

- 2 Журавков, М. А. Математические модели механики твердого тела / М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2021. – 535 с.
- 3 Zhuravkov, M. A. Mechanics of Solid Deformable Body / M. A. Zhuravkov, Lyu Yongtao, E. I. Starovoitov. – Singapore : Springer, 2022. – 317 p.
- 4 Абдусаттаров, А. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / А. Абдусаттаров, Э. И. Старовойтов, Н. Б. Рузиева. – Ташкент : IDEAL PRESS, 2023. – 381 с.
- 5 Deformation of Three-layer Structural Elements in Thermal Radiation Fields / E. I. Starovoitov, M. A. Zhuravkov, D. V. Leonenko, Lyu Yongtao. – Springer Nature Singapore, Pte Ltd, 2024. – 384 p.
- 6 Деформирование трехслойных пластин при термосиловых нагрузках / Э. И. Старовойтов, Ю. В. Шафиева, А. В. Нестерович, А. Г. Козел. – Гомель : БелГУТ, 2024. – 395 с.
- 7 Яровая, А. В. Строительная механика. Статика стержневых систем / А. В. Яровая. – Гомель : БелГУТ, 2013. – 447 с.
- 8 Starovoitov, E. I. Deformation of a composite plate on an elastic foundation by local loads / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, M. Suleyman // Mechanics of Composite Materials. – 2007. – Vol. 43, № 1. – P. 75–84.
- 9 Старовойтов, Э. И. Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака / Э. И. Старовойтов, А. Г. Козел // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т. 24, № 3. – С. 392–406.
- 10 Leonenko, D. V. Vibrations of Cylindrical Sandwich Shells with Elastic Core Under Local Loads / D. V. Leonenko, E. I. Starovoitov // International Applied Mechanics. – 2016. – Vol. 52, № 4. – P. 359–367.
- 11 Леоненко, Д. В. Колебания круговой трехслойной пластины под действием внешней нагрузки / Д. В. Леоненко, М. В. Маркова // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2023. – № 1. – С. 49–63.
- 12 Лачугина, Е. А. Собственные частоты колебаний круговой пятислойной несимметричной по толщине пластины / Е. А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2024. – № 17. – С. 92–99.
- 13 Старовойтов, Э. И. Собственные колебания симметричного по толщине пятислойного стержня / Э. И. Старовойтов, Д. А. Будникова // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2025. – Т. 31, № 1. – С. 25–39.
- 14 Старовойтов, Э. И. Собственные колебания пятислойного стержня, вызванные начальным прогибом / Э. И. Старовойтов, Д. А. Будникова // Механика машин, механизмов и материалов. – 2025. – № 2 (71). – С. 70–77.
- 15 Будникова, Д. А. Анализ собственных колебаний пятислойного стержня / Д. А. Будникова // Механика. Исследования и инновации. – 2024. – № 17. – С. 33–39.
- 16 Будникова, Д. А. Собственные частоты колебаний пятислойного стержня / Д. А. Будникова // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 11–15.
- 17 Будникова, Д. А. Собственные колебания пятислойного стержня при жесткой заделке торцов / Д. А. Будникова // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXXI Международного симпозиума им. А. Г. Горшкова, Кременки, 19–23 мая 2025 года. – М. : ТРИП, 2025. – С. 40–42.

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МАКСВЕЛЛА – КАТТАНЕО С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФИЗИЧЕСКИ ИНФОРМИРОВАННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

Я. А. ВАХТЕРОВА, Д. А. ЛЕОНТЬЕВА

Московский авиационный институт (НИУ), Российская Федерация

В работе реализован и исследован метод физически информированных нейронных сетей (ФИНС, *Physics-Informed Neural Networks – PINNs*) для решения обратной задачи идентификации параметров волнового-диффузионного переноса тепла, описываемого уравнением Максвелла – Каттанео, в виде

$$\tau_T \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где $x \in [0,1]$ – пространственная координата вдоль стержня; t – время; α – тепловая диффузия, τ_T – время релаксации теплового потока, $\theta(x,t)$ – температура.

Данная модель критически важна для точного моделирования нестационарных высокоскоростных процессов в микро- и наносистемах, где классическое параболическое уравнение теплопроводности неприменимо из-за пренебрежения конечной скоростью распространения тепловых возмущений.

Нулевые граничные условия:

$$\theta(0,t) = 0, \quad \theta(1,t) = 0. \quad (2)$$

В начальный момент времени стержень нагревается на величину $\sin(\pi x)$:

$$\theta(x, 0) = \sin(\pi x), \quad \frac{\partial \theta(x, 0)}{\partial t} = 0. \quad (3)$$

В отличие от прямой задачи, где решение ищется для известных параметров среды, обратная задача заключается в восстановлении неизвестных коэффициентов тепловой диффузии α и времени релаксации τ_T по данным измерений температурного поля $\theta(x, t)$ в некоторой пространственно-временной области.

Любая обратная задача математической физики, включая задачу идентификации параметров модели Максвелла – Каттанео, является некорректно поставленной по Адамару. Жак Адамар сформулировал три критерия корректности задачи:

- 1) существование решения для любых входных данных;
- 2) единственность решения;
- 3) устойчивость решения: малые изменения входных данных должны вызывать малые изменения решения.

Обратные задачи, как правило, нарушают третий критерий (устойчивость). В контексте нашей задачи это означает, что сколь угодно малые погрешности в измерении температурного поля $\theta(x, t)$ могут приводить к сколь угодно большим отклонениям в восстановленных коэффициентах α и τ_T . Это делает прямое численное решение такой задачи бессмысленным, так как оно будет крайне неустойчивым и сильно зашумленным.

Метод физически информированных нейронных сетей предлагает элегантный и эффективный способ регуляризации неустойчивой обратной задачи, то есть ее преобразования в условно-корректную.

Многослойная нейронная сеть принимает на вход пространственную и временную координаты и аппроксимирует искомые параметры α и τ_T , а также поле температуры $\theta(x, t)$. С помощью автоматического дифференцирования вычисляются производные, входящие в уравнение, и формируется функция потерь, включающая невязку уравнения, ошибки по граничным и начальным условиям, а также отклонение от экспериментальных данных. Обучение сети проводится методом Adam, что обеспечивает стабильную сходимость к истинным значениям параметров.

Ключевые преимущества метода:

- 1) устойчивость к шуму;
- 2) вычислительная эффективность;
- 3) гибкость и универсальность.

Разработанный метод обладает высокой точностью, устойчивостью к помехам в данных и не требует итеративного решения прямых задач в процессе идентификации, что выгодно отличает его от традиционных итерационных методов. Представленные результаты открывают перспективы для применения ФИНС в качестве универсального инструмента неразрушающей диагностики и определения свойств материалов в микро- и наноразмерных системах.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-19-00680, <https://rscf.ru/project/23-19-00680/>.

Список литературы

- 1 **Орехов, А. А.** Фундаментальные решения уравнений классической и обобщенной моделей теплопроводности / А. А. Орехов, Л. Н. Рабинский, Г. В. Федотенков // Ученые записки Казанского университета. Сер. «Физико-математические науки». – 2023. – № 165 (4). – С. 404–414.
- 2 **Федотенков, Г. В.** Алгоритм решения контактных задач с использованием технологий глубокого машинного обучения / Г. В. Федотенков, А. А. Киреев // СТИН. – 2024. – № 12. – С. 24–27.
- 3 **Вахтерова, Я. А.** Моделирование теплопроводности в стержне на основе уравнения Максвелла – Каттанео с помощью глубокого машинного обучения / Я. А. Вахтерова, Е. Л. Кузнецова, Фан Тунг Сон // СТИН. – 2025. – № 7. – С. 25–29.
- 4 **Cattaneo, C.** A form of heat conduction equation which eliminates the paradox of instantaneous propagation / C. Cattaneo // Comptes Rendus. – 1958. – Vol. 247. – P. 431–433.
- 5 Physics-informed neural networks with hard constraints for inverse design / L. Lu, R. Pestourie, W. Yao [et al.] // SIAM J. Sci. Comput. – 2021. – Vol. 43, № 6. – P. 1105–1132. – DOI: 10.1137/21M1397908.
- 6 **Pang, G.** fPINNs: Fractional physics-informed neural networks / G. Pang, L. Lu, G. E. Karniadakis // SIAM J. Sci. Comput. – 2019. – Vol. 41, № 4. – P. 2603–2626.