

ся в одновременном учёте градиентов совместных и несовместных деформаций, а также введении алгебраической пористости как независимого кинематического параметра. На основе вариационного принципа Лагранжа получена полная система уравнений равновесия и граничных условий, которая охватывает как частные случаи классическую теорию упругости, среду с алгебраической пористостью и различные градиентные теории.

Особое внимание уделено построению прикладных моделей цилиндрического изгиба стержней и пластин. Показано, что традиционный подход, основанный на непосредственном применении гипотез Бернулли или Кирхгофа – Лява, приводит к нефизичному изменению изгибной жёсткости за счёт градиентных поправок. В отличие от этого, разработанная корректная модель исключает указанные недостатки и сохраняет физическую адекватность при стремлении толщины конструкции к нулю. Предложена оригинальная модель типа Тимошенко, учитывающая деформацию сдвига и содержащая независимое уравнение для поля пористости.

Теоретически обосновано, что характерные масштабные параметры, входящие в модель, определяют различные физические эффекты, связанные с градиентными свойствами и дефектной структурой материала. Показано, что в корректной постановке изгибная жёсткость не модифицируется градиентными поправками, что соответствует физическим ожиданиям и экспериментальным данным.

Полученные результаты имеют важное практическое значение для проектирования и расчёта тонкостенных элементов в авиационно-космической технике, микроэлектронике и биомеханике. Предложенные корректные вариационные постановки открывают возможности для разработки эффективных численных методов решения краевых задач. Дальнейшие исследования предполагают экспериментальную верификацию модели, учёт нелинейных эффектов и разработку методов идентификации масштабных параметров для конкретных классов материалов.

*Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (FSFF-2025-0001).*

УДК 539.3,539.8

## **ТЕРМОМЕХАНОДИФФУЗИЯ СПЛОШНОГО ЦИЛИНДРА, НАХОДЯЩЕГОСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ОБЪЁМНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ**

*А. В. ЗЕМСКОВ*

*Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация  
НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация*

*Д. О. КАЗИМИРОВ, А. В. МАЛАШКИН*

*Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация*

Работа посвящена моделированию нестационарных объёмных возмущений в цилиндре. Рассматриваемый эффект возникает под действием механических возмущений на деформируемое тело, что сопровождается появлением тепловых и диффузионных потоков. Эти потоки, в свою очередь, оказывают влияние на напряжённо-деформированное состояние среды. Изучение взаимодействия указанных полей представляет интерес не только с теоретической, но и с практической точки зрения, поскольку подобные цилиндрические тела лежат в основе многих технических систем, включая трубопроводы, нефте- и газопроводы, элементы систем отопления, а также различные валы, втулки и другие конструктивные детали (рисунок 1).

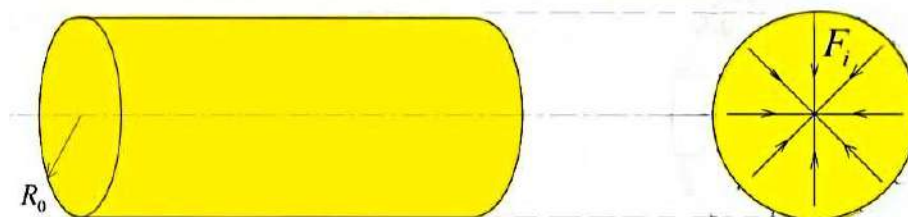


Рисунок 1 – Иллюстрация к постановке задачи

Математическая постановка одномерной задачи термомехано-диффузии для ортотропного многокомпонентного сплошного цилиндра учетом конечной скорости тепло- и массопереноса, находящегося под действием нестационарных механических, тепловых и диффузионных объемных возмущений, описывается следующей системой уравнений [1]:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= c_{11} \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) - b_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial r} - \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \frac{\partial \eta^{(j)}}{\partial r} + F_1, \\ \sum_{k=0}^K \frac{(\tau_\vartheta)^k}{k!} \frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k+1}} \left[ \rho c_0 \vartheta + T_0 b_1 \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) + \rho R T_0 \sum_{j=1}^N \frac{\ln(n_0^{(j)} \gamma^{(j)})}{m^{(j)}} \eta^{(j)} \right] &= \kappa_1 \left( \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) + F_2, \\ \sum_{k=0}^M \frac{(\tau_\eta^{(q)})^k}{k!} \frac{\partial^{k+1} \eta^{(q)}}{\partial t^{k+1}} &= -\Lambda_{11}^{(q)} \left( \frac{\partial^3 u_r}{\partial r^3} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r^3} \right) + D_1^{(q)} \left( \frac{\partial^2 \eta^{(q)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial r} \right) - \\ &\quad - M_1^{(q)} \left( \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) + F_{q+2}. \quad (q = \overline{1, N}). \end{aligned} \quad (1)$$

Замыкают математическую постановку задачи (1) граничные условия. Начальные условия принимаются нулевыми, поскольку изначально цилиндрическое тело находилось в состоянии покоя:

$$u_r \Big|_{t=0} = 0, \quad \dot{u}_r \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial^k \vartheta}{\partial t^k} \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial^m \eta^{(q)}}{\partial t^m} \Big|_{t=0} = 0 \quad (k = \overline{0, K}, \quad m = \overline{0, M}); \quad (2)$$

$$u_r \Big|_{r=R_0} = 0, \quad \kappa_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = 0,$$

$$\left[ \Lambda_{11}^{(q)} \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + M_1^{(q)} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} - D_1^{(q)} \frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial r} \right]_{r=R_0} = 0, \quad (3)$$

В формулах (1)–(3)  $t$  – время;  $r$  – координата;  $u_r$  – радиальная компонента вектора механических перемещений;  $\vartheta$  – изменение (приращение) температуры;  $\rho$  – плотность тела (сплошной среды);  $\eta^{(q)} = n^{(q)} - n_0^{(q)}$  – приращение концентрации многокомпонентного вещества;  $n_0^{(q)}$  и  $n^{(q)}$  – начальная и текущая концентрации  $q$ -го вещества в составе  $N+1$ -компонентной сплошной среды;  $m^{(q)}$  – молярная масса  $q$ -го вещества в составе  $N+1$ -компонентной сплошной среды;  $\vartheta = T - T_0$ , где  $T_0$  – начальная температура сплошной среды;  $T$  – актуальная температура сплошной среды;  $R$  – универсальная газовая постоянная;  $\tau_\eta^{(q)}$  – время релаксации диффузионных потоков;  $\tau_\vartheta$  – время релаксации тепловых потоков;  $\gamma^{(q)}$  – коэффициент активации;  $c_0$  – удельная теплоёмкость;  $c_{ij}$  – упругие постоянные;  $b_1$  – температурные постоянные, характеризующие тепловые деформации;  $D_1^{(q)}$  – коэффициенты диффузии;  $\alpha_1^{(j)}$  – упругодиффузионные коэффициенты, характеризующие деформации, возникающие вследствие диффузии;  $\kappa_1$  – коэффициент теплопроводности;  $R_0$  – радиус цилиндра;  $F_k$  ( $k = \overline{1, N+2}$ ) – объёмные возмущения. Остальные коэффициенты определяются так:

$$\Lambda_{11}^{(q)} = \frac{m^{(q)} n_0^{(q)} D_1^{(q)} \alpha_1^{(q)}}{\rho R T_0}, \quad M_1^{(q)} = \frac{n_0^{(q)} D_1^{(q)}}{T_0} \ln(n_0^{(q)} \gamma^{(q)}).$$

Решение задачи ищется в виде

$$\begin{Bmatrix} u(r, \tau) \\ \vartheta(r, \tau) \\ \eta_q(r, \tau) \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{N+2} \int_0^\tau dt \int_0^{R_0} \begin{Bmatrix} G_{1m}(r, \xi, \tau-t) \\ G_{2m}(r, \xi, \tau-t) \\ G_{q+2,m}(r, \xi, \tau-t) \end{Bmatrix} F_m(\xi, t) d\xi,$$

где  $G_{jm}(r, \xi, \tau)$  – объёмные функции Грина задачи (1)–(3), для нахождения которых используется преобразование Лапласа по времени, разложение в ряды по собственным функциям теплоупруго-диффузионного оператора [2, 3]. Это позволяет свести исходную начально-краевую задачу к систе-

ме линейных алгебраических уравнений. Оригиналы по Лапласу, полученные из этой системы решений, находятся с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления.

Таким образом, предложена модель, позволяющая исследовать взаимодействие температурного, механического и диффузионного полей в деформируемых цилиндрических телах и оценить влияние связанности полей на напряженно-деформированное состояние конструкций и их отдельных элементов. Было проведено несколько численных экспериментов для иллюстрации эффектов связанности механического, температурного и диффузионных полей.

*Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ им. М. В. Ломоносова.*

#### Список литературы

1 **Зверев, Н. А.** Постановка одномерной нестационарной задачи термомехано-dиффузии для цилиндрических тел с учетом релаксации диффузионных и тепловых процессов / Н. А. Зверев, А. В. Земсков // Инновационное развитие транспортного и строительного комплексов : материалы Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 70-летию БелИИЖТа – БелГУТа (Гомель, 16–17 ноября 2023 г.) : в 2 ч. Ч. 2 / М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Бел. ж. д., Белорус. гос. ун-т трансп. ; под общ. ред. Ю. И. Кулаженко. – Гомель : БелГУТ, 2023. – С. 88–90.

2 **Зверев, Н. А.** Моделирование механо-dиффузионных процессов в полом цилиндре, находящемся под действием нестационарных объемных возмущений / Н. А. Зверев, А. В. Земсков, В. М. Яганов // Чебышевский сборник. – 2024. – Вып. 2. – Т. 25. – С. 296–317. – DOI: 10.22405/2226-8383-2024-25-2-296-317.

3 **Земсков, А. В.** Моделирование механо-dиффузионных процессов в многокомпонентных телах с плоскими границами / А. В. Земсков, Д. В. Тарлаковский. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2021. – 288 с.

УДК 539.3, 539.8

## МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕРМОМЕХАНОДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЕ ТИМОШЕНКО

*А. В. ЗЕМСКОВ*

*Московский авиационный институт (НИИ), Российская Федерация  
НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация*

*Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ*

*НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация  
Московский авиационный институт (НИИ), Российская Федерация*

Рассматривается круглая, шарнирно опертая по краю пластина Тимошенко радиуса  $R$ , выполненная из многокомпонентного материала, в которой под действием приложенной механической нагрузки (рисунок 1) происходит деформационный нагрев и возникает восходящий диффузионный поток, т. е. перераспределение концентрации компонентов материала под действием упругой деформации. Тепломассоперенос, вследствие вызываемых им объемных изменений, также влияет на напряженно-деформированное состояние пластины. При этом учитываются релаксационные эффекты, которые обуславливают конечную скорость распространения тепловых и диффузионных возмущений.

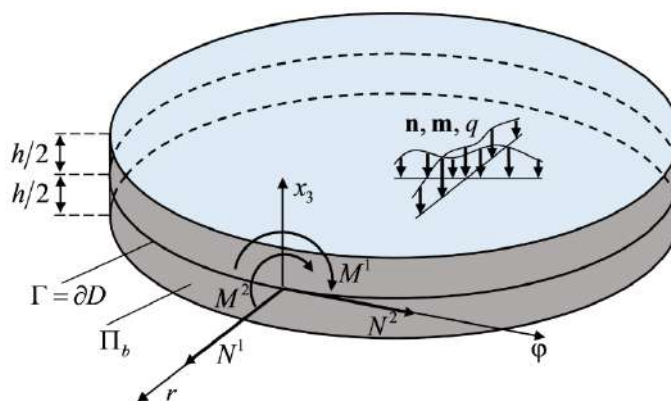


Рисунок 1 – Иллюстрация к постановке задачи