0,9124	-1,0884	0,4905
2,30	0,5772	0,8099	1,1051	0,9083	-1,1861	0,4675
2,35	0,5543	0,8008	1,1106	0,9041	-1,2865	0,4439
2,40	0,5304	0,7915	1,1164	0,8998	-1,3896	0,4198
2,45	0,5054	0,7819	1,1224	0,8954	-1,4954	0,3952
2,50	0,4793	0,7720	1,1286	0,8908	-1,6040	0,3700
2,55	0,4520	0,7618	1,1350	0,8862	-1,7155	0,3443
2,60	0,4234	0,7513	1,1417	0,8814	-1,8299	0,3181
2,65	0,3935	0,7405	1,1487	0,8766	-1,9474	0,2914
2,70	0,3621	0,7295	1,1559	0,8716	-2,0679	0,2641
2,75	0,3291	0,7181	1,1634	0,8665	-2,1917	0,2363
2,80	0,2944	0,7064	1,1712	0,8613	-2,3189	0,2080
2,85	0,2580	0,6943	1,1794	0,8560	-2,4495	0,1791
2,90	0,2195	0,6819	1,1878	0,8505	-2,5838	0,1497
2,95	0,1790	0,6692	1,1966	0,8450	-2,7219	0,1198
3,00	0,1361	0,6560	1,2057	0,8393	-2,8639	0,0893
3,05	0,0907	0,6426	1,2152	0,8335	-3,0102	0,0582
3,10	0,0424	0,6287	1,2251	0,8275	-3,1609	0,0267
π	0	0,6168	1,2336	0,8224	-3,2898	0
3,15	-0,0089	0,6144	1,2355	0,8214	-3,3164	-0,0054
3,20	-0,0635	0,5997	1,2462	0,8152	-3,4769	-0,0381
3,25	-0,1220	0,5846	1,2574	0,8089	-3,6428	-0,0713
3,30	-0,1847	0,5691	1,2691	0,8024	-3,8147	-0,1051
3,35	-0,2521	0,5531	1,2813	0,7958	-3,9929	-0,1394
3,40	-0,3248	0,5366	1,2940	0,7891	-4,1781	-0,1743
3,45	-0,4036	0,5196	1,3073	0,7822	-4,3711	-0,2097
3,50	-0,4894	0,5021	1,3212	0,7751	-4,5727	-0,2457
3,55	-0,5832	0,4841	1,3357	0,7679	-4,7840	-0,2823
3,60	-0,6862	0,4655	1,3509	0,7606	-5,0062	-0,3194
3,65	-0,8002	0,4463	1,3667	0,7531	-5,2410	-0,3571
3,70	-0,9270	0,4265	1,3834	0,7455	-5,4904	-0,3954
3,75	-1,0693	0,4061	1,4008	0,7377	-5,7568	-0,4342
3,80	-1,2303	0,3850	1,4191	0,7297	-6,0436	-0,4736
3,85	-1,4142	0,3632	1,4383	0,7216	-6,3551	-0,5137
3,90	-1,6269	0,3407	1,4584	0,7133	-6,6969	-0,5542
3,95	-1,8760	0,3174	1,4796	0,7048	-7,0768	-0,5954
4,00	-2,1726	0,2933	1,5019	0,6961	-7,5060	-0,6372
4,05	-2,5327	0,2683	1,5253	0,6873	-8,0002	-0,6796
4,10	-2,9802	0,2424	1,5501	0,6783	-8,5836	-0,7225
4,15	-3,5532	0,2156	1,5761	0,6691	-9,2940	-0,7661

Окончание приложения Г

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
4,20	-4,3156	0,1878	1,6037	0,6597	-10,1956	-0,8103
4,25	-5,3838	0,1588	1,6328	0,6501	-11,4047	-0,8551
4,30	-6,9947	0,1287	1,6636	0,6404	-13,1581	-0,9005
4,35	-9,7154	0,0974	1,6963	0,6304	-16,0229	-0,9465
4,40	-15,3271	0,0648	1,7310	0,6202	-21,7805	-0,9931
4,45	-33,8181	0,0308	1,7678	0,6098	-40,4189	-1,0404
4,50	-	-0,0048	1,8070	0,5991	-	-1,0884
4,55	-	-0,0419	1,8487	0,5883	-	-1,1369
4,60	-	-0,0809	1,8933	0,5772	-	-1,1861
4,65	-	-0,1217	1,9409	0,5659	-	-1,2360
4,70	-	-0,1645	1,9920	0,5543	-	-1,2865
1,5 π	-	-0,1755	2,0052	0,5514	-	-1,2992
4,75	-	-0,2097	2,0467	0,5425	-	-1,3377
4,80	-	-0,2572	2,1056	0,5304	-	-1,3896
4,85	-	-0,3075	2,1690	0,5180	-	-1,4422
4,90	-	-0,3607	2,2375	0,5054	-	-1,4954
4,95	-	-0,4171	2,3117	0,4925	-	-1,5494
5,00	-	-0,4772	2,3923	0,4793	-	-1,6040
5,05	-	-0,5413	2,4799	0,4658	-	-1,6594
5,10	-	-0,6099	2,5757	0,4520	-	-1,7155
5,15	-	-0,6835	2,6806	0,4379	-	-1,7723
5,20	-	-0,7629	2,7960	0,4234	-	-1,8299
5,25	-	-0,8488	2,9235	0,4086	-	-1,8883
5,30	-	-0,9422	3,0648	0,3935	-	-1,9474
5,35	-	-1,0442	3,2224	0,3780	-	-2,0073
5,40	-	-1,1563	3,3989	0,3621	-	-2,0679
5,45	-	-1,2802	3,5978	0,3458	-	-2,1294
5,50	-	-1,4182	3,8236	0,3291	-	-2,1917
5,55	-	-1,5729	4,0817	0,3120	-	-2,2549
5,60	-	-1,7481	4,3794	0,2944	-	-2,3189
5,65	-	-1,9484	4,7262	0,2764	-	-2,3838
5,70	-	-2,1803	5,1346	0,2580	-	-2,4495
5,75	-	-2,4526	5,6223	0,2390	-	-2,5162
5,80	-	-2,7777	6,2139	0,2195	-	-2,5838
5,85	-	-3,1735	6,9457	0,1995	-	-2,6523
5,90	-	-3,6679	7,8727	0,1790	-	-2,7219
5,95	-	-4,3047	9,0830	0,1578	-	-2,7924
6,00	-	-5,1594	10,7270	0,1361	-	-2,8639
6,05	-	-6,3716	13,0842	0,1137	-	-2,9365
6,10	-	-8,2336	16,7392	0,0907	-	-3,0102
6,15	-	-11,4768	23,1544	0,0669	-	-3,0850
6,20	-	-18,5905	37,3084	0,0424	-	-3,1609
6,25	-	-47,0669	94,1853	0,0172	-	-3,2380
2 π	-	$-\infty$	$+\infty$	0	-	-3,2899

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1 ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ	4
1.1 Определения	4
1.2 Число степеней свободы при расчете на устойчивость	8
1.3 Методы расчета на устойчивость	10
Контрольные вопросы	14
2 УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ	15
2.1 Задача Эйлера	15
2.2 Критическая сила при различных закреплениях стержня	17
2.3 Расчеты стержневых систем с упругими опорами	22
Контрольные вопросы	32
3 РАСЧЕТЫ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ НА УСТОЙЧИВОСТЬ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ	33
3.1 Гипотезы метода перемещений	33
3.2 Последовательность расчета методом перемещений	34
3.3 Использование симметрии	55
Контрольные вопросы	56
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	57
ПРИЛОЖЕНИЕ А Вычисление перемещений методом Максвелла – Мора	58
ПРИЛОЖЕНИЕ Б Эпюры изгибающих моментов и реакции опор в отдельных изогнутых стержнях	61
ПРИЛОЖЕНИЕ В Эпюры изгибающих моментов и реакции опор в отдельных сжато-изогнутых стержнях	63
ПРИЛОЖЕНИЕ Г Функции профессора А. Ф. Смирнова	64

Учебное издание

ЛЕОНЕНКО Денис Владимирович

РАСЧЕТ БАЛОК И РАМ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Пособие

Редактор *Е. Г. Привалова*

Технический редактор *В. Н. Кучерова*

Подписано в печать 04.03.2026 г. Формат 60×84 ¹/₁₆.
Бумага офсетная. Гарнитура SchoolBook. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 3,95. Уч.-изд. л. 3,52. Тираж 100 экз.
Зак. № 349. Изд. № 1.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский государственный университет транспорта.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий
№ 1/361 от 13.06.2014.
№ 2/104 от 01.04.2014.
№ 3/1583 от 14.11.2017.
Ул. Кирова, 34, 246653, Гомель