ме линейных алгебраических уравнений. Оригиналы по Лапласу, полученные из этой системы решений, находятся с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления.

Таким образом, предложена модель, позволяющая исследовать взаимодействие температурного, механического и диффузионного полей в деформируемых цилиндрических телах и оценить влияние связанности полей на напряженно-деформированное состояние конструкций и их отдельных элементов. Было проведено несколько численных экспериментов для иллюстрации эффектов связанности механического, температурного и диффузионных полей.

Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ им. М. В. Ломоносова.

Список литературы

1 **Зверев, Н. А.** Постановка одномерной нестационарной задачи термомеханодиффузии для цилиндрических тел с учетом релаксации диффузионных и тепловых процессов / Н. А. Зверев, А. В. Земсков // Инновационное развитие транспортного и строительного комплексов : материалы Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 70-летию БелИИЖТа – БелГУТа (Гомель, 16–17 ноября 2023 г.) : в 2 ч. Ч. 2 / М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Бел. ж. д., Белорус. гос. ун-т трансп. ; под общ. ред. Ю. И. Кулаженко. – Гомель : БелГУТ, 2023. – С. 88–90.

2 **Зверев, Н. А.** Моделирование механодиффузионных процессов в полом цилиндре, находящемся под действием нестационарных объемных возмущений / Н. А. Зверев, А. В. Земсков, В. М. Яганов // Чебышевский сборник. – 2024. – Вып. 2. – Т. 25. – С. 296–317. – DOI: 10.22405/2226-8383-2024-25-2-296-317.

3 **Земсков, А. В.** Моделирование механодиффузионных процессов в многокомпонентных телах с плоскими границами / А. В. Земсков, Д. В. Тарлаковский. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2021. – 288 с.

УДК 539.3, 539.8

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕРМОМЕХАНОДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЕ ТИМОШЕНКО

А. В. ЗЕМСКОВ
Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация
НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация

Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ
НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация
Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация

Рассматривается круглая, шарнирно опертая по краю пластина Тимошенко радиуса R, выполненная из многокомпонентного материала, в которой под действием приложенной механической нагрузки (рисунок 1) происходит деформационный нагрев и возникает восходящий диффузионный поток, т. е. перераспределение концентрации компонентов материала под действием упругой деформации. Тепломассоперенос, вследствие вызываемых им объемных изменений, также влияет на напряженно-деформированное состояние пластины. При этом учитываются релаксационные эффекты, которые обусловливают конечную скорость распространения тепловых и диффузионных возмущений.

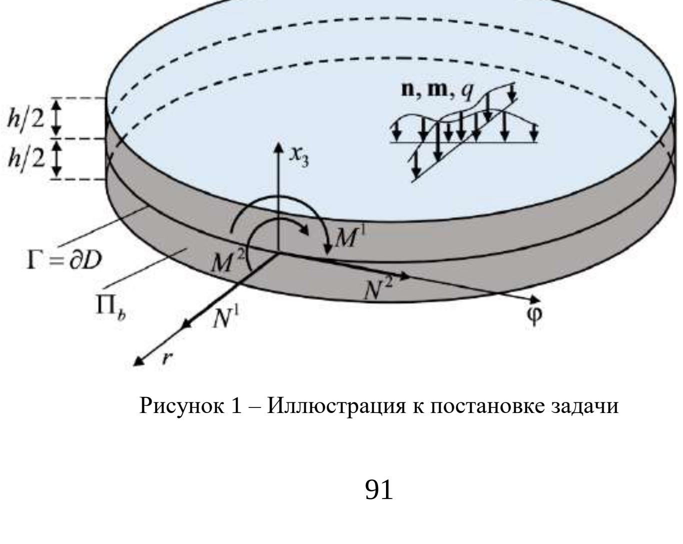

Рисунок 1 – Иллюстрация к постановке задачи

Для математической постановки задачи используется система уравнений поперечных колебаний пластины, полученная из общей модели термомеханодиффузии для сплошных сред [1] с помощью обобщенного принципа виртуальных перемещений, с применением гипотез теории Тимошенко:

$$\rho\ddot{\chi}_r = C_{11}\left(\frac{\partial^2\chi_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\chi_r}{\partial r}-\frac{\chi_r}{r^2}\right)+\frac{12k_T^2}{h^2}C_{44}\left(\frac{\partial w}{\partial r}-\chi_r\right)+b_1\frac{\partial\vartheta}{\partial r}+\sum_{p=1}^{N}\alpha_1^{(p)}\frac{\partial H_p}{\partial r}-\frac{12}{h^3}m_r,$$
$$\rho\ddot{w}=k_T^2C_{44}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{\partial\chi_r}{\partial r}-\frac{\chi_r}{r}\right)+\frac{q}{h},$$
$$\sum_{k=0}^{M}\frac{\tau_0^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left[\rho c_0\dot{\vartheta}+\sum_{p=1}^{N}\upsilon^{(q)}\dot{H}_p-T_0b_1\left(\frac{\partial\dot{\chi}_r}{\partial r}+\frac{\dot{\chi}_r}{r}\right)\right]=\kappa_1\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\right)+\frac{12}{h^3}\rho q_J, \quad (1)$$
$$\sum_{k=0}^{K}\frac{\tau_q^k}{k!}\frac{\partial^k\dot{H}_q}{\partial t^k}=D_1^{(q)}\left(\frac{\partial^2 H_q}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial H_q}{\partial r}\right)+\tilde{D}_1^{(q)}\alpha_1^{(q)}\left(\frac{\partial^3\chi_r}{\partial r^3}+\frac{2}{r}\frac{\partial^2\chi_r}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\chi_r}{\partial r}+\frac{\chi_r}{r^3}\right)-$$
$$-M_1^{(q)}\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\right)+\frac{12}{h^3}z^{(q)},\ H_{N+1}=-\sum_{p=1}^{N}H_p.$$

Здесь r – радиальная координата; w – прогибы пластины; χ_i – углы поворота нормальных к срединной поверхности волокон; l – характерный линейный размер; h – толщина пластины; $\eta^{(q)}=x_3H_q=n^{(q)}-n_0^{(q)}$ – приращение концентрации q-й компоненты вещества в составе N+1-компонентной среды; $n_0^{(q)}$ – начальная концентрация q-го вещества; H_q – поверхностная плотность приращения концентрации q-го вещества; C_{ij}^* – упругие постоянные; ρ – плотность; $\alpha_i^{(q)}$ – коэффициенты, характеризующие объёмное изменение среды за счет диффузии; $D_i^{(q)}$ – коэффициенты диффузии; R – универсальная газовая постоянная; $\theta=x_3\vartheta=T-T_0$, ϑ – поверхностная плотность приращения температуры; T – актуальная температура среды; T_0 – начальная температура среды; b_i – коэффициенты, характеризующие тепловое расширение; $m^{(q)}$ – молярная масса q-го вещества; τ_0 – время релаксации теплового потока; τ_q ($q=\overline{1,N}$) – времена релаксации диффузионных потоков; m_r – распределенный по поверхности изгибающий момент; q – распределенная по поверхности поперечная нагрузка; q_J – поверхностные источники тепла; $z^{(q)}$ – распределенная по поверхности плотность объемных источников массопереноса; k_T – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по сечению пластины; c_0 – удельная теплоёмкость; κ_i – коэффициенты теплопроводности; $\gamma^{(q)}$ – коэффициент активации. Коэффициенты $M_1^{(q)}$ и $\upsilon^{(q)}$ определяются следующим образом:

$$M_1^{(q)}=\frac{D_1^{(q)}n_0^{(q)}\ln\left(n_0^{(q)}\gamma^{(q)}\right)}{T_0},\ \upsilon^{(q)}=\frac{\rho RT_0\ln\left(n_0^{(q)}\gamma^{(q)}\right)}{m^{(q)}}.$$

Замыкают постановку однородные начально-краевые условия, которые в случае шарнирного опирания имеют вид

$$w\big|_{r=R}=0,\ H\big|_{r=R}=0,\ \vartheta\big|_{r=R}=0,\ \left.\left(C_{11}\frac{\partial\chi_r}{\partial r}+\frac{C_{11}-2C_{66}}{r}\chi_r+b_1\vartheta+\sum_{p=1}^{N}\alpha_1^{(r)}H_p\right)\right|_{r=R}=0. \quad (2)$$

Полагая, что в начальный момент времени пластина находится в невозмущенном состоянии, начальные условия принимаются нулевыми.

Решение задачи ищется в интегральной форме:

$$\begin{Bmatrix} \chi_r(r,\tau) \\ \vartheta(r,\tau) \\ H_r(r,\tau) \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N+3} \int_0^R \int_0^\tau \begin{Bmatrix} G_{1k}(r,\xi,\tau-t) \\ G_{2k}(r,\xi,\tau-t) \\ G_{q+3,k}(r,\xi,\tau-t) \end{Bmatrix} f_k(\xi,t)\,dt\,d\xi.$$

Здесь $G_{mk}(r,\xi,\tau)$ – поверхностные функции Грина, а функции $f_k(r,\tau)$, задающие поверхностные возмущения, в соответствии с (1) имеют вид

$$f_1(r,\tau) = -\frac{12}{h^3}m_r,\; f_2(r,\tau) = \frac{q}{h},\; f_3(r,\tau) = \frac{12}{h^3}\rho q_J,\; f_{q+3}(r,\tau) = \frac{12}{h^3}z^{(q)}.$$

Для нахождения поверхностных функций Грина используются метод эквивалентных граничных условий [1], а также разложения в ряды Фурье по собственным функциям термоупругодиффузионного оператора и преобразование Лапласа по времени, что позволяет свести исходную задачу к системе линейных алгебраических уравнений. После решения этой системы, переход в пространство оригиналов осуществляется с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления.

Таким образом, предложена модель, позволяющая исследовать взаимодействие температурного, механического и диффузионного полей в деформируемой круглой пластине и оценить влияние связанности полей на напряженно-деформированное состояние тонкостенных конструкций и их отдельных элементов.

Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ им. М. В. Ломоносова.

Список литературы

1 **Земсков А. В.** Моделирование механодиффузионных процессов в многокомпонентных телах с плоскими границами / А. В. Земсков, Д. В. Тарлаковский. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2021. – 288 с.

УДК 539.3

СМЕШАННАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА ИЕРАРХИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОБОБЩЕННО-ПОЛОГИХ НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧАМ СТАТИКИ УПЛОЩЕННЫХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

П. С. ЗЯБКОВ
Институт прикладной механики Российской академии наук, г. Москва
Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Российская Федерация

С. И. ЖАВОРОНОК
Институт прикладной механики Российской академии наук, г. Москва

В общем и транспортном машиностроении многие элементы различного назначения представляют собой уплощенные тела вращения. Математической моделью такого объекта является круглая пластина переменной толщины или тонкая оболочка с пологой срединной поверхностью. При действии локализованных в пространстве полей внешних сил, локальных кинематических связях, а также в случае существенно переменной толщины напряженное состояние такого элемента описывается канонической теорией Лява или сдвиговой теорией первого порядка с большой погрешностью, т. е. для обеспечения точности практических расчетов требуется трехмерное конечно-элементное моделирование, а для качественного анализа – теории оболочек повышенного порядка и, кроме того, формулировки краевых задач, допускающие применение специальных методов построения аналитического решения. Одним из таких подходов является т. н. симплектический метод, основанный на представлении разрешающих уравнений в гамильтоновой нормальной форме [1]. Предложена новая смешанная вариационная формулировка иерархической теории N-го порядка обобщенно-пологих упругих неоднородных ортотропных оболочек, обеспечивающей приближение трехмерного напряженно-деформированного состояния в областях неприводимости [2] по норме гильбертова пространства. Дано определение обобщенно-пологой оболочки как трехмерного тела, ограниченного кусочно-гладкой боковой поверхностью и двумя непересекающимися гладкими лицевыми поверхностями,