$$\left\{\begin{matrix}\chi_r(r,\tau)\\ \vartheta(r,\tau)\\ H_r(r,\tau)\end{matrix}\right\} = \sum_{k=1}^{N+3}\int_0^R\int_0^\tau \left\{\begin{matrix}G_{1k}(r,\xi,\tau-t)\\ G_{2k}(r,\xi,\tau-t)\\ G_{q+3,k}(r,\xi,\tau-t)\end{matrix}\right\} f_k(\xi,t)\,dt\,d\xi.$$

Здесь $G_{mk}(r,\xi,\tau)$ – поверхностные функции Грина, а функции $f_k(r,\tau)$, задающие поверхностные возмущения, в соответствии с (1) имеют вид

$$f_1(r,\tau)=-\frac{12}{h^3}m_r,\ f_2(r,\tau)=\frac{q}{h},\ f_3(r,\tau)=\frac{12}{h^3}\rho q_J,\ f_{q+3}(r,\tau)=\frac{12}{h^3}z^{(q)}.$$

Для нахождения поверхностных функций Грина используются метод эквивалентных граничных условий [1], а также разложения в ряды Фурье по собственным функциям термоупругодиффузионного оператора и преобразование Лапласа по времени, что позволяет свести исходную задачу к системе линейных алгебраических уравнений. После решения этой системы, переход в пространство оригиналов осуществляется с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления.

Таким образом, предложена модель, позволяющая исследовать взаимодействие температурного, механического и диффузионного полей в деформируемой круглой пластине и оценить влияние связанности полей на напряженно-деформированное состояние тонкостенных конструкций и их отдельных элементов.

Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ им. М. В. Ломоносова.

Список литературы

1 **Земсков А. В.** Моделирование механодиффузионных процессов в многокомпонентных телах с плоскими границами / А. В. Земсков, Д. В. Тарлаковский. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2021. – 288 с.

УДК 539.3

СМЕШАННАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА ИЕРАРХИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОБОБЩЕННО-ПОЛОГИХ НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧАМ СТАТИКИ УПЛОЩЕННЫХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

П. С. ЗЯБКОВ
Институт прикладной механики Российской академии наук, г. Москва
Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Российская Федерация

С. И. ЖАВОРОНОК
Институт прикладной механики Российской академии наук, г. Москва

В общем и транспортном машиностроении многие элементы различного назначения представляют собой уплощенные тела вращения. Математической моделью такого объекта является круглая пластина переменной толщины или тонкая оболочка с пологой срединной поверхностью. При действии локализованных в пространстве полей внешних сил, локальных кинематических связях, а также в случае существенно переменной толщины напряженное состояние такого элемента описывается канонической теорией Лява или сдвиговой теорией первого порядка с большой погрешностью, т. е. для обеспечения точности практических расчетов требуется трехмерное конечно-элементное моделирование, а для качественного анализа – теории оболочек повышенного порядка и, кроме того, формулировки краевых задач, допускающие применение специальных методов построения аналитического решения. Одним из таких подходов является т. н. симплектический метод, основанный на представлении разрешающих уравнений в гамильтоновой нормальной форме [1]. Предложена новая смешанная вариационная формулировка иерархической теории N-го порядка обобщенно-пологих упругих неоднородных ортотропных оболочек, обеспечивающей приближение трехмерного напряженно-деформированного состояния в областях неприводимости [2] по норме гильбертова пространства. Дано определение обобщенно-пологой оболочки как трехмерного тела, ограниченного кусочно-гладкой боковой поверхностью и двумя непересекающимися гладкими лицевыми поверхностями, допускающими однозначную координацию в системе, нормально связанной с плоскостью в смысле [2]. Модель оболочки N-го порядка строится на основе вариационного формализма аналитической механики континуальных систем [3] путем редукции пространственной размерности трехмерной краевой задачи механики деформируемого твердого тела [4–6]. На первом этапе решения проблемы приведения модель оболочки описывается конфигурационным пространством с одной переменной поля – вектором перемещения, граничной и пространственной плотностью функционала Лагранжа, зависящей от переменной поля и ее градиента [7, 8]. Построены линейные кинематические соотношения для обобщенно-пологой оболочки. На реперной плоскости выбрано одно семейство координатных линий, рассматриваемое далее как основное (в задачах для тел вращения – как правило, связанное с радиальной координатой). Дифференцированием пространственной плотности функционала Лагранжа по ковариантным производным компонентов вектора перемещения, вычисляемым вдоль выбранного направления, определены обобщенные напряжения на площадках, ортогональных выбранному направлению, энергетически сопряженные компонентам градиента перемещения [7, 8]. Выполнено преобразование Лежандра функционала Лагранжа по сопряженным парам кинематических и силовых величин и получены выражения пространственной и граничной плотностей нового вариационного функционала, не зависящие от указанных ковариантных производных [7–9]. Осуществлено разложение неизвестных компонентов по некоторой биортогональной системе базисных функций безразмерной нормальной координаты; компоненты вектора перемещения заданы коэффициентами разложения (переменными поля двумерной системы), компоненты вектора напряжения – моментами относительно базисной системы функций (обобщенными усилиями) [8, 9], линейная оболочка которых образует пространство состояний системы. При учете разложений неизвестных из пространственной и граничной плотности смешанного функционала следуют поверхностная и контурная плотности, не зависящие от ковариантных производных обобщенных перемещений и обобщенных сил вдоль выбранного координатного направления. Полученный функционал трактуется как обобщенный функционал Рауса двумерной континуальной системы по аналогии с функцией Рауса в классической аналитической динамике. Условиями экстремали, соответствующими принципу Лагранжа, являются обобщенные уравнения Рауса, разрешенные относительно ковариантных производных первого порядка вдоль выбранного координатного направления, и их естественные краевые условия. Рассмотрен случай обобщенно-пологой оболочки вращения линзовидной формы на круглом плане, допускающий разложение неизвестных переменных поля и обобщенных сил в тригонометрические ряды по угловой координате и приведение уравнений Рауса к нормальной гамильтоновой системе обыкновенных дифференциальных уравнений с антисимметрической матрицей. Получено решение спектральной задачи, вычислены собственные функции радиальной координаты. Предложенный метод позволяет строить аналитические решения краевых задач теории N-го порядка, сводящихся к обыкновенным дифференциальным уравнениям типа [10, 11].

Работа выполнена в рамках Государственного задания ФГБУН ИПРИМ РАН (№ гос. регистрации темы 1023032300192-8-2.3).

Список литературы

1 **Lim, C. W.** Symplectic elasticity: Theory and Applications / C. W. Lim, X. S. Xu // ASME Applied Mechanics Reviews. – 2010. – Vol. 63. – P. 050802.

2 **Кильчевский, Н. А.** Основы аналитической механики оболочек / Н. А. Кильчевский. – Киев : Изд-во АН УССР, 1963. – 354 с.

3 **Векуа, И. Н.** Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек / И. Н. Векуа. – М. : Наука, 1982. – 282 с.

4 **Кильчевский, Н. А.** Аналитическая механика континуальных систем / Н. А. Кильчевский, Г. А. Кильчинская, Н. Е. Ткаченко. – Киев : Наук. думка, 1979. – 188 с.

5 **Жаворонок, С. И.** Вариационные уравнения трехмерной теории анизотропных оболочек / С. И. Жаворонок // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. – 2011. – № 4. – Ч. 5. – С. 2153–2155.

6 **Жаворонок, С. И.** Обобщенные уравнения Лагранжа второго рода трехмерной теории анизотропных оболочек / С. И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т. 17, № 1. – С. 116–132.

7 **Zhavoronok, S. I.** The Generalized Routh equations in the plate theory of Nth order and their use in problems of normal wave dispersion in heterogeneous waveguides / S. I. Zhavoronok, A. S. Kurbatov, L. N. Rabinskii // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 43, № 7. – P. 66–74.

8 **Жаворонок, С. И.** Обобщенные уравнения Рауса в теории пластин N-го порядка и их приложение к задачам о дисперсии нормальных волн в неоднородных волноводах / С. И. Жаворонок, А. С. Курбатов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2022. – Т. 28, № 3. – С. 399–431.

9 **Zhavoronok, S. I.** On various equations of the analytical mechanics of thick-walled heterogeneous shells and some of their applications in wave dispersion problems / S. I. Zhavoronok, A. S. Kurbatov, O. V. Egorova // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2023. – Vol. 44, № 6. – P. 2501–2517.

10 **Амосов, А. А.** К проблеме редукции плоской задачи теории упругости к последовательности одномерных краевых задач / А. А. Амосов, С. И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1997. – Т. 3, № 1. – С. 69–80.

11 **Амосов, А. А.** О решении некоторых краевых задач о плоском напряженном состоянии криволинейной трапеции / А. А. Амосов, А. А. Князев, С. И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1999. – Т. 5, № 1. – С. 60–72.

УДК 531.15

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КРИВОШИПНОГО МНОГОЗВЕННОГО МЕХАНИЗМА ГРАФИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

А. С. ИВАНОВ, Д. П. РЕЙФШНЕЙДЕР, Е. В. ФАЛЬКОВА
Сибирский государственный университет науки и технологий им. академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, Российская Федерация

Механика исследует фундаментальные формы движения материи, которые сводятся к пространственно-временному перемещению тел или их частиц. Теоретическая механика сосредоточена на изучении общих законов, описывающих движение материальных точек и их систем, формируя основу для прикладных механических дисциплин. Последние, в свою очередь, используют методы и выводы теоретической механики для решения практических задач.

В рамках курса теоретической механики выделяют три раздела: статику (равновесие тел), кинематику (движение без учета сил) и динамику (влияние сил на движение). Такое разделение упрощает анализ сложных механических систем. Особенность курса данной дисциплины заключается в том, что ознакомление студентов с инженерной деятельностью осуществляется на примерах решения практико-ориентированных задач. Для развития профессиональных компетенций студентов весьма полезным, в частности, оказывается анализ работы механизмов графическими методами, позволяющими визуализировать кинематику и динамику системы [1].

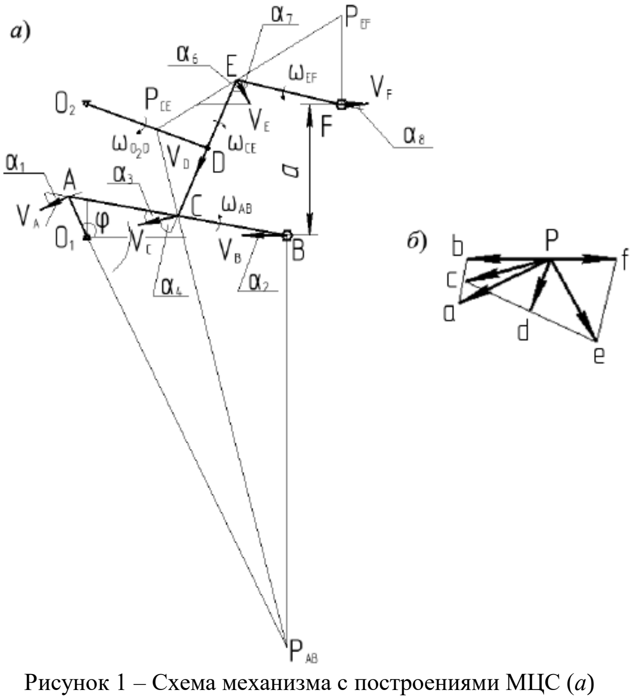

Рисунок 1 – Схема механизма с построениями МЦС (*а*) и план скоростей (*б*)

В качестве примера рассмотрим изображенный на рисунке 1, *а* многозвенный механизм, в котором кривошип O_1A вращается с постоянной угловой скоростью ω_{O_1A} = 2 рад/с, и в данный момент времени его положение определяется углом φ = 115°. Размеры, определяющие кинематику механизма, см: O_1A = 15; AB = 78; BC = 39; CD = 26; O_2D = 45; CE = 52; EF = 38; a = 46 [2, 3].

Нахождение скоростей точек и угловых скоростей звеньев механизма с помощью мгновенных центров скоростей (МЦС) [2]. Вначале вычислим модуль скорости точки A кривошипа O_1A:

$$v_A = \omega_{O_1A} O_1A = 2 \cdot 15 = 30 \text{ см/с}.$$

Этот вектор перпендикулярен кривошипу O_1A и направлен в сторону вращения кривошипа.

Для определения положения МЦС звена AB (P_{AB}) надо найти точку пересечения перпендикуляров, восстановленных из точек A и B к направлениям их скоростей (см. рисунок 1, *а*). Тем же способом могут быть найдены положения МЦС звеньев CE (P_{CE}) и EF (P_{EF}). Скорости v точек звена AB определяются из условия их пропорциональности расстояниям до мгновенных центров скоростей, которое одновременно позволяет найти угловую скорость:

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_{AB}} = \frac{v_B}{BP_{AB}} = \frac{v_C}{CP_{AB}}.$$